一些常見的結不變量

孫維民* 譚克平

國立臺灣師範大學 科學教育研究所

壹、前言

結理論(knot theory)主要是研究如何將各式各樣的結分類，即給定兩個結，探討該如何判斷它們在實質上是否可視為是同一個結的問題。直觀上我們可以用實際打結的方式，直接用繩子打出兩個結後，試著將其中一個結的某條曲線段作任意變形的動作，看是否能變形成另一個結。但這樣的實作方式，即使在嘗試了很多次後，發現這個結無法變形成另一個結，也不能肯定這兩個結是不相等的。數學上常利用的方法，是應用 Reidemeister 定理，首先在分別代表這兩個結的兩個結圖之間找到一組 Reidemeister 移動的組合(簡稱 R 移動組合)、並判斷這兩個結圖是相等後，再推得其所代表的兩個結亦相等。但實務上此方法仍然不容易進行，原因是如果這兩個結圖比較複雜，實際上在測試時，也只能像前述實際打結操作方式，藉由不斷嘗試用 Reidemeister 移動來測試這兩個結圖之間是否存在一個 R 移動組合，可以將其中一個結變形成為另一個結，實務上並無一定判準來決定這個 R 移動組合是否存在(孫維民與譚克平，2017)。為提供更有效判斷兩個結是否相等的方式，數學家常利用結不變量(knot invariant)的概念來進行判斷。但由於結有很多不同的類型，目前尚未找到一個萬能的結不變量，可以用來判斷任意兩個結是否相等，因此目前在相關文獻中，可以找到若干個不同的結不變量的概念，各有其優、缺點及適用範圍。以下本文會先介紹一些需要用到的符號，接著引進一些結不變量的概念及例子，最後再提供一些題目給有興趣的讀者練習及思考，從中學習數學推理。

貳、符號定義

一、結(或鏈)的賦向(orientation)及交叉點(crossing point)類型

什麼是結(或鏈)的賦向?以結為例，簡單來說，就是在結上給出一個固定方向，這個固定方向即為結的賦向。在此定義下，我們可以把結想像成一條有固定方向的道路，若某人從這條道路上的某個點出發，依照這個方向沿著道路一直走，最後一定會回到原出發點。同理，由於鏈是有限個互不相交的結的集合體，所以一個鏈的賦向是由組成這個鏈的數個

*為本文通訊作者

結的賦向所決定。習慣上我們會在結圖的某條曲線段上畫上箭頭表示這個結的賦向，並稱此圖為有向結圖(oriented knot diagram)。以三葉結為例，它其中一個賦向可參考圖 1 所示。

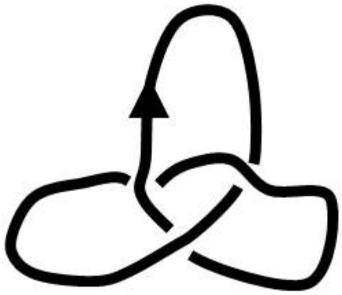


圖 1、三葉結的賦向

圖 1 中關於交叉點等圖例的定義，可參考孫維民與譚克平(2017)中的說明。

今給定一個結的有向結圖，我們可以依照圖中箭頭方向及一些規則，將該圖中各個交叉分為兩種不同類型的交叉點。舉例來說，若 A 點是由甲、乙兩曲線段所形成的交叉點，判斷 A 點是哪種類型交叉點的規則如下：

(1) 將 A 點上方的曲線段依逆時針方向旋轉，若第一次碰到下方曲線段時恰巧兩曲線段的箭頭重合，則稱 A 點為＋1 類型交叉點。

(2) 將 A 點上方的曲線段依順時針方向旋轉，若第一次碰到下方曲線段時恰好兩曲線段箭頭重合，則稱 A 點為－1 類型交叉點。

這兩種類型交叉點的圖例如圖 2 所示，其中圖 2(a)的交叉點為＋1 類型，圖 2(b)的交叉點為－1 類型。

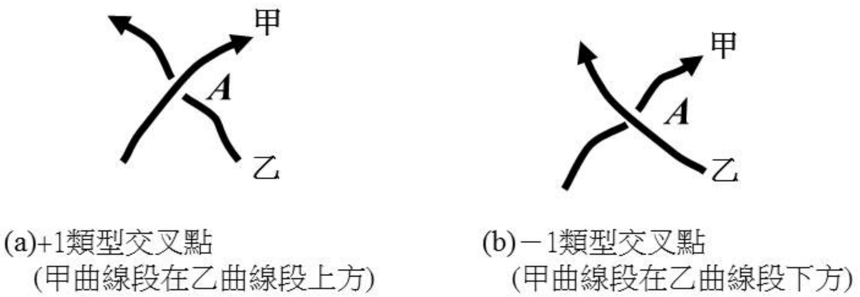


圖 2、＋1、－1 兩種類型交叉點

依照上述規則，我們可以把有向結圖中的每個交叉點分別歸類為＋1 類型或－1 類型交叉點，並應用於接下來所探討的某些結不變量上。若以函數 ϵ 表示某結圖中各個交叉點

的類型與＋1、－1 兩個常數之間的對應關係，則可用數學式子表示如下。

$$\epsilon(A)=\begin{cases}1\ ,若A點是\ +1\ 類型交叉點\\-1\ ,若A點是\ -1\ 類型交叉點\end{cases}$$

二、弧(arc)

