雙曲幾何基本構圖及變換在數學算板中的實踐與應用

林保平

臺北市立大學數學系退休副教授

壹、雙曲幾何及其圓盤模型簡介

歐幾里得的《幾何原本》列出了五個公設：

1. 相異兩點可以決定一直線。
2. 直線的兩邊可以無限延伸。
3. 任意一點與任一距離可以畫出一圓。
4. 凡直角皆相等。
5. 同一平面上兩線被一直線所截，若某一側的兩個內角和小於二直角，則這兩條直線會在該側相交。

公設的意思就是不必證明就認定其為正確的定理。利用這五個公設及其他定義和公理，歐幾里得導出了幾何原本中的定理。前四個公設，淺顯可以同意它的正確性，但是第五公設描述較為複雜，許多數學家企圖利用前四個公設來證明其正確性，但都沒有人成功。第五公設，稱為平行公設(Parallel Axiom)，有一個等價的描述-普來費爾公理（Playfair's Axiom)：「過直線外一點恰有一條直線與此直線平行」。雖證不出平行公設，有些數學家就試著改變平行公設的內容，公設改成「過線外一點沒有任何一條線會與此線平行」或「過線外一點至少有兩條直線會與此線平行」，根據前者得出的幾何系統就是橢圓幾何(Elliptic Geometry)；根據後者推論出來的幾何系統稱為雙曲幾何（Hyperbolic Geometry)。雙曲幾何有許多不同的呈現模型，數學算板中使用龐加萊圓盤模型（Poincare's disk model）作為雙曲幾何構圖的基本模型。

圓盤模型的點與線（H 點與 H 線）

圓盤模型展示的幾何空間是一個圓的內部$\mathbb{D}=\{z||z|<1, z\in\mathbb{C}\}$。圓內的點就是雙曲幾何的點(有時為了分辨會稱為 H 點)，圓上的點不是雙曲幾何的點，稱為理想點(ideal point)，數學算板會將理想點以中空的小圓表示。若一個圓與圓盤圓正交（過交點的兩圓切線互相垂直）,此圓在此圓盤內部的弧（不含端點）就是雙曲直線（簡稱 H 直線），兩個交點（端點）就是此 H 直線的理想點，我們說此 H 線通過這兩個理想點。包含於 H 直線上的弧，若端點都在圓內部，此弧稱為雙曲線段（H 線段，含兩端點），若一端點是理想點，另一端點是 H 點，則此弧（去除理想點）稱為雙曲射線（H 射線）。若此圓圓心在無限遠處，此正交圓可以看成一條通過圓盤圓心的直

線，前述的 H 直線、H 射線或 H 線段就變成線段，因此，H 線可能是弧或線段（含或不含端點）。圖 1 展示的就是圓盤模型及其上的 H 線（H 線段、H 射線及 H 直線），在數學算板中移動圖 1 左圖中的點使 H 線通過圓盤中心，此時，可看出 H 線實際上可以是一條線段（含或不含端點），理想點都不在 H 線上。圖 1 右圖決定直線或射線的點牽涉理想點，因此作圖時，程式會標出中空理想點，方便稱呼及在未來的使用。圖 1 左圖的直線其決定是由圓中兩點決定因此其兩端沒有展示理想點。

有了 H 點和 H 線，其他 H 圖形就可以建構出來，圖 2 左圖展示的是 H 多邊形、M 為中心 N 為一頂點決定的正 H 多邊形、A 為圓心 B 為圓上點的 H 圓，H 三角形、H 角；右圖是 H 三角形 ABC 及其內切 H 圓之構圖過程，其中 AD、BD 為角平分線、DE 垂直 AB。（注意：本文雙曲幾何的 H 物件有時省略 H 字）。由於雙曲幾何兩點的距離定義與歐氏幾何不同，愈靠近圓的外圍兩點的距離（H 線段長）越大。H 圓與歐氏幾何的圓看來相同，但圓心的位置不同，正 H 多邊形的邊長及夾角都相同，但從歐氏觀點來看是不同的，底下我們先討論雙曲幾何的夾角與距離的定義。

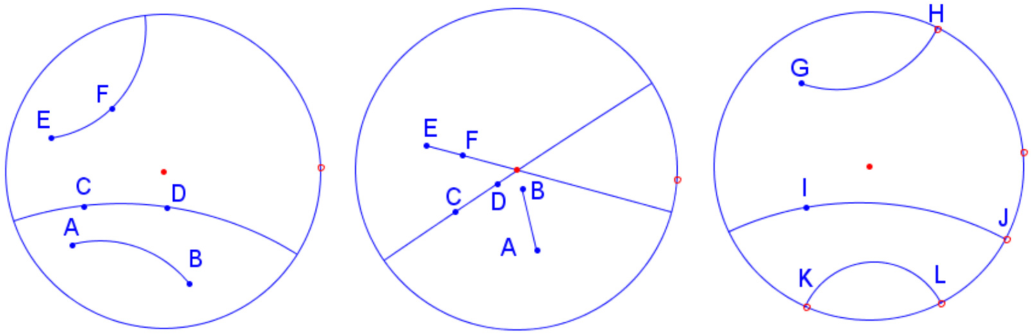


圖 1 、圓盤模型中的 H 線段 AB、H 直線 CD、H 射線 EF（上及中圖）。若決定 H 線的點是理想點時，該點會以空心點呈現，如右圖的 H、J、K、L，其中 IJ 及 KL 為 H 直線，GH 為 H 射線。

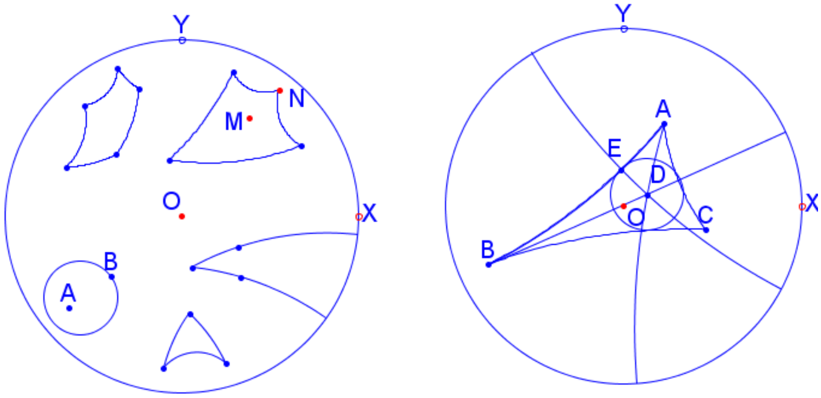


圖 2 、左圖為 H 多邊形、H 角及兩點（圓心及圓上點）決定的 H 圓，右圖為 H 三角形及其內切 H 圓之構圖

夾角與最小平行角 (angle of parallelism)

兩 H 線 AB 及 AC 有共同的頂點 A，其夾角 BAC 就是過 A 點與兩弧相切的直線所夾的角夾的角（圖 3 左圖）。圖 3 右圖展示圓盤模型中第五公設特質的「最小平行角」性質：AB 線外一點 P，有無限多條直線與 AB 平行（不相交）。圖中 PE 垂直 AB 於 E 點，C、D 為 AB 直線的理想點，PC 及 PD 為 AB 的平行線(parallel line)，其他的稱為超平行線（ultraparallel line)。最小平行角性質說：過 P 的 H 直線若與 PE 的夾角大於或等於∠EPD ，則此線會與 AB 平行，∠EPD 就是最小平行角。∠EPC 與 ∠EPD 相等，且為銳角。

兩 H 點的雙曲距離 (H 距離）

設 A、B 為兩個 H 點，C、D 為「H 直線 AB」的兩個理想點，A、B 兩點的雙曲距離（H 線段 AB 的長度）定義為 |ln ((AC·BD)/(AD·BC))| （如圖 4），也記為 AB，對數函數內的 AC、BD、AD、BC 指的是歐氏幾何的線段長。由於雙曲幾何的呈現有不同的模型，故其距離定義不相同，本定義是圓盤模型的距離定義。

貳、數學算板雙曲幾何圓盤模型基本構圖及度量

通常的動態幾何程式，都提供了基本的歐氏幾何構圖功能。雙曲幾何基本構圖功能的提供有兩種方式，一為就現有的歐

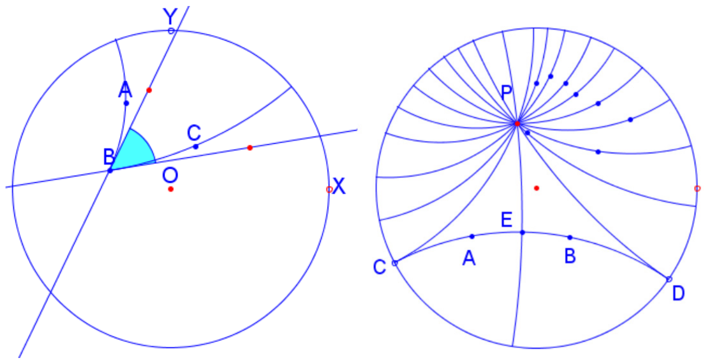


圖 3、左圖：兩弧的夾角，右圖：過 AB 線外一點 P 的最小平行角∠EPD

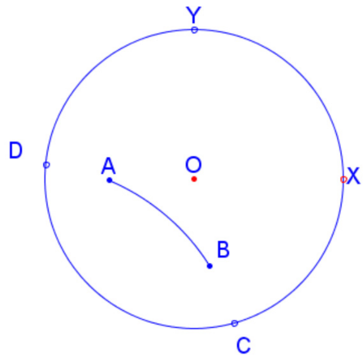


圖 4、A、B 兩點的距離（H 線段 AB 的長），C、D 為 AB 直線的理想點

氏幾何構圖程式，外加功能盒（ToolBox）例如在 Geometer's Sketchpad (http://www.keycurriculum.com)、Geogebra (https://www.geogebra.org)等動態數學程式上透過巨集，加上工具盒或工具選單，提供不同模型的雙曲幾何構圖工具。另一為重新建立獨立的雙曲幾何系統（不同的雙曲幾何模型），提供雙曲幾何基本的構圖功能，例如 nonEuclid (http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html)、Cinderella (http://www.cinderella.de/tiki-index.php ）。Cinderella 更可在歐氏及雙曲幾何間做系统的轉換。第一種處裡方式的好處是歐氏幾何與雙曲幾何構圖可以並列同時存在，使用者知道自己正在處理的幾何是歐氏或雙曲幾何，可在同一個畫面相互對照，方便比較。第二種方式的處理（尤其是 Cinderella）強調幾何系統的一致性，歐氏幾何與雙曲幾何系統可以互換，尤其是歐氏與雙曲互通的中性幾何 (Neutral Geometry)定理的構圖轉換。數學算板類似於第一種處理方式，將雙曲幾何龐加萊圓盤模型的構圖功能直接加入數學算板的歐氏基本構圖功能表中，但只提供圓盤模型的構圖工具，其他模型，則透過同構轉換可以得到同構的圖形。除了基本構圖外，數學算板也提供了雙曲幾何的剛體變換（鏡射 reflection、旋轉 rotation、平移 translation、極限旋轉 limit rotation）功能。

數學算板的基本構圖功能表中，歐氏及雙曲幾何互通的項目都附有©記號（表示 Ctrl 鍵），想要作雙曲構圖，選用工具時，只需先選取已知物件(歐氏幾何或雙曲幾何物件)，再按 Ctrl 鍵選取選項即可做出雙曲幾何圖形（亦即按 Ctrl 鍵雙曲，不按 Ctrl 鍵歐氏）。當然要使用雙曲構圖功能前，先要建立雙曲圓盤，只要選取兩點做出的圓(第一點為圓心,第二點為圓上點)，在「變換」選單中選取「標定反轉圓」即可標定該「反轉圓」為目前的雙曲幾何圓盤，並在其內雙曲作圖。前述第一點就是圓盤坐標的原點，第二點就是圓盤坐標的 X 軸單位點（不一定在水平位置）。也可以直接選取「變換」選單中的「建立圓盤模型」選項，程式會自動建立並標定反轉圓，並建立水平及鉛直的 XOY 坐標軸（X、Y 在圓上是兩軸單位點，O 為原點）。，這個反轉圓就是程式中歐氏幾何「反轉變換」的「反轉圓」。

數學算板的選單有兩類—圖像選單與文字選單(如圖 5)，文字選單都有數層下拉選項；圖像選單若有倒三角形記號就有下拉選單。選單選項上有©記號的選項表示此選項支援雙曲幾何作圖，要雙曲作圖就要同時按 Ctrl 鍵（最好下拉之前先按）。兩種選單使用步驟略有不同。圖像選單使用步驟為：（1）決定要作什麼圖像。（2）選圖像（有©記號時考慮是否要同時按 Ctrl 鍵）。（3）手動畫圖（雙曲構圖要畫在圓盤內）。文字選單使用步驟為：（1）決定要作什麼圖像。（2）點選該種構圖的已知條件。（3）選取文字選項（有©記號時考慮是否要同時按 Ctrl 鍵）。（4）程式根據已知條件畫圖。

圖 5、第一列文字選單，第二列圖像選單

圖像選單中雙曲幾何圓盤模型的基本構圖

圖 6 展示雙曲作圖（有@記號者）圖像功能表。

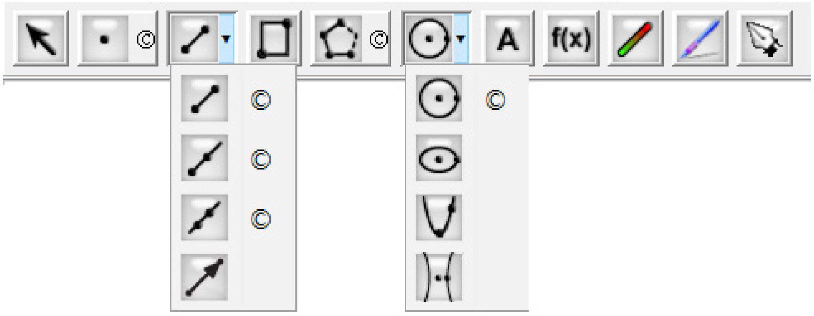
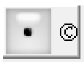
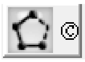


圖 6、圖像功能表

1. —「點」按鈕。點選按鈕之後，可在畫面上以滑鼠單擊左鍵，若單擊在物件上，則作出物件上的點為半自由點，可在物件上自由拖曳。若單擊在空白處，則作出一點為自由點，可自由拖曳。單擊在空白處時，若同時按 Ctrl 鍵，則可以在圓盤內部取點（半自由點），此點取出後可以在圓盤內部移動，但無法在圓外部取點。若沒有同時按 Ctrl 鍵，則可以在整個畫面上取點（自由點），移動此點至圓盤內部時，它就被看成 H 點，H 點生成的後代雙曲物件都會呈現（否則該物件不存在且不呈現），不論是否按 Ctrl 鍵，都可以在圓周（反轉圓）上取點（作出空心點，是半自由點），此點可以在圓周上移動。

2.  —「線段」（射線、直線、或圓）按鈕。在畫面按住滑鼠左鍵（作出一點）不放空拖曳滑鼠（拉出一條線或圓）最後再放空（再作一點）得到兩點決定的一線段（射線、直線或圓），若點選滑鼠左鍵的位置或放空處為一點則取此點；若不是一個點（空白處或物件上），則在空白處或物件上作出一點，以此二點作出一線段（射線、直線或圓）。若所取兩點非原有的點或原有物件上的點，則作出的點為自由點，可在畫面上自由移動。若所作是圓，則第一點為圓心，第二點為圓上點，此二點若在圓盤內，可視為 H 點。若按

鈕時同時按 Ctrl 鍵，則作出 H 線段（H 射線、H 直線或 H 圓）。若所取兩點非原有的點，則作出的為半自由 H 點，可在圓盤內部（或圓周）自由移動。若所取兩點有一點在圓盤外部，則程式不作圖。這個以「按左鍵—拖曳—放空」之作圖法，適用於觸控畫面兩點為親代的物件作圖。

3. —「多邊形」或「H 多邊形」按鈕。點選按鈕之後，可在畫面單擊滑鼠左鍵（作出一點），放空移動滑鼠（程式會自動拉出矩形）、再單擊滑鼠左鍵（再作或取一點），放空移動滑鼠（拉出三角形）…最後一次單擊右鍵表示終止作出多邊形（或 H 多邊形）。滑鼠單擊處若是一點，則取此點；若是其他物件，則做出該物件上的點；若在空白處，則作出一點。移動滑鼠時，程式會拉出這些點連結而成的一個多邊形。若只單擊第一次和第二次，則拉出的是以此兩點決定的標準矩形（邊為水平或鉛直），大於第三次則拉出的是多邊形。若按鈕時同時按 Ctrl 鍵，則空白處所作的點為半自由 H 點，可在圓盤內部（或圓周）自由移動，移動滑鼠時，會拉出 H 多邊形。但若只單擊兩次，會作出 H 線段；若索取的點有一點在圓外部，則不作圖。這個「單擊—放空移動—再單擊…—按右鍵」之作圖法，較適用於親代超過兩點的多邊形作圖。

文字選單中雙曲幾何圓盤模型的基本構圖

文字選單中的雙曲構圖若有歐氏類似的構圖，則與歐氏構圖共用（加上©記號），若無相應的歐氏構圖；則標出「雙曲」二字或只用其雙曲幾何物件名稱。選取時，不必同時按 Ctrl 鍵。在數學算板中，雙曲構圖可按 Ctrl 鍵的選項有：

向量終點、中點、線段、射線、角平分線、直線、垂直線、多邊形、全等多邊形、圓（圓心＋點、圓心＋半徑）。不必按 Ctrl 鍵的選項有：雙曲單位點、可拼圖雙曲正多邊形外接圓半徑點、雙曲等距線（hypercycle or equidistant curve）、雙曲中間線(middle line)、H 多邊形內部。文字選單構圖在選取選項時，需先點選已知物件，這是根據雙曲物件定義的親代。例如過 H 線外一點的雙曲等距線，就是在此點同側且與此 H 線等距離的點所成的集合（注意：等距線不是 H 線，兩側各有一條），因此選取一個 H 點及一條 H 線後選取選項，程式就會畫出過該點與 H 線等距在該點同側的雙曲等距線。其他每一選項構圖的已知物件，請參閱數學算板線上說明。