由結圖形成的原理可知，結圖中的任何一個交叉點都是由上方曲線段與下方曲線段所形成的視覺上的交點，事實上兩曲線段並沒有真正相交，只是上方曲線段在視線方向部分遮蓋了下方曲線段，而弧(arc)是表示圖中任兩個相鄰下方交叉點之間的曲線段 (孫維民與譚克平，2017；Adam, 2004)。為了方便讀者更理解弧的定義，我們將結圖中的部分圖形以灰色線表示，如圖 3(a)所示。若 A、B 兩點是此圖中的兩個交叉點，我們以A'、B'表示 A、B 兩點於下方曲線段上的相對位置，這兩個點之間的曲線段即為弧，如圖 3(b)所示。

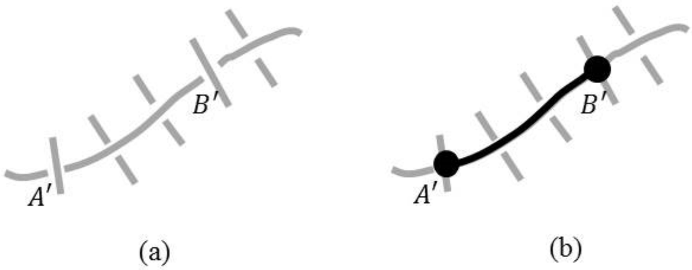


圖 3、(a)某結圖的部分圖形　(b)弧

參、將結(或鏈)分類的方法--結不變量

不變量是數學上非常重要的概念之一，它表示在某一組數學研究的對象(mathematical objects)中，如果它們具有相同的特徵或性質，則通常可以依照這些特徵或性質建立一些特殊的函數，使得當這些函數應用在這一組數學對象上，將會得到相同的值。若將此概念應用於數學結之上，我們可以根據同類型結中的特定性質整理出一個函數，當我們遇到一個新的結時，可將先前整理的函數應用在新的結上，若所求出的值與應用在該類型結是相同的，據此可以判斷對於該性質而言，新的結可歸入該類型結之內，稱這個值是該類型結的一個結不變量(楊樹文，2001; Murasugi, 1996)。

以數學符號表示，給定同類型的任意兩個結K、K^*，函數 f 表示作用在結上的特定規則，$f(K)$表示以特定規則作用在結 K 後所得到的值，若$f(K)=f(K^*)$，稱這個值是一個結不變量。但請注意，用這樣的方式所求出的值不一定是數字，也可能是顏色、多項式等符號。另外，這兩個結只是相對於該函數而言是同類的，在其他方面不見得也是同類的。

要如何找出函數 f ？通常我們可先制定作用在結圖或鏈圖上的特定規則後，再分別

用此規則求出作用在原結圖及經由三型 Reidemeister 移動(以下簡稱 R 移動)後的新結圖，若所得到的兩個量相等，則 f 就是上述所謂的特定規則，而利用 f 作用在結圖後所得到的量即為前述的不變量，這個不變量也是此圖所代表的結的結不變量(Livingston, 1993)，原因是依據 Reidemeister 定理，若D_i、D_{j^*}分別是結 K、K^* 的結圖，兩個結K、K^*相等的充分必要條件是在D_i、D_{j^*}之間可找到一個 R 移動組合，使得D_i可變形成D_{j^*}。因此，雖然一個結會有若干個不同的結圖，但若已求得其中某個結圖的不變量後，這個結的其他所有結圖都會具有此不變量。關於 R 移動的介紹，可參考孫維民與譚克平(2017)及 Adam(2004)的說明。

我們可依照上述方式來判斷兩個結是否相等。判斷方式是先找出 f 後，將其作用在給定的兩個結的結圖，若得到的兩個量不相等，則由結不變量的定義可知這兩個結是不相等的。但如前所述，若給定的兩個結圖皆具有某個不變量，並不代表它們所代表的結是相等的，因為依特定規則分別求出作用在兩個不同的結之上，只要它們具備對應於該特定規則的性質，所得到的兩個量也有可能是相等的，即便如此，這些不變量仍可協助我們瞭解結部分的性質。以下我們介紹三種相對簡單的不變量，它們皆是以數值或顏色來表示的結不變量或鏈不變量，為了方便閱讀，我們將沒有經過 R 移動的原始結圖(或鏈圖)記為 D，而將 D 經過某類型 R 移動組合後所得到的新結圖(或新鏈圖)記為D^*。

一、鏈結數(linking number)

鏈為有限個互不相交的結的集合，其中每個結稱為這個鏈的分支(component)，且組成此鏈的結的個數稱為這個鏈的分支數。例如，鏈 L 是結K_1、結K_2、...、結K_n等 n 個互不相交的結的集合，對任意 i 而言，結K_i皆是鏈 L 的分支，稱鏈 L 的分支數為 n。那什麼是鏈 L 的鏈結數$lk(L)$呢？讀者可先回顧前述交叉點類型的說明，鏈結數是將代表鏈 L 中由任意兩個K_i、K_j結所形成交叉點的類型的數字相加後，再除以 2 所得到的值。注意，該定義只聚焦於任意兩個結所形成的交叉點，單一個結的曲線段所形成的交叉點並不牽涉在內。由此可知，當我們要計算$lk(L)$時，可先判斷鏈 L 中的任意兩個結K_i、K_j所形成的交叉點後，再計算$lk(L)$。若將結K_i、結K_j所形成的鏈的鏈結數記為$lk(K_i, K_j)$，則$lk(L)$為所有$lk(K_i, K_j)$的總和。以數學符號來表示，若組成鏈 L 中的任兩個結K_i、K_j所形成的鏈的鏈結數為$lk(K_i, K_j)$，則鏈 L 的鏈結數$lk(L) = \sum_{i<j} lk(K_i, K_j)$，$\forall 1 \le i, j \le n$ (Cromwell, 2004)。