在圓盤模型中，一個歐氏幾何圓 C（或直線）有下列可能情形

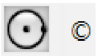
（1）若圓 C 包含在圓盤範圍內，則它就是一個 H 圓（雙曲幾何圓）。

（2）若圓 C 與圓盤內切於一個理想點，此圓（不含切點）就是極限圓（horocycle,or limit circle）。

（3）若圓 C 與圓盤圓正交， 則圓 C 在圓

盤內部不含端點的弧或線就是 H 線。

（4）若圓 C 與圓盤圓交於兩理想點 A、B，但不正交，則 C 在圓盤內部不含端點的弧或線 AB 就稱為等距線（equidistance curve）或超圓（hypercycle）。以 A、B 為理想點（端點）的超圓有無限多個。若 L 為某 H 線的一條雙曲等距線，過此 H 線上任一點 E 作 H 線的垂直線交雙曲等距線 L 於 F，則 EF 為定值，這是「等距」名稱的由來。

在數學算板中，極限圓（非 H 圓）的作圖與 H 圓的作圖法相同，在圖像選單中選取選項  （同時按 Ctrl 鍵），第一個點點擊於圓盤圓上，拖曳取得圓上點，即可得到與圓盤單位圓相切的極限圓。或先選取圓盤單位圓上一點，在取圓內部一點，在文字選單中選取選項「中心＋圓上點」（按 Ctrl 鍵）即可作出極限圓。雙曲等距線（超圓）的繪製，則要選取圓盤內部一點及一 H 線，然後在文字選單中選取構圖選單中的選項「雙曲等距線」即可作出過該點與該 H 線兩端點（理想點）的等距線。圖 7 左圖為展示切於 A 點的極限圓，右圖展示同過理想點 A、B 的等距線，其中 H 線 AB(粗線)不是等距線，其他都是（含虛線）。

雙曲幾何中的度量

文字選單中的「度量」選單則提供了雙曲幾何圓盤模型的度量選項，可以度量的選項有：距離、長度、半徑、周長、角度、面積、比率。圖 8 為展示透過距離及角度來檢視雙曲幾何中三角形的正弦定律：若三角形 ABC 中，∠A, ∠B, ∠C 所對的三邊長分別為 a, b, c，則 $\frac{\sin(A)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(B)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(C)}{\sinh(c)}$ 及三角形內角和小於 180 度。移動 A、B、C 三點可以觀察上述

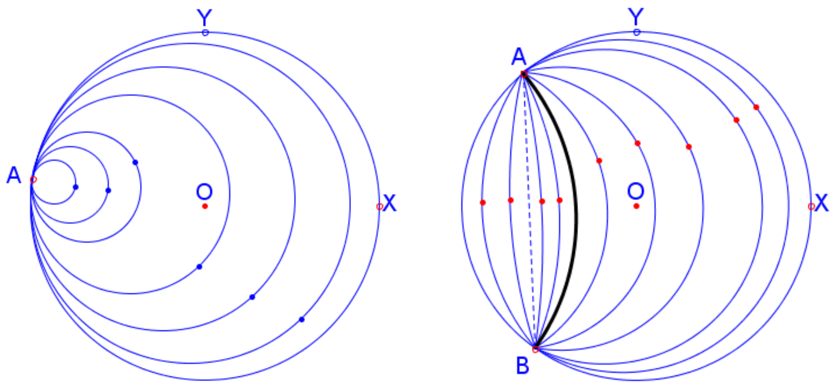


圖 7、與圓盤單位圓切於 A 點的極限圓（左圖）及過 A、B 兩理想點的等距線（右圖）

比率、內角及內角和的改變，其比率均相等，內角和也都小於 180 度。其實，給予前述三角形的邊及角的數值，也可以方便的檢驗雙曲三角形的餘弦定理：

$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A$。

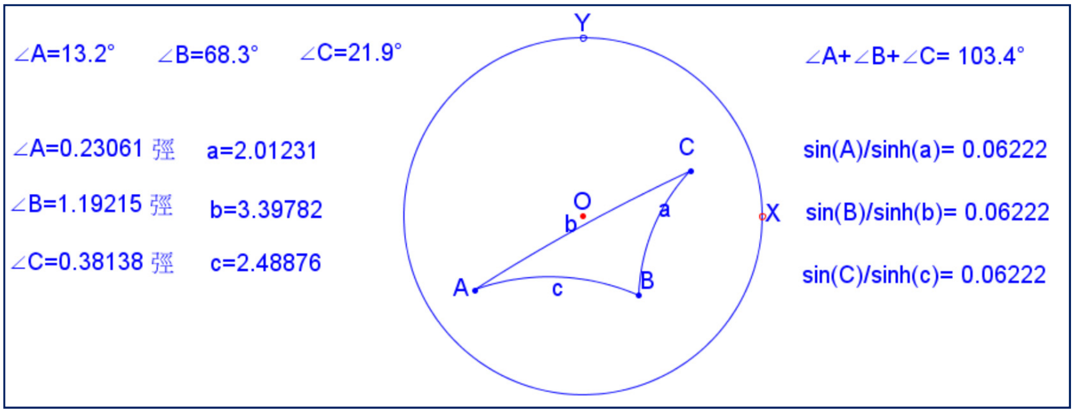


圖 8、雙曲三角形內角和小於 180 度及正弦定律 $\frac{\sin(A)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(B)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(C)}{\sinh(c)}$ 的檢驗

參、雙曲幾何圓盤模型的基本變換

數學算板提供了歐氏幾何的許多變換，其中對雙曲幾何最重要的就是反轉變換(inversion)。底下分別介紹數學算板中的反轉變換及雙曲剛體變換（hyperbolic isometry），它們的許多性質，都可透過數學算板構圖及移動圖形觀察出來。

反轉變換

歐氏幾何的鏡射，是以一條直線為其對稱軸做反射，而反轉變換其實可以看成是一個幾何物件對圓的鏡射。

設 $O(r)$表示平面上圓心為 O，半徑為 r 的圓，設 P 為平面上異於 O 的任意一點，在 OP 射線上一點 P'，若滿足 ，則稱 P'為 P 對圓 O 之反轉點(像)，圓 O（r）稱為反轉圓 (circle of inversion)，O 點稱為反轉中心(center of inversion)，r 稱為反轉半徑(radius of inversion)。若 P 點與 O 點重合，P 點之反轉點定義為無窮遠點 (point at infinity)，加上此無窮遠點的平面，稱為反轉平面(inversive plane)。反轉平面上這種點對應的方式，稱為反轉變換 (inversive transformation)。反轉變換是個一對一及映成的對應，將反轉圓內的點變換成反轉圓外的點，而反轉圓上點就是反轉變換的不變點(invariant point)，變換的不變圖形（invariant）是指圖形在變換後仍是原圖形（點、線、圓、...）。因此，反轉圓本身就是反轉變換的不變圖形。

反轉變換具有許多特質(趙，民 86)，例如

（1）將反轉圓內部的的點反轉成為外部的點，反之亦然。

（2）將一個通過反轉中心的圓反轉變換

成為一條直線，反之亦然。

（3）將不通過反轉中心的圓反轉成一個圓。

（4）正交的圖形反轉之後的圖形也會正交，例如極坐標格線的同心圓系與角度線系為正交，反轉之後會變成兩組正交的圓系。

數學算板提供了反轉變換的功能，要使用這個功能，必須標定反轉圓，選取一個由圓心及圓上點構成的圓，即可標定反轉圓。選取點、線段、射線、直線、弧、圓、多邊形、雙曲多邊形，即可利用變換選單的「反轉變換」選項，將所選物件反轉。圖 9 為展示直線、圓、矩形及五邊形的反轉結果。

圖 10 為展示反轉變換將反轉圓內部的方格線反轉至圓外部之圖形。

圖 11 為展示 P 點的共點線束及 P 為圓心的同心圓束反轉出來的像，圖中 P'為 P 的反轉像，共 P 點線束反轉成為以 OP' 的中垂線為圓心的圓束(橢圓共軸圓系，ellipticalpencil of coaxial circles，圖 11 左圖)，而同心 P 圓束反轉成為圓心在 OP 直線上的圓束（雙曲共軸圓系，hyperbolic pencil of coaxial circles，圖 11 右圖），由於共點線束與同心圓束正交，所以它們反轉得到的圓束都正交（反轉變換會維持物件的正交特性）。圖 12 左圖為展示前述反轉得到的兩圓束併陳的圖像，此二圓束中任一圓束的圓都與另一圓束的每一個圓正交。圖 12 右圖展示垂直於 OP 的平行線束反轉後得到的相切圓束（拋物共軸圓系，parabolic pencil of coaxial circles），其中 OP 垂直 OR，OR 反轉像就是本身。各圖中，動點 Q 移動時會帶動包含它的圓或直線，此時，其反轉像也會隨之移動，可以觀察線束及圓束中成員及其反轉像的對應位置。

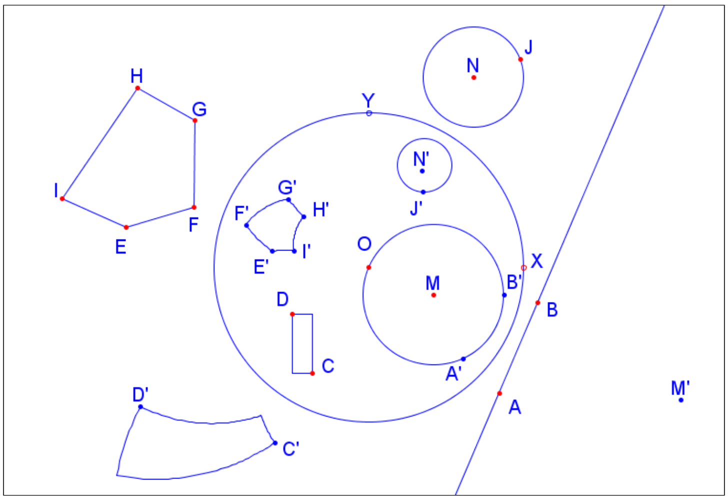


圖 9、直線、圓、矩形及五邊形反轉之圖形，相同符號者互為對應點

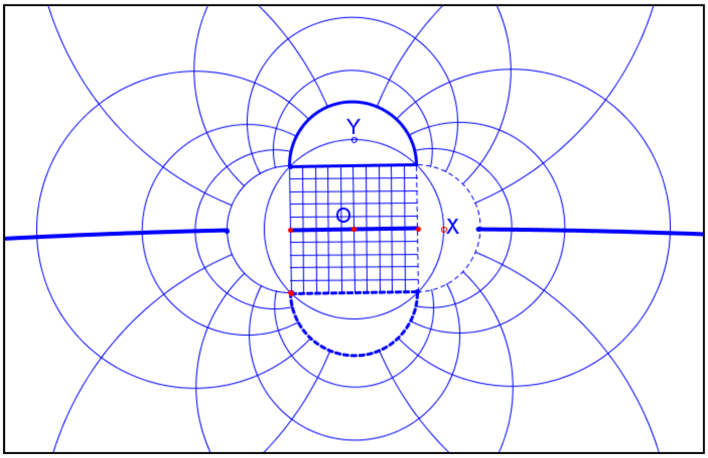


圖 10、反轉圓內部方格線反轉至圓外部之圖形

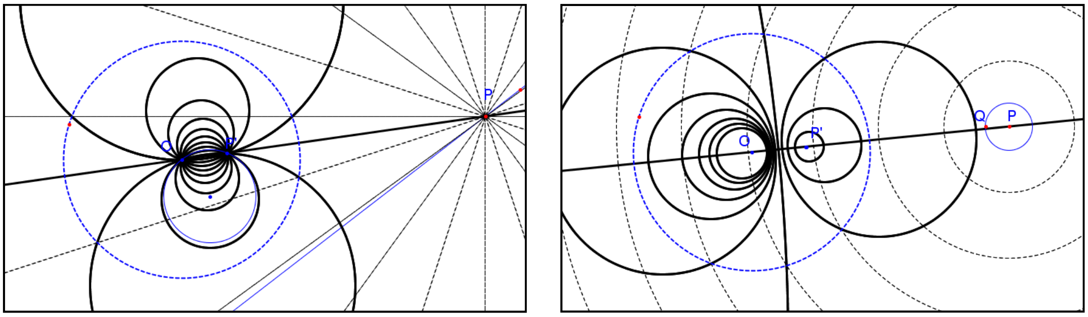


圖 11、左圖是共 P 點線束之反轉，右圖為同心 P 圓系的反轉

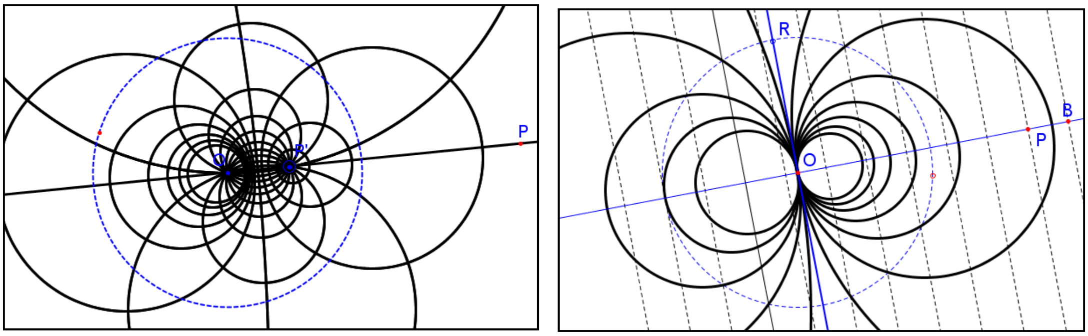
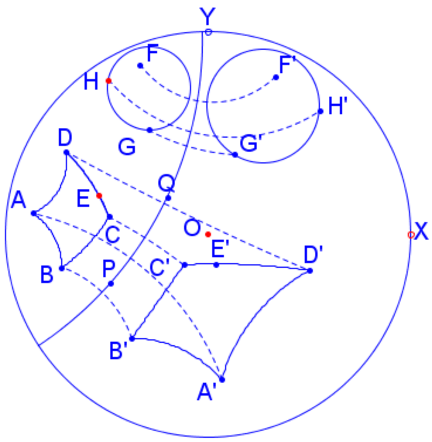


圖 12、左圖為圖 11 中兩組反轉像圓束同時呈現，是正交的兩組圓系，右圖為與 OP 直線垂直的平行線束反轉後得到的與 OR 直線相切於的圓束

H 鏡射（hyperbolic reflection）

雙曲幾何中的鏡射，其實就是雙曲幾何物件，以包含 H 線的圓為反轉圓的歐氏幾何反轉變換。因此要執行雙曲鏡射，先要標定 H 鏡射軸(一條 H 線，其實就是一個與圓盤正交的圓的一部份)。之後只要。再選取雙曲物件，並選取鏡射選項(注意：要按 Ctrl 鍵)，即可將物件作 H 鏡射。H 鏡

射軸上的點就是鏡射的不變點（invariant point），因此 H 鏡射軸就是鏡射的不變線（invarient line），透過圓的鏡射及圖形的移動可以很清楚的看出，以 H 鏡射軸上的點為圓心的所有 H 圓都是 H 鏡射的不變圖形（invariant）。圖 13 展示 H 四邊形 ABCD 及 H 圓對 H 直線 PQ 的鏡射，圖中對應點連結的虛線都被 H 直線 PQ 所垂直平分。



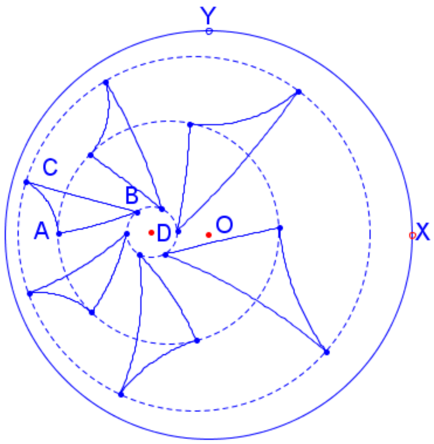


圖 13、上圖：H 四邊形及 H 圓對 H 直線 PQ 的鏡射，下圖：ABC 對中心 D 連續做 5 次 60 度的旋轉

歐氏幾何中，鏡射是一個最基本的剛體變換（isometry），一個剛體變換雖然不一定是一個鏡射，但卻可以可以由一至三個鏡射合成（趙,民 86,P95），雙曲幾何的剛體變換也有類似的性質(Greeberg,1993,P340)。數學算板提供的平移、旋轉、鏡射，滑動鏡射等許多歐氏幾何的基本變換並未使用鏡射的合成來定義。但在雙曲幾何除下述的 H 旋轉之外，其他的變換是以 H 鏡射的合成來定義並作圖。

H 旋轉（hyperbolic rotation）

雙曲旋轉是以交於一個 H 點的兩條 H 線為 H 鏡射軸的 H 鏡射的合成。由於雙曲幾何角的定義與歐氏幾何相同，數學算板是以 H 點的旋轉作為 H 旋轉的中心點，旋轉後，點與中心的距離不變，並未以 H 鏡射的合成作定義。雙曲幾何旋轉與歐氏幾何相同，標定中心點後，設定角度（任意度量的內部值，視為弳度量），可以將點旋轉該弳度（注意：角度的呈現值可以用弳或度為單位，但內部值是以弳為單位）。H 旋轉也是雙曲剛體變換，圖形旋轉後與原圖全等，圖 13 下圖展示 H 三角形對中心 D 迭代旋轉 5 次而得的圖形。對應的頂點都在一個圓上，如虛線圓所示。圖 14 為展示以 A 點為中心，將 H 射線（紅粗線 AB）及其上若干點，作 18 度迭代旋轉後得到的圖形。我們可以看出點旋轉的路徑就是以 A 為中心的 H 圓（虛線圓），旋轉得到的這些 H 射線都與 H 圓正交。A 是 H 旋轉

中唯一的不變點，H 旋轉沒有不變線，而這些圓心為 A 的 H 圓都是不變圖形。當移動 A 點到圓盤中心 O 時，H 旋轉就是歐氏旋轉(圖 14 下圖)。

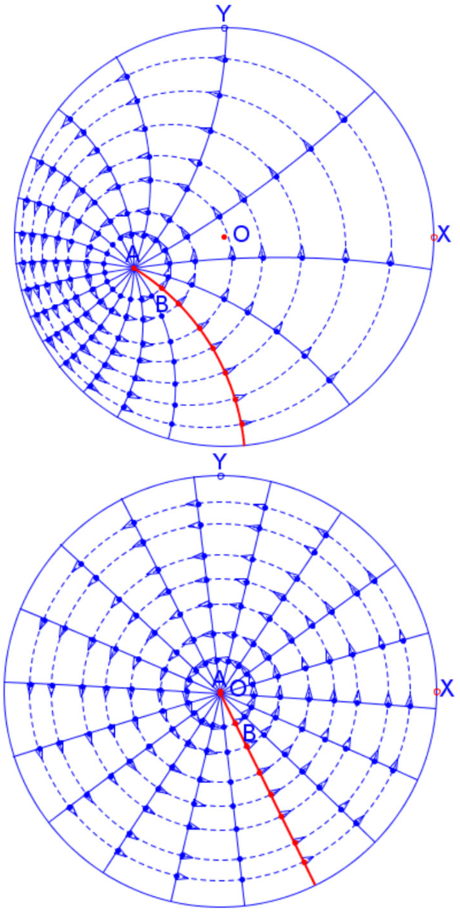


圖 14、以 A 為旋轉中心，將 H 射線（紅粗射線 AB）及其上若干點作 18 度的迭代旋轉所得圖形

H 平移（hyperbolic translation）

在雙曲幾何中，H 平移向量也是由兩點決定，這個向量的方向就是 A、B 兩點決定的 H 線的方向（注意：數學算板中，雙曲平移向量指由兩點所決定的有向 H 線段），數學算板中 H 平移是由兩個 H 鏡射合成的，從平移向量 A、B 兩點構成的 H 線段上取 H 線段中點及 B 點，分別作此 H 線段的 H 垂直線，以此二垂直線 l、m 為鏡射軸，將要平移的物件先對 l 作鏡射，所得物件再對 m 作鏡射，所得物件就是與原物件全等的物件，如圖 15 所示。