在實務上，我們可以先探討$n = 2$的情況，在求出$lk(K_1, K_2)$後，再以類似的方式求出其他兩個結的組合，最後求出$lk(L)$的一般式，也可以從探討過程中得知所有的$lk(K_i, K_j)$皆為整數，進而推得$lk(L)$亦為整數。當$n = 2$時，若鏈 L 是結K_1、K_2兩個互不相交的結的集合體，設 D 為鏈 L 的有向鏈圖，另設D_1、D_2分別是結K_1、K_2的有向結圖，即$L = K_1 \cup K_2$，

$D=D_1 \cup D_2$。若鏈圖 D 中的某個交叉點為 A 點，則 A 點的位置可能在 D_1、D_2、或在 $D_1 \cap D_2$ 上。由定義可知，我們只需要選定在 $D_1 \cap D_2$ 上的交叉點，並依據結 K_1、K_2 的賦向分別判斷 $D_1 \cap D_2$ 上的每個交叉點的類型後，把代表交叉點類型的+1 或 -1 數字相加後除以 2，即為鏈結數。若以 $lk(L)$ 表示鏈 L 鏈結數，則 $lk(L)=\frac{1}{2}\sum_{c\epsilon D_1 \cap D_2} \epsilon(c)$。以下先舉一個簡單的例子，若圖 4 是鏈 L 的鏈圖，則鏈 L 的鏈結數=(+1+1)÷2=1。

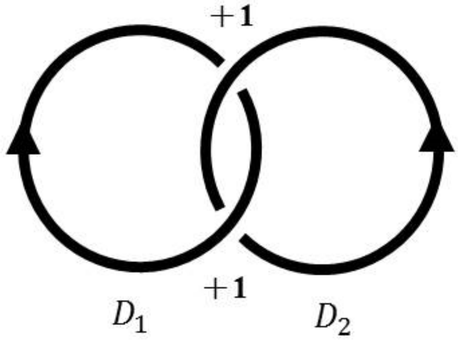


圖 4、鏈 L 的鏈圖 D

茲再以下述比較複雜的 n=2 的鏈圖為例，圖 5 是某個分支數為 2 的鏈 L 的有向鏈圖，為了方便閱讀，我們分別用黑、灰兩種不同顏色的線來表示組成鏈 L 的 2 個結。

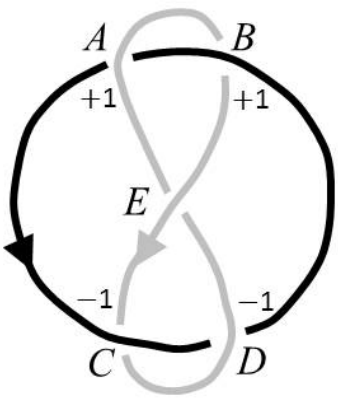


圖 5、分支數為 2 的鏈 L 的有向鏈圖

觀察圖 5 中的 5 個交叉點可知，A、B、C、D 四個點分別由兩個結中的某段弧所形成，而 E 點卻是由單一個結中的某兩段弧所形成，由定義可知，在計算鏈 L 的鏈結數時，E 點可以排除不用考慮，故鏈 L 的鏈結數 $lk(L)=[\epsilon(A)+\epsilon(B)+\epsilon(C)+\epsilon(D)]\div 2=[(+1+1+(-1)+(-1)]\div 2=0$。

至於為什麼鏈結數是一個鏈不變量，以下僅提供針對鏈結數是 2 分支鏈的證明，推論的過程如下：

(1) 對 D 進行第一型 R 移動

在第一型 R 移動下，假設所得的鏈圖為D^*，它會比原來的鏈圖 D 增加或減少一個交叉點，而這個增加或減少的交叉點可能在D_1或D_2上，但不會在$D_1 \cap D_2$上，故$lk(D) = lk(D^*)$。

(2) 對 D 進行第二型 R 移動

在第二型 R 移動下，假設所得的鏈圖為D^*，它會比 D 增加或減少兩個交叉點。這是因為當 D 進行此移動時，形成新交叉點的兩弧位置可能會是兩弧都在D_1上、兩弧都在D_2上、或兩弧分別在D_1、 D_2上等三種情況。若是第一、二種情況，鏈結數明顯不會改變，故僅就第三種情況證明。在不失一般性的情況下，圖 6 表示對D_1、D_2中各一段子弧進行第二型 R 移動後，其增加或減少的兩個交叉點，弧的箭頭是依照結K_1、K_2的賦向所決定。由交叉點類型的判斷規則可知，這兩個交叉點分別是+1 與-1類型交叉點，且+1+(-1)=0，故雖然D^*增加兩個交叉點，但這兩個增加的交叉點並不會影響D^*的鏈結數的值。同理，若是減少兩個交叉點，我們仍然可以得到鏈結數沒有改變的結果，故$lk(D) = lk(D^*)$。

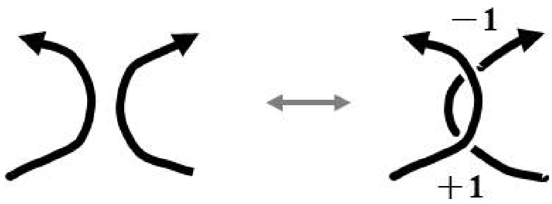


圖 6、第二型 R 移動不影響鏈結數

(3) 對 D 進行第三型 R 移動

圖 7 表示 D 中甲曲線段經過第三型 R 移動後的情況。設D_1與D_2為代表組成鏈的兩個結K_1與K_2的結圖，圖中若甲、乙、丙三條曲線段同屬於D_1或D_2，則由鏈結數的定義，鏈結數會保持不變，故接下來僅需考慮在不失一般性的情況下，這三條曲線段中乙、丙屬於D_1，甲屬於D_2，由於圖 7 (a)中的兩個-1類型的交叉點經過第三型 R 移動後，這兩個交叉點仍然是-1類型交叉點，同理，圖中+1 類型交叉點仍然維持是+1 類型交叉點，故鏈結數保持不變。其餘情況可用類似方式證明。