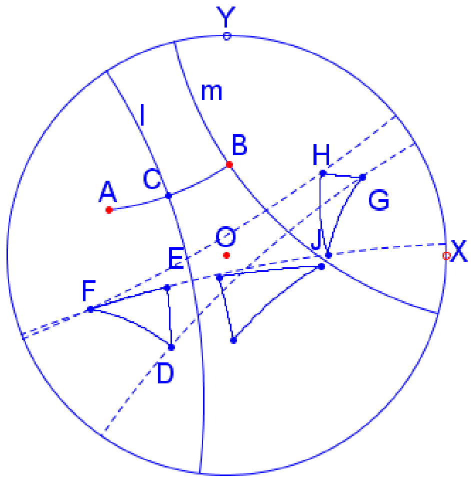


圖 15、數學算板中兩 H 鏡射構成的 H 平移，AB 為決定平移的兩點

要將物件平移，需先選取兩點標定 H 平移向量，然後只要再選取 H 物件，程式會呈現平移對話框，只有標定向量的選項才可以做 H 平移，並選取確定按鈕(注意：要按 Ctrl 鍵)，即可將物件做雙曲平移。圖 16 上圖展示的是標定 A、B 為向量，將 CD（H 線），及線上的點迭代 H 平移數次的結果。圖 16 下圖為展示將 H 圓、H 三角形及 H 五邊形迭代平移多次的結果。圖 16 中，虛線均為雙曲等距線（超圓）。H 平移與歐氏平移有些不同，雖然每個個別點「迭代 H 平移的距離」相同，但只有在平移向

量方向（A、B 構成的 H 線，稱為平移的軸，Axis of Translation）上的點 H 平移的距離等於 AB 的距離，其他方向點 H 平移距離都大於 AB（Greenberg 1993,p331）。H 平移沒有不變點，但包含 A、B 的 H 線（紅色粗線）為其不變線，以其為軸的所有雙曲等距線（超圓，即圖中虛線的弧，非 H 線）都是不變圖形。

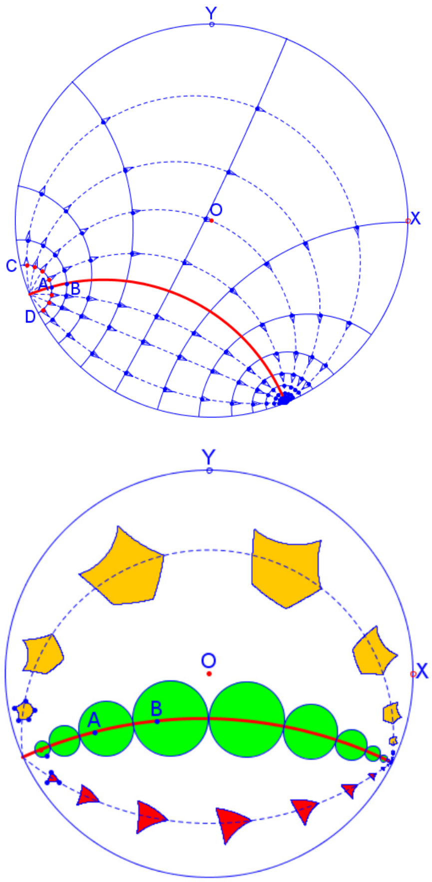


圖 16、上圖為以 AB 為標定向量，CD 線及其上的部分點多次迭代平移之結果，下圖為以 AB 為標定向量，H 圓、H 三角形及 H 五邊形多次迭代平移之結果

顯然，軸不同的平移必不相同，由 PROPOSITION9.11(Greenberg 1993,p331）可以證得下述性質：

設 T_1、T_2 分別為 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{CD}$ 的 H 平移，

則　$T_1 = T_2 \Leftrightarrow$ A、B、C、D 共線，

且　AB＝CD

因此，只當兩雙曲向量共線（有相同的平移軸）並等長時，所決定的 H 平移才是相同的。

H 滑動鏡射 (Hyperbolic Glide Reflection)

H 滑動鏡射其實是一個 H 平移與一個 H 鏡射合成。標定一個平移向量後，選取一個 H 物件，再點選「滑動鏡射」(要按 Ctrl 鍵)即可作出該物件的滑動鏡射物件，其圖形就是該物件對標定向量平移，然後再對平移軸作鏡射所得到的圖形。H 滑動鏡射沒有不變點，H 直線 AB 為其不變線，AB 線的雙曲等距線（不是 H 線）都是不變圖形。圖 17 為展示雙曲滑動鏡射與歐氏幾何滑動鏡射的對照圖。17 左圖為以 AB 為 H 平移向量，四邊形 EFGH 的 H 滑動鏡射迭代若干次的的圖形，17 右圖為以 IJ 為平移向量，四邊形 KLMN 的歐氏幾何滑動鏡射。

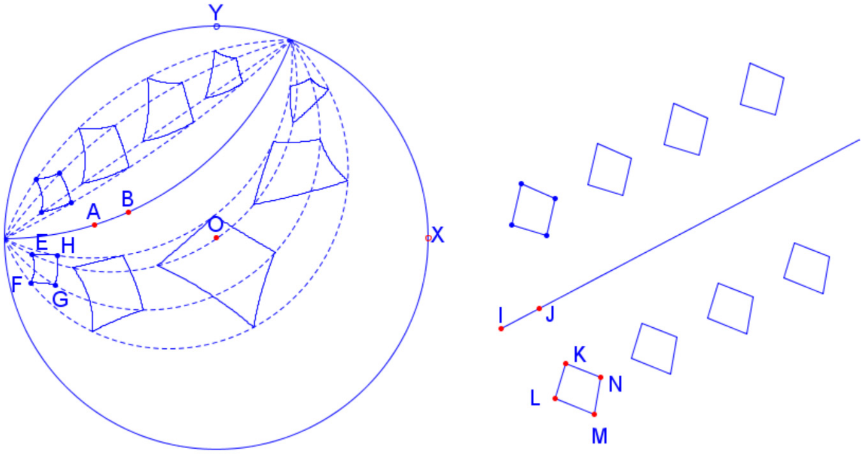


圖 17、左圖：雙曲滑動鏡射迭代的過程，右圖：歐氏滑動鏡射迭代的過程

極限旋轉（limit rotation）

極限旋轉是只有雙曲幾何才有的變換。數學算板中，極限旋轉是以兩條交於理想點的 H 線為 H 鏡射軸的 H 鏡射的合成。數學算板中，要將物件做極限旋轉時，先依序取三點 A、B、C，標定一個角 ABC（選項「標定角度或角」），其中 A、C 均為 H 點，而 B 為理想點，然後選取一個物件，再點選選項「極限旋轉」即可作出極限旋轉結果之圖形。極限旋轉會將物件先對 H 線 AB 做 H 鏡射，再將結果對 H 線 CB 做 H 鏡射，而得一新物件。圖 15 為展示 H 線 BD 及其上若干點，連續作 20 次以 H 線 BA 及 H 線 BC 為 H 鏡射軸合成的極限旋轉。可以看出極限旋轉沒有不變點，而以 B 為中心的極限圓（圖中的虛線圓）都是極限旋轉的不變圖形（不是 H 線）。

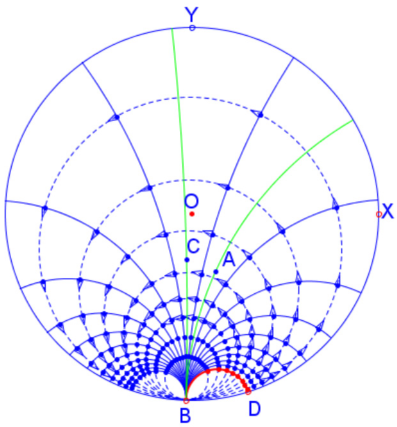


圖 18、H 線 BD 及其上若干點，以 H 線 BA 及 H 線 BC 為 H 鏡射軸合成的極限旋轉（迭代 20 次）

H 放縮（hyperbolic dilation)

我們定義圓盤模型𝔻中的加法運算⊕及純量積運算⊙如下：（Kinyon-Ungar,2000)

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{z_1 + z_2}{1 + \overline{z_1} z_2} \text{，}$$

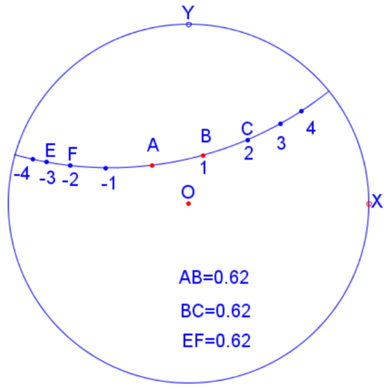
$$t \odot x = \frac{x}{|x|} \frac{(1+|x|)^t - (1-|x|)^t}{(1+|x|)^t + (1-|x|)^t} \text{，}$$

其中　$x, z_1, z_2 \in \mathbb{D}, t \in \mathbb{R}$

據此，過$\mathbb{D}$中兩點 a,b 的 H 線的參數式為：

$$h(t) = a \oplus \big(t \odot ((-b) \oplus a)\big) \text{，}$$
$$t \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{D}$$

利用這個參數式，我們建立「點」的雙曲「放縮變換」，與歐氏放縮變換相同，我們必須先選取一點以「標定中心」，並選取一個度量（只看其數值）以「標定比率」，或進入「放縮」對話框時，輸入固定比率。要作點放縮時，先選取要放縮的點，然後選取「變換」選單中的「放縮...」選項，此時程式會呈現「放縮」對話框，選定「標定的比率」或輸入「固定的比率」後，按「確定©」（同時按 Ctrl 鍵)，即可將點放縮，放縮得到的點會在標定的中心及放縮點構成的 H 線上，比率值可正可負。圖 19 上圖展示以 A 為放縮中心，將 B 點放縮 ±1,±2,±3,±4 構成的雙曲數線圖形（比率數值是後置的）。注意：相鄰兩點的 H 距離都是相同的。這個放縮變換並未將 H 線變換成 H 線，也未將 H 圓變換成 H 圓，此與歐氏幾何不同，在雙曲幾何中並沒有相似的概念。圖 19 下圖展示以 E 點為放縮中心，將 H 線 AB 及 H 圓（C 圓心，D 圓上點）放縮而得的圖形，其圖形的製作是：分別在 H 線 AB 及 H 圓上取 F、G 兩點，以 E 為中心，將 F、G 放縮得 F'及 G'，再分別取取 F、F'及 G、G'選取構圖選單中的「軌跡線」作圖而得。圖 19 中當 F 在 H 線 AB 上移動時，F'的軌跡就是 H 線 AB 的放縮像。同樣地，當 G 在 H 圓上移動時，G'的軌跡就是 H 圓的放縮像，數學算板沒有支援非點的「物件」放縮作圖，因其並非常見的幾何物件。



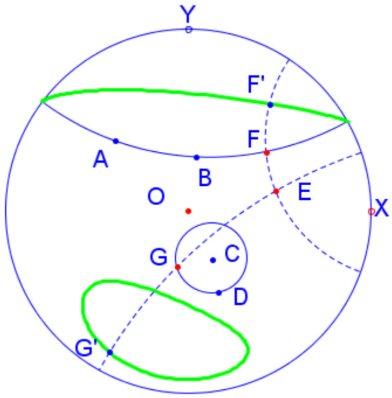


圖 19、上圖以 A 點為放縮中心，將 B 點放縮±1, ±2, ±3, ±4單位（以 AB 長為 1 單位），下圖以 E 點為放縮中心，將 H 線 AB 及 H 圓（C 圓心，D 圓上點）放縮的像。

其實雙曲幾何的剛體變換（H 旋轉、H 平移及極限旋轉）都可表示為兩個 H 鏡射的合成，他們都有歐氏圓（或圓的一部份，線段為特例）的不變圖形，分別是圓心為旋轉中心的 H 圓、通過軸的兩理想點的超圓（即雙曲等距線）、通過極限旋轉中心（理想點）的極限圓。

肆、數學算板中可展示的雙曲幾何模型

要展示雙曲幾何圖形，需要一個模型，雙曲幾何模型有些是有限的，有些是無限的。數學算板可展示的有限模型除了前述的龐加萊圓盤模型外尚有克萊恩模型(Klein model)，無限模型有蓋恩思(Gains 1966)模型、上半平面(Upper-Half plane)模型、雙曲面 (Hyperboloid,or Minkowski 敏柯斯基)模型及半球面模型（spherical model）。

數學算板中主要的雙曲幾何模型是圓盤模型。所提供的雙曲基本作圖功能均使用圓盤模型，並未提供其他模型的作圖工具，但為讓教師教學與使用者方便比較，我們也製作了由圓盤模型轉換到其他模型的轉換機制。也就是說，只要在圓盤模型作圖，就可得到其他模型的同構圖形。這些同購圖形可以分別在平面上展示，也可以在 3D 空間中觀察這些同構圖形與半球面模型或雙曲面模型的關係。

在 3D 空間中，圓盤模型的定義域是$\{(x,y,0)|x^2+y^2<1,x,y\in\mathbb{R}\}$，克萊恩模型的定義域是$\{(x,y,1)|x^2+y^2<1,x,y\in\mathbb{R}\}$，雙曲面模型的定義域是$\{(x,y,z)|x^2+y^2-z^2=-1,x,y,z\in\mathbb{R}\}$，蓋恩思模型的定義域是$\{(x,y,0)|x,y\in\mathbb{R}\}$。上半平面模型的平面定義域是$\{(x,y)|y>0,x,y\in\mathbb{R}\}$，並未在 3D 空間建立轉換。設$r=x^2+y^2$，，我們用來轉換的同構函數是：

（1）圓盤模型轉換至克萊恩模型：

$$(x,y)\to(\frac{2x}{1-r}\ ,\frac{2y}{1-r})$$

（2）圓盤模型轉換至上半平面模型：

$(x,y)\to(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}\ ,\ \frac{1-r}{x^2+(y-1)^2})$, (by mobius transformation) $f(z)=\frac{z+i}{-iz+1}$

（3）圓盤模型轉換至蓋恩斯模型：

$$(x,y)\to(\frac{2x}{1-r}\ ,\frac{2y}{1-r})$$

（4）圓盤模型轉換至雙曲面模型：

$$(x,y,0)\to(\frac{2x}{1-r}\frac{2y}{1-r}\ ,\frac{1+r}{1-r})$$

（5）圓盤模型轉換至半球面模型：

$$(x,y,0)\to(\frac{2x}{1+r}\frac{2y}{1+r}\ ,\frac{1-r}{1+r})$$

以三角形的內心及內切圓的構圖為例，我們先在圓盤模型中作出三角形 ABC，再分別作出角 A 與角 B 的角平分線交於一點，此點即為三角形內心 I。再過 I 作 AB 的垂直線，取得垂足點 D。以 O 為圓心，OD 為半徑作出內切圓。圖 20 展示的是將圓盤模型內三角形內心及內切圓構圖圖形變換至其他模型的相應圖形。本圖

不是剪貼的圖形，各模型均通時存在同一螢幕上，移動圓盤模型中的物件，其他模型中的相應物件會做相應的位置改變。可以看出圓盤模型的線是與圓盤正交的弧，上半平面模型的線是與 X 軸正交半圓上的弧，克萊恩模型的線是弦的一部份，而蓋恩思模型的線是雙曲線的一部份。在圓盤模型與上半平面模型中，圓就是歐氏幾何的圓，但在克來恩及蓋恩思模型中，圓可能是橢圓，所有模型中的點就是定義域中的歐氏點。

圖 21 展示的是圓盤模型、克萊恩模型、蓋恩思模型與雙曲面模型在 3D 中對應的狀況，用滑鼠在原點附近可拖曳轉動整個 3D 圖形。圓盤模型與蓋恩思模型是在 XY 平面(z=0)上，而克萊恩模型是在 z=1 的平面上。圖 21 左圖及中圖雙曲模型上的圖形是由(0,0,-1)及(0,0,0)分別將圓盤模型及克萊恩模型中的圖形投影至雙曲面上而得。圖 21 右圖展示蓋恩思模型與雙曲面模型的平行投影關係。圖 22 為展示圓盤模型與半球面模型的投影關係。其實，每一垂直於 XY 平面與半球面交集所得的半圓就是半球面模型上的 H 線，半圓上的弧就是 H 線段或 H 射線。圖 22 左下是只有三角形的投影關係。每一立體圖形均可使用滑鼠作多方向的轉動(在原點附近拖曳滑鼠)以觀察其立體關係。