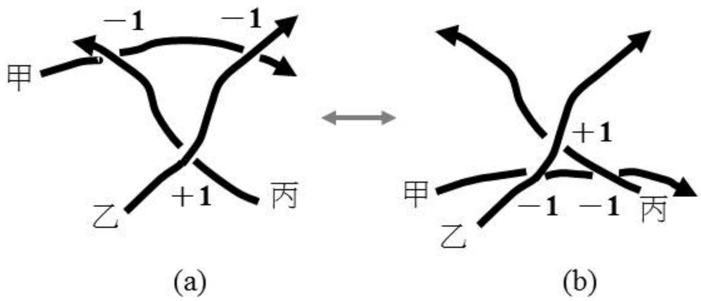


圖 7、第三型 R 移動不影響鏈結數

因此，我們得到了當$n = 2$時，$lk(L) = lk(K_1, K_2)$是鏈不變量。由於有 n 個分支的鏈的鏈結數$lk(L)$得自各個$lk\left(K_i, K_j\right)$的總和，其中所有 i 與 j 都符合$1 \leq i < j \leq n$ 的條件，且任兩個分支的鏈的鏈結數是鏈不變量，故此透過類推的方式證明 n 分支鏈 L 的$lk(L)$也是鏈不變量。但請注意，若兩個鏈圖的鏈結數相同，並不表示這兩個鏈圖所代表的鏈相等。例如，圖 8 是顯然鏈(trivial link)與懷特海鏈(Whitehead link)兩個有向鏈圖，分別計算其鏈結數後，可得到兩者的鏈結數皆為 0，但顯然鏈與懷特海鏈是兩個不同的鏈。

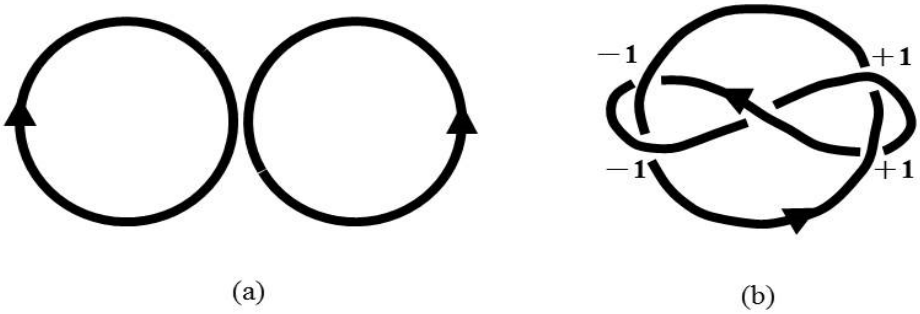


圖 8、鏈結數皆為 0，但不相等的兩個鏈

二、三色性(tricolorability)

什麼是三色性？給定一個結圖 D 與紅、藍、綠三種顏色，假設我們要在 D 中的各段弧上各塗一種顏色，塗色規則如下：

(1) 從三種顏色中任選一種顏色塗在每段弧上，不同弧上所塗的顏色可重覆選擇。

(2) 對於整個結而言，最少要用超過兩種以上的顏色塗色。

塗完色後，接下來需要檢查結圖中圍住每個交叉點的弧的塗色結果，若每個交叉點不是被同色、就是被三種顏色的弧圍住，且至少有一個交叉點被三種不同顏色的弧圍住，稱此結圖有三色性，若一個結的任一個結圖皆有三色性，則稱這個結有三色性(Livingston, 1993)。例如，圖 9 中有兩個結圖，為了方便閱讀，我們分別以黑、灰、淺灰三種不同顏

色且粗細不同的弧表示三段塗上紅、藍、綠三色的弧，讀者可檢視這兩個圖中的各個交叉點，不是被同色、就是被三種顏色的弧圍住，且兩個圖中都至少有 1 個交叉點被三種不同顏色的弧圍住，故圖 9 中的兩個結圖皆有三色性。

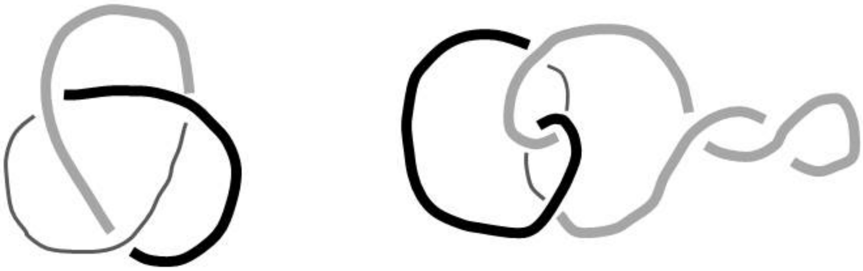


圖 9、兩個有三色性的結圖

以下我們用類似證明鏈結數是鏈不變量的方式，透過討論三型 R 移動作用在鏈圖上前後的變化，藉此證明三色性是結不變量。為了方便讀者閱讀，我們在證明過程及圖中分別用甲、乙、丙、…等字表示結圖中的弧，由於移動前、後的證明方式類似，都是要考慮如何在包圍交叉點的弧上塗色，為了節省空間，以下我們只證明第一、二類型 R 移動後增加交叉點，及第三類型 R 移動後的情況。

(1) 對 *D* 中的甲弧進行第一型 R 移動

在此情況下，移動後所形成的新交叉點是由甲弧演變出來的乙、丙兩弧所圍出來的，如圖 10 所示。

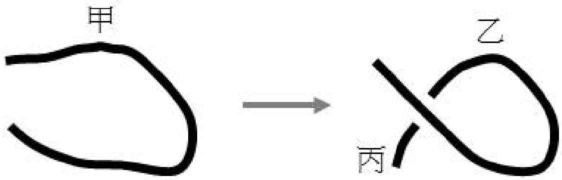


圖 10、第一型 R 移動

由於產生了乙、丙兩個新的弧，且必須按照三色性的塗色規則為乙、丙兩弧塗上顏色。首先，若將乙、丙兩弧塗上甲弧原來的顏色，則D^*就會符合三色性的要求。其次，如果將乙、丙兩弧塗上不同於原甲弧的顏色，即乙、丙兩弧各自塗一種上不同的顏色，這樣的塗色法並不滿足三色性塗色規則的要求，因為三色性要求塗色後每個交叉點不是被同色就是被三種顏色的弧圍住，而乙、丙弧僅能塗上兩種顏色。綜合來說，只有將乙、丙兩弧塗上甲弧原來的顏色才會符合三色性的塗色規則，而這樣的塗色法不會改變原來結圖所具備的三色性。

(2) 對 D 中的甲、乙兩弧進行第二型 R 移動

將原來乙弧移動後，形成丙、丁、戊三段弧，且產生了 A、B 兩個新的交叉點，以下依照結圖 D 中甲、乙兩段弧及移動後結圖 D^* 中的丙弧顏色是否相同作為考量點，可分為以下四種情況作進一步的討論。

(i) 甲、乙、丙三弧同色

考慮圍成 A 點的甲、丙、丁三條弧，如果我們將丁弧塗上跟甲、丙弧相同的顏色，另外又將戊弧塗上與甲、丁弧相同的顏色，如圖 11 所示，則此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

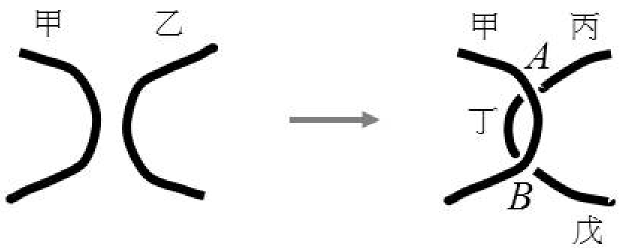


圖 11、丙、丁、戊弧的顏色與甲弧相同

(ii) 甲、乙兩弧同色，乙、丙兩弧不同色

考慮圍成 A 點的甲、丙、丁三條弧，如果將丁弧塗上跟甲、丙弧皆不同的顏色，另外又將戊弧塗上跟甲、丁弧皆不同的顏色，如圖 12 所示，則此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

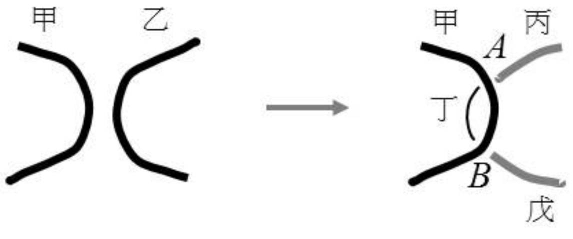


圖 12、丙、丁、戊弧的顏色與甲弧不同

(iii) 甲、乙兩弧不同色，乙、丙兩弧同色

考慮圍成 A 點的甲、丙、丁三條弧，如果將丁弧塗上跟甲、丙弧不同的顏色，另外又將戊弧塗上跟甲、丁弧不同的顏色，如圖 13 所示，此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

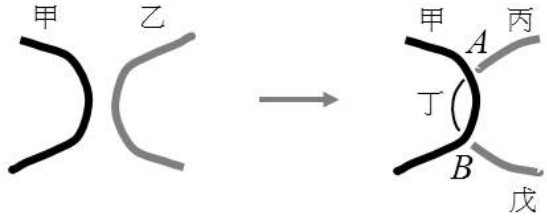


圖 13、丙、丁、戊弧的顏色與甲弧不同

(iv) 甲、乙、丙三弧不同色

考慮圍成 A 點的甲、丙、丁三條弧，如果將丁弧塗上跟甲、丙弧不同的顏色，另外又將戊弧塗上甲、丁弧不同的顏色，如圖 14 所示，此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

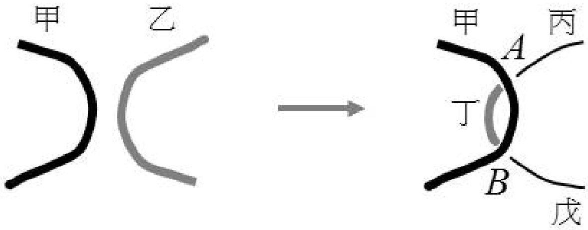


圖 14、丙、丁、戊弧的顏色與甲弧不同

綜合上述(i)、(ii)、(iii)、(iv) 各種情況可知，如果結圖 D 具有三色性，結圖D^*亦具有三色性。

假設N_1、M_1、M_2三點為 D 中的三個交叉點，由於三條弧有很多不同的相對位置，另外結圖 D 中各條弧所塗顏色有很多種符合三色性規則的情況，且我們主要目的在證明D^*具有三色性，因此為了簡化討論，在不失一般性的情況下，以下只討論將過M_1、M_2兩點的曲線段從N_1點下方滑動經過N_1點後，形成了M_3與M_4兩個新的交叉點，並探討D^*是否具有三色性。我們分別依圍住M_1、M_2、N_1三點的甲、乙、丙、丁、戊、己這六段弧顏色的三種不同情況，進而討論如何將圍住M_3與M_4兩個點的庚、丙、辛、甲、壬這五段弧塗色。至於其餘情況，例如當三條曲線段在不同相對位置之下其三色性的討論，建議有興趣的讀者可以用類似方式自行推導。