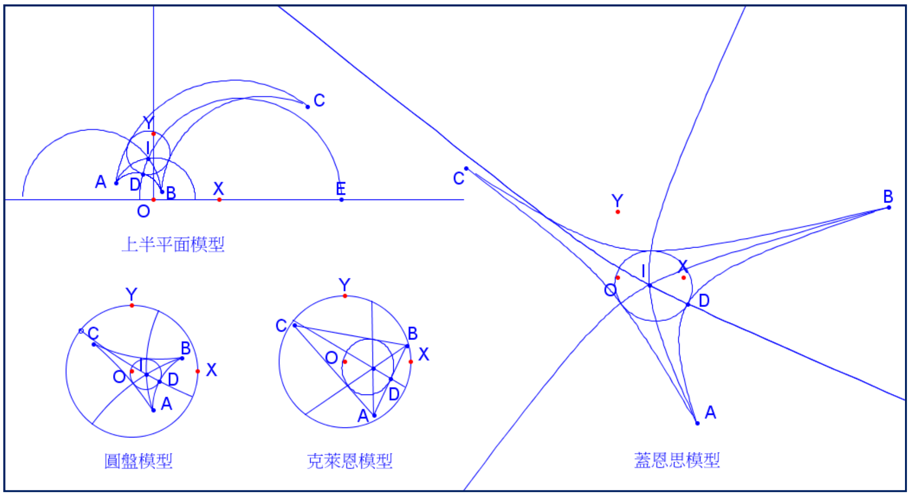


圖 20、　三角形內心與內切圓構圖--在圓盤模型與對應的其他模型上的圖形

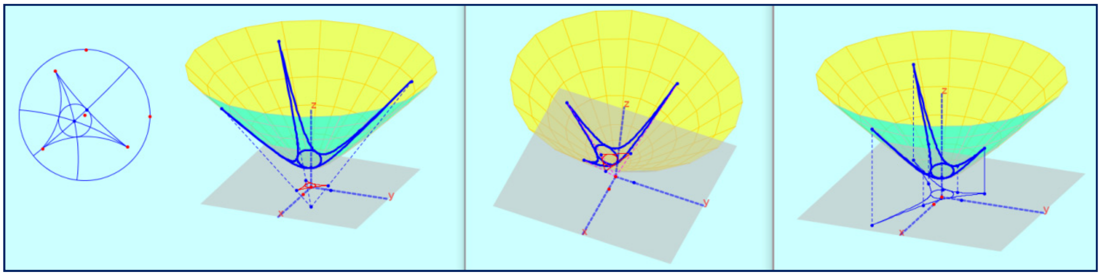


圖 21、圓盤模型、克萊恩模型、蓋恩思模型與雙曲面模型在 3D 中的對應關係

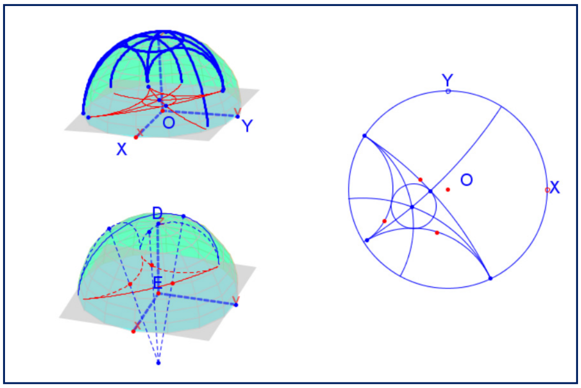
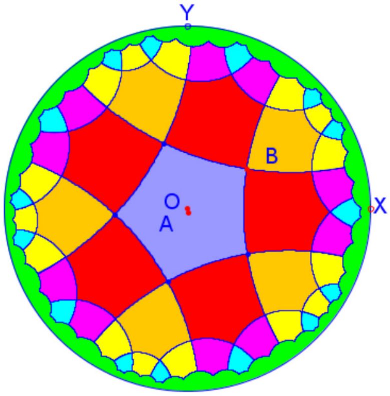


圖 22、圓盤模型與半球面模型在 3D 中的對應

伍、數學算板中雙曲剛體變換在拼圖上的應用

雙曲幾何中，正多邊形的「無縫隙」拼圖(tessellation,tiling)具有非常吸引人的內涵，Escher 是雙曲幾何拼圖的先驅，得到幾何學家 H.S.M.Coxeter 啟示，在 1959 年發表了系列的 Circle_LimitI—IV 雙曲幾何拼圖圖案，Coxeter 還發表文章確認其其數學正確性 （https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher）。歐氏幾何中，不論邊長，全等的正三角形、正方形、或正六邊形都可以拼排出無縫隙的平面。與歐氏幾何不同，能作雙曲幾何拼圖的 H 正多邊形邊長必須是特殊的值。數學算板提供了製作可拼圖的雙曲正多邊形、正 H 星形（此處指以雙曲正多邊形頂點為頂點，能一筆畫出且頂角最小的星形，頂點需為奇數）及藍伯特四邊形(Lambert quadrilateral)的選單。藍伯特四邊形是三個直角一個銳角的 H 四邊形，若其為鳶形，則夾銳角的兩邊相等，另兩邊也相等，此時它是可以拼圖的。

不同於一般的圓盤拼圖，數學算板正 H 多邊形或正 H 星形拼圖時，所用的 p 邊的正 H 多邊形其外接圓圓心不必一定是在圓盤圓的圓心，其頂點位置也是可以在外接圓上變動，因此作出的拼圖可以有不同的樣貌。圖 23 為展示{5,4}正 H 多邊形的拼圖，A 點為正五 H 多邊形中心，B 點是該正五邊形的外接圓上一動點，移動 A 點，整個拼圖會在雙曲空間內移動；移動 B 點，整個拼圖會以 A 點為中心旋轉。上下兩圖是同一個檔案，是 H 全等的拼圖，只不過改變 A、B 兩點的位置而已，上圖 A 點接近中心點，這是與一般正 H 多邊形拼圖類似的位置，若令 A 點與 O 重合，從歐氏幾何的觀點看，是中心對稱的；下圖改變 A，B 點的位置，從歐氏幾何觀點看，它並不對稱。兩圖在圓盤單位圓周圍的拼圖並未繼續作出來。同樣的，藍伯特鳶形的銳角頂的對頂也不必在圓盤的圓心，其銳角頂也是可以旋轉的。



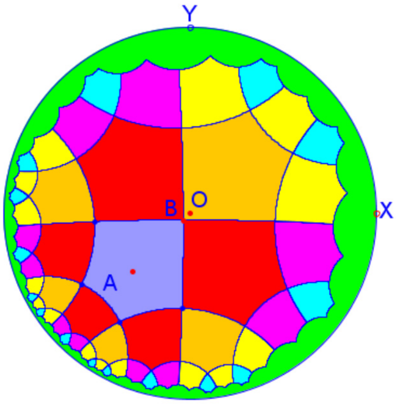


圖 23、H 全等的兩組正{5,4}多邊形的拼圖，下圖由於中心不是圓盤圓心，並非歐氏對稱

要作正 H 多邊形拼圖，可以使用 H 鏡射、H 旋轉或 H 平移，若使用 H 鏡射，需要選用一邊並標定為鏡射軸；若使用 H 旋轉，則需利用頂點標定旋轉中心，並指定固定角度（任意度量）或選取相鄰三個頂點標定旋轉角(歐氏幾何角)；若使用 H 平移，則需標定平移向量（注意：只有偶數邊的正 H 多邊形才可平移拼合)。

數學算板也透過 H 旋轉支援自動拼圖。雙曲空間中，「q 個正 p 多邊形可在某一點無縫隙拼合」的必要條件是「$(p-2)(q-2)>4$」，我們用{p,q} (*Schläfli symbol*)表示符合這個條件的「正 H 多邊形」。正 H 星形及藍伯特鳶形也是一樣，但正 H 星形頂點數 p 需為大於 3 的奇數。藍伯特鳶形由於直角頂可拼 4 個圖形，銳角頂度量為$\frac{2\pi}{q}$，可拼 q 個圖形，只要 q 值大於 4 即可。數學算板中，在「構圖 2」選單選取「可拼圖雙曲多邊形」中的選項（雙曲正多邊形、雙曲正星形、藍伯特鳶形）即可作出可拼圖雙曲多邊形。此時，程式會呈現對話框，要求輸入數對{p,q}或 q 值。若選取選單時，已選一個 H 點，程式會以此點為中心，作出外接圓半徑點(或藍伯特銳角頂點)，並據此作出可拼圖的上述三種多邊形。若此時沒有已選物件，程式會以圓盤中心為中心，作出外接圓半徑點(或藍伯特銳角頂點)。有了可拼圖的多邊形，就可以利用 H 鏡射或 H 旋轉，作拼圖。使用者只要選取一個前選項「可拼圖雙曲多邊形」製作的可拼圖正 H 多邊形(正 H 星形、或藍伯特鳶形)，並點選選項「雙曲正多邊形拼圖」中的「展示製作順序」或「可手動著色」選項，即可由電腦自動作出拼圖。使用者自行製作的可拼圖 H 多邊形，若程式無法辨識為上述三種之一，則無法由程式自動做拼圖，使用者需自行進行拼圖。自動拼圖之後，若選取的選項是「展示製作順序」時，程式會呈現兩個按鈕，按鈕「製作順序」是一個連續按鈕，連續按之可分段展示電腦拼圖過程及原理；按鈕「多邊形及內部」(與「多邊形」、「內部」輪換)可以讓電腦隨機自動塗色，

可只呈現未塗色的正 H 多邊形（或星形）、只內部塗色、同時呈現多邊形及內部塗色，但使用者無法改變正多邊形（或星形）內部顏色。若選取「可手動著色」選項，則程式只呈現內部塗色的拼圖（沒有附屬物件按鈕），但使用者可以點選各個正 H 多邊形（或星形）內部，改變其顏色。圖 24 及圖 25 展示的就是以{5,4}為例的正 H 多邊形電腦自動拼圖的製作順序及原理。