(i) 移動前甲、乙、丙、丁、戊、己六弧同色

先將移動後的庚弧塗上與丙弧相同的顏色，再將辛弧塗上跟丙弧相同的顏色，最

後把壬弧塗上跟甲弧相同的顏色，結果如圖 15 所示，此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

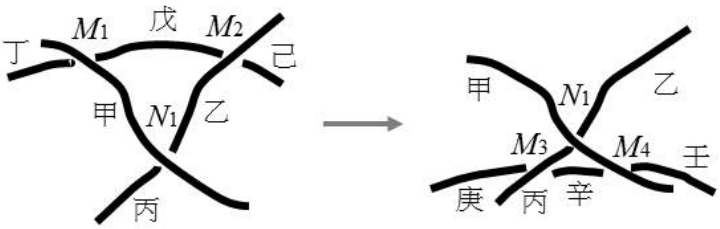


圖 15、庚、辛、壬三弧同色

(ii) 移動前甲、乙、丙三弧同色，丁、戊、己三弧跟甲弧不同色

先將移動後的庚弧塗上與丙弧不同的顏色，再將辛弧塗上跟庚、丙兩弧不同的顏色，最後把壬弧塗上跟辛、甲兩弧不同的顏色，結果如圖 16 所示，此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

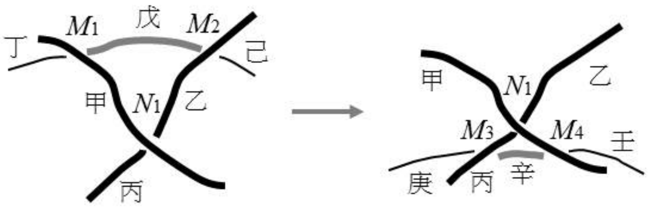


圖 16、庚、壬兩弧同色，且跟甲、辛兩弧不同色

(iii) 移動前甲、乙、丙三弧不同色，且甲與己、乙與丁、丙與戊兩弧兩兩同色

先將移動後的庚弧塗上與丙弧不同的顏色,再將辛弧塗上跟庚､丙兩弧不同的 顏色，最後把壬弧塗上跟辛、甲兩弧不同的顏色，結果如圖 17 所示，此塗色法符合三色性的塗色規則，不會改變原來結圖所具備的三色性。

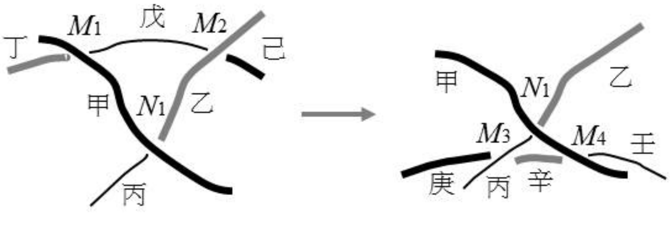


圖 17、庚、辛、壬三弧不同色，且庚弧跟甲弧同色

綜上所述，我們證明了三色性也是一個結不變量。雖然三色性對於分辨各種類型的結的效果並不明顯，但它仍有其價值，例如我們可利用三色性來判斷三葉結與顯然結是不相等的結。理由是因為三葉結的結圖有三色性，而顯然結的結圖沒有三色性。請注意，若兩個結圖皆沒有三色性，並不代表這兩個結圖所代表的結相等。例如；八字結的結圖與顯然結的結圖皆不具有三色性，但八字結與顯然結並不相等。

三、非結數(unknotting number)

已知 D 是結 K 的結圖。若選取 D 中某些交叉點並改變其交叉點的類型(crossing switch)後形成一個新結圖，則此新結圖所代表的結可能是顯然結。例如：圖 18(a)是有 7 個交叉點的結圖，若選定(a)中的一個交叉點 A 並改變其類型後，原來的 A 點變為 A' 點，並形成一個新結圖(b)，不難發現(b)圖所代表的結是顯然結。

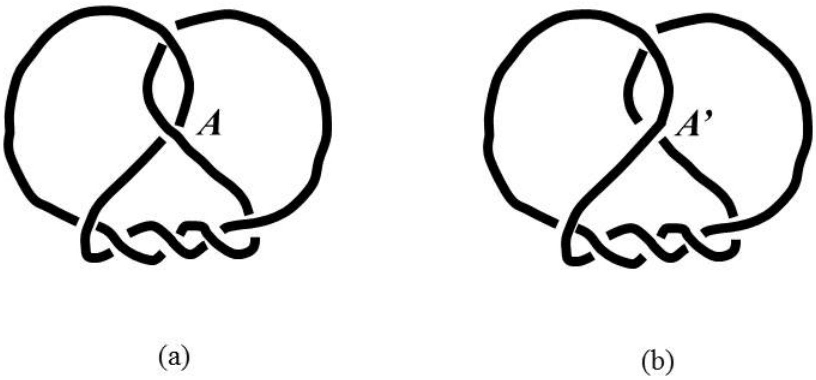


圖 18、改變 A 點類型的示意圖

將一個結圖中某些交叉點的類型改變後，會形成一個新結圖，有些時候新結圖所代表的結會是顯然結，我們稱改變交叉點原有類型的次數為該結圖的非結數，而該結的非結數就是取這個結所有結圖非結數的最小值，例如：圖 18 的結的非結數為 1。以符號來表示，已知 K 是一個結，D 是 K 的結圖，今改變 D 中 n 個交叉點的類型後，形成一個新結圖D^*，且D^*所代表的結是顯然結，則稱 n 為 D 的非結數，將 n 記為$u(D)$，且結 K 的非結數$u(K)$定義為所有$u(D)$中的最小值，即$u(K) = \min_D u(D)$ (Adams, 2004; Murasugi, 1996)。

由定義不難證明$u(K)$在三型 R 移動下皆保持不變，故$u(K)$是另外一個結不變量。但一般而言，要計算$u(D)$是頗為困難的，因為沒有直接方法判斷該如何挑選 D 中的哪幾個交叉點並改變其類型後，所形成的新結圖是代表顯然結。

至於應用方面，我們可以利用非結數判斷兩個結是否相等，例如，顯然結的非結數是

0，三葉結的非結數是 1，故顯然結與三葉結不相等。此外，$u(K)$ 除了是一種結不變量以外，近期在生物化學中探究酶(enzyme)作用在去氧核醣核酸(deoxyribonucleic acid, DNA)後所形成新的 DNA 是否跟原來的 DNA 相同，以結理論的觀點來看此問題，基本上可將各種不同類型的 DNA 視為一些結，而某種特定酶作用在 DNA 後，會改變原來 DNA 中某些交叉點的類型形成一個新的 DNA，要如何判斷新 DNA 跟原 DNA 是否相同的問題。由於相關理論已超過本文探討範圍，建議有興趣的讀者可參考 Sumners(1996, 2011)文章中的相關內容。

肆、結不變量的應用

本節我們將應用上節結果來判斷某一些量是不是結不變量，及區辨兩個結是否相等。讀者可以先自行思考試答後，再參考我們提供的答案，相關問題如下：

問題 1. 已知 K 是一個結，D 是結 K 的一個結圖。若定義 $A(K)$是 D 中所有弧的總數量，則 $A(K)$是否是結不變量?

參考解答：

若 D 經過三型 R 移動前後，弧的總數量保持不變，則這個量可視為是結不變量。由弧的定義可知，D 在經過某一型 R 移動後，弧的總數量會增加。以五星結為例，圖 19 是五星結結圖 D 與其經過第二型 R 移動後所形成的新結圖D^*，故 $A(D)$=5，$A(D^*)=7$，兩者不相等，故 $A(K)$不是結不變量。

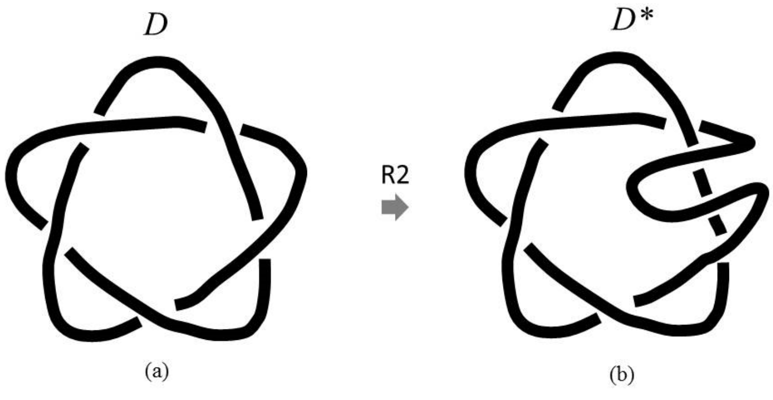


圖 19、(a)五星結結圖 D　(b) D 經由第二型 R 移動後變成D^*

問題 2. 圖 20 是交叉點數量分別為 4 與 6 的兩個結圖。以三色性判斷這兩個結圖所代表的結是不相等的。

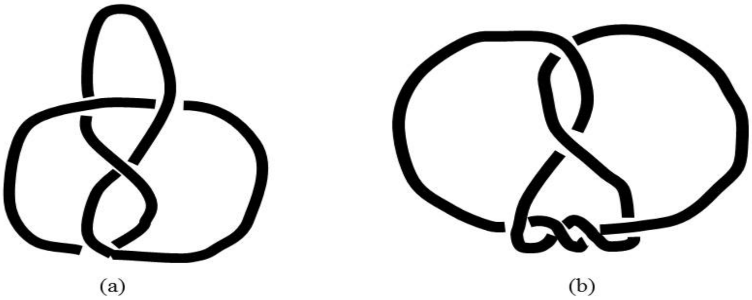


圖 20、交叉點數量分別為 4 與 6 的兩個結圖

參考解答：

根據三色性的定義，分別選定一個交叉點並以三種顏色開始塗色，可發現圖 20(a)不具有三色性，而圖 20 (b)具有三色性，為了方便閱讀，分別以黑、灰、淺灰三色粗細不一的弧來表示這三段分別被塗上紅、藍、綠三種顏色的弧，如圖 21 所示。據此判斷，這兩個結圖所代表的結並不相等。

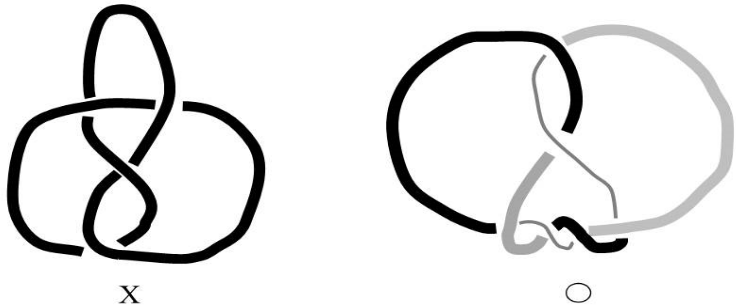


圖 21、交叉點數量分別為 4 與 6 的兩個結圖

問題 3. 已知鏈 L 是一是分支數為 2 的鏈，今同時將 L 中的所有分支改變其賦向後，形成一個新的鏈L^*，如圖 22 所示。計算鏈 L 與鏈L^*的鏈結數。