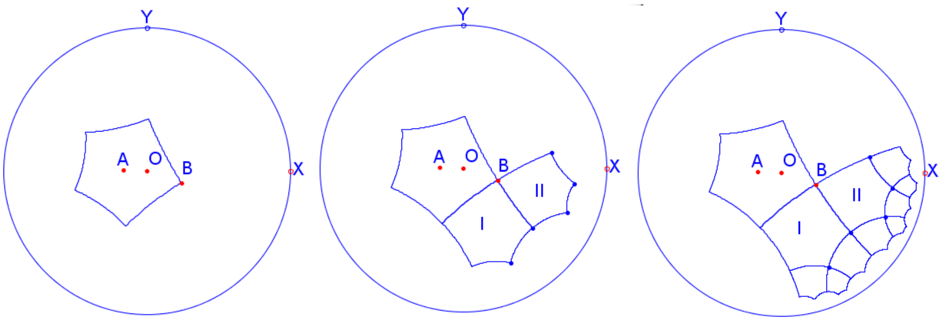


圖 24、左圖為{5,4}多邊形，中圖 I、II 是以 B 點為中心將原圖迭代旋轉 90 度兩次而得，右圖是分別將 I、II 分別對圖上標示的黑點迭代 H 旋轉而得

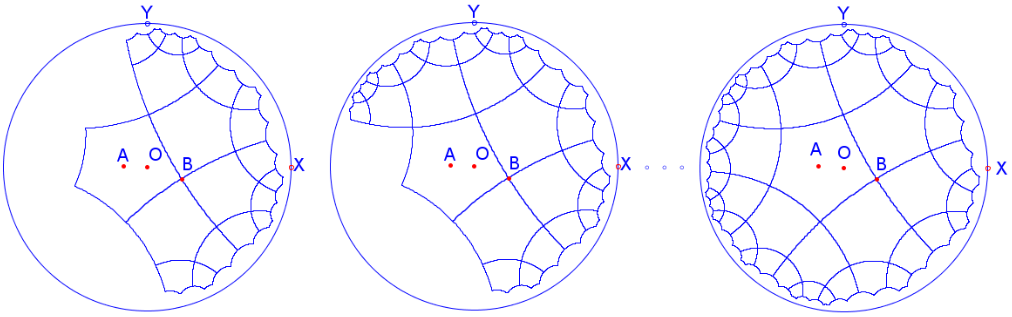


圖 25、將圖 24 右圖中原正 H 多邊形外其他正 H 多邊形，以 A 點為中心，迭代 H 旋轉 90 度 1 次、2 次、4 次之圖形

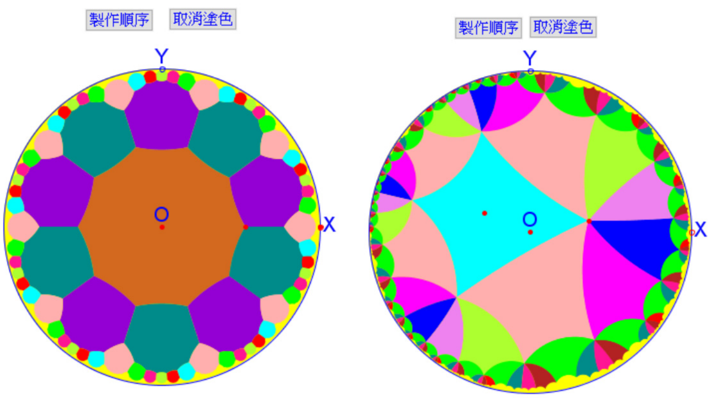


圖 26、正 H 多邊形{10,3}{4,7}的拼圖，左圖以圓盤圓心 O 為中心

數學算板也提供修飾正多邊形拼圖的功能，選擇「雙曲正多邊形拼圖」選項前，可選取一個以上的物件，第一個物件必須是雙曲正多邊形或雙曲正星形，第二個以上物件為以此雙曲正多邊形頂點或邊為親代的物件。若已選為一個物件（雙曲正多邊形或雙曲正星形）,程式會作正多邊形或正星形拼圖，並隨機自動塗色。若已選為一個以上的物件，程式會以正多邊形的頂點為基準（不作出多邊形），只作出其他的物件，再將所有物件依正多邊形拼圖之形式拼圖。圖 27 為展示正多星形的拼圖，是{5,4}及{7,4}正 H 多邊形修飾變化而來的。

圖 28 左圖是雙曲正五邊形{5,4}內切圓及頂點切圓的拼圖，其頂點切圓是內切圓拼圖後補入的。圖 28 右圖展示藍伯特鳶形(Lambert Kite)拼圖，是三個直角一個銳角的四邊形拼圖，本圖中，銳角的角度是 $\frac{2\pi}{7}$。若兩個藍伯特四邊形共用一個兩直角的夾邊，就構成一個薩克闕里（Saccheri）四邊形，若將圖 26 共用兩直角夾邊的兩藍伯特鳶形塗上相同的顏色，藍伯特鳶形的拼圖其實就是薩克闕里四邊形的拼圖。

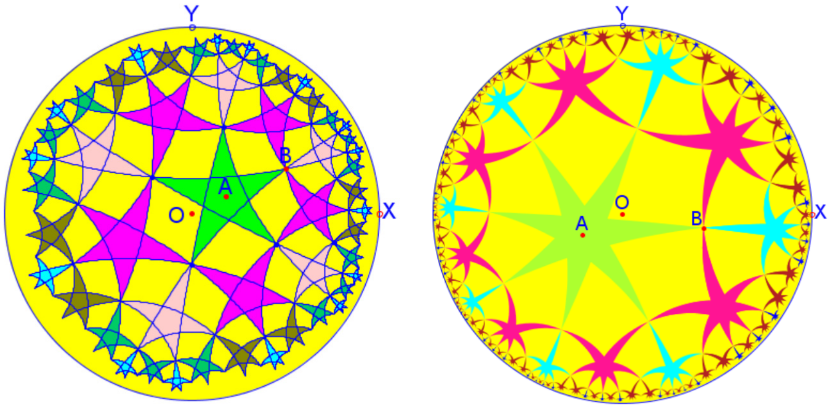


圖 27、正 H 五及七星形的拼圖，左圖同時呈現正多邊星形及內部塗色，右圖只呈現內部塗色，兩圖均以 A 為圖形中心

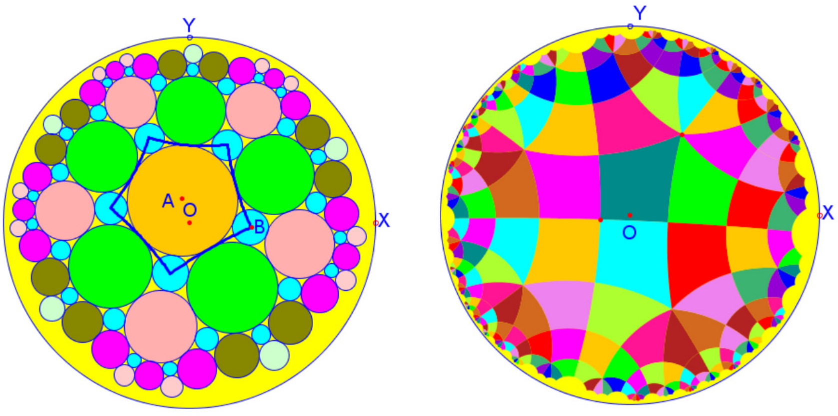


圖 28、左圖為雙曲正五邊形{5,4}內切圓及頂點切圓拼圖，右圖為藍伯特鳶形的拼圖

陸、結語

本文簡單介紹數學算板中雙曲幾何的基本構圖、剛體變換及其他相關變換，這些內建的基本構圖及變換可以迅速地製作雙曲幾何物件或將物件變換為其他結果物件，並呈現出來，可以幫助學習雙曲幾何的學生瞭解這些構圖及變換。對學生而言，如何由歐氏幾何構圖功能，一步一步地發展出這些雙曲基本構圖及變換的功能，是一個重要的探索挑戰。比較歐氏幾何及雙曲幾何中類似的定理，也是瞭解兩種幾何的重要方法，例如「不共線三點構成一圓」在雙曲幾何中，透過構圖及動態的觀察就很容易看出並不成立。數學算板也提供了不同模型展示雙曲幾何的構圖轉換，只要使用圓盤模型作圖之後，就可十分容易的將構圖結果轉換為其他模型的呈現，方便學生比較對照。對雙曲正多邊形、正星形、藍伯特鳶形（包含薩克闕里四邊形）的拼圖的功能，本文也做了一些討論，提供了實例，學生可以分步驟地觀察電腦拼圖的過程。學生自行建立基本圖形，透過雙曲變換，自行製作拼圖，也是一個有趣的活動。希望本文的介紹及數學算板提供的功能對雙曲幾何教學有所幫助。

柒、後記

本文發佈時，作者會將「數學算板測試版 1.0」置於網頁：http://mathboard.tw , 提供給有興趣的讀者下載測試。

參考書目

趙文敏（民 86）幾何學概論，九章出版社。

Coxeter , H.S.M. (1997). The trigonometry of hyperbolic tesselations, In *Canad. Math. Bull*. 40 (1997) pp.158–168.

Cannon, J. W. , et. al. (1997). Hyperbolic Geometry. In Flavors of *Geometry* , MSRI Publications Volume 31, 1997.

Coxeter H.S.M. (1997). The trigonometry of hyperbolic tesselations, In *Canad. Math. Bull*. 40 (1997) pp.158–168.

Gans, David (1966). A New Model of the Hyperbolic Plane. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 73, Issue 3, March 1966.

Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, 3rd Edition, New York: W. H. Freeman and Co.

Kinyon, M.K. and Ungar, A.A., (2000). The Gyro-Structure of the Complex Unit Disk, *Mathematics Magazine*, 73 (4), 273-284.

Reynolds, William F. (1993). Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid, The *American Mathematical Monthly* ,Vol. 100, No. 5 (May, 1993), pp. 442-455.