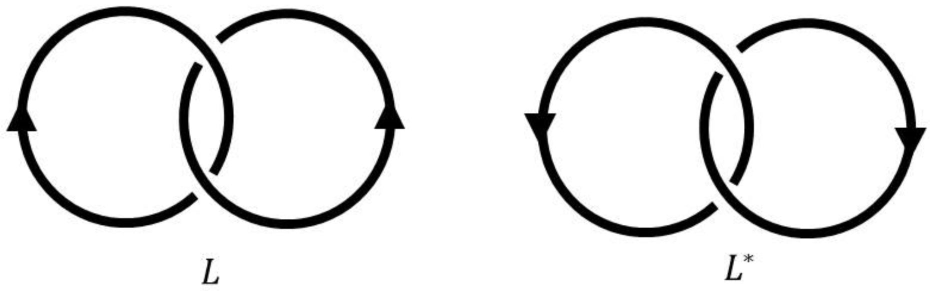


圖 22、兩個賦向相反的鏈圖

參考解答：

依照鏈結數的定義，可得鏈 L 的鏈結數$=(-1-1)\div 2=-1$，鏈L^* 的鏈結數 $=(-1-1)\div 2=-1$。

問題 4. 若鏈 M 是一個是分支數為 2、鏈結數為 a 的鏈，今同時將 M 中的 2 個分支改變其賦向後，形成一個新的鏈M^*，且鏈結數為 b，試證明 a=b。

參考解答：

由題意可知，同時將鏈 M 的 2 個分支改變賦向後，其交叉點皆維持原有類型，故 a=b。前述第三題即為此性質的一個例子。

伍、討論

由以上的例子可知，雖然結不變量是研究結時常用的工具，且通常是由結圖的特性定義出特定規則後，接著經過計算後所得到的量，但除了要符合作用在三型 R 移動前後所求得的值不變的條件外，在實際操作中，要如何判斷一個結圖是否具有某不變量時，有些時候是相當困難的。例如：當讀者嘗試將圖 20(b)塗色測試其是否具有三色性時，塗了很多次都不符合，但這並不意味著下一次的塗色無法成功。這反映出雖然利用結不變量能進一步處理結分類問題，但在實際找出規則或是利用已知的結不變量計算時仍是充滿挑戰的。

在上文中，我們介紹了三個在處理結分類問題時常使用的不變量，它們卻各自有其限制，到目前為止，還沒有找到一個結不變量可以無誤地判斷任何兩個結是否相等。雖然三色性跟非結數都是結不變量，但由結不變量的定義可知，當我們利用三色性或非結數等結不變量判斷出兩個結的結圖都具有此結不變量時，並不代表這兩個結是相等的。以三葉結、八字結、五星結等三個不一樣的結為例，當我們判斷它們是否具有三色性及其非結數的值為何時，可整理出如圖 23 所示的結果。

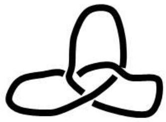
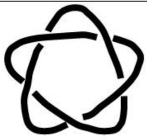
結的名稱	結圖	是否具有三色性	非結數的值
三葉結		是	1
八字結		否	1
五星結		是	2

圖 23、三種結是否具有三色性及其非結數的值

由上圖可知，三葉結與五星結具有三色性，八字結卻沒有，且三葉結與八字結的非結數的值等於皆為 1，而五星結的非結數的值卻等於 2，是故，產生此現象的原因在於結不變量只是判斷兩個結是否相等的必要條件，而非充分條件。因此，在使用結不變量來判斷兩結是否相等時，當兩個結皆具備某個結不變量時，仍需留意這並不代表這兩個結必定相等，還需要考慮其他結不變量的情況。

在結理論中，常利用圖代表鏈或結，然而從所給定的圖形中，有時很難直觀判斷其所代表的是鏈還是結。例如讀者可嘗試判斷圖 24 中的兩個圖分別是代表一個鏈或是一個結。

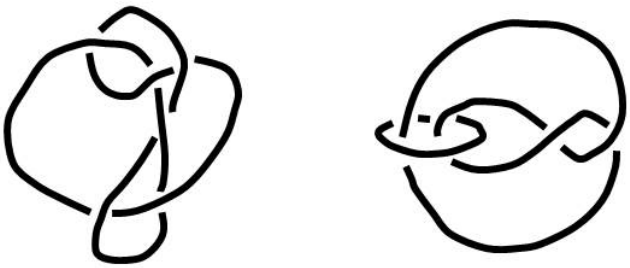


圖 24、代表鏈或結的兩個圖

由鏈不變量與結不變量的定義可知，當給定一圖形時，要先判斷出這個圖形是代表鏈或是結後，才能正確使用鏈不變量或是結不變量，因此，本文除了介紹三色性與非結數之外，另外還介紹了鏈結數，希望能幫助讀者釐清將不變量應用在鏈圖與結圖的關係。

雖然用個別的結不變量判斷兩個結是否相等時會有其限制，但應用結不變量判斷兩結是否相等，至少對於處理兩結是否相等的問題提供了一個方向，當兩個結的某個結不變量並不相同時，我們可以判斷這兩個結並不相同。

陸、結語

從數學的角度來看，若一個結能經由任意連續變形而變成另一個結時，則這兩個結是相等的，換一個說法是這兩個結屬於同一類型的結。是故，結不變量是一個由兩個結圖來判斷兩個結是否相等的方式。從上述介紹結不變量的概念，以及判斷一個量是不是結不變量的內容中可知，要判斷一個量是不是結不變量，只要找出特定規則並證明以此規則作用在經過三型 R 移動前後的兩個結圖上，所得到的兩個量是維持不變的即可。但若讀者動手實作並仔細思考這些結不變量的意義後，或許會發現就算依照這些結不變量的定義進行判斷，有些時候要算出結果亦會困難重重。以結 K 的非結數$u(K)$為例，因為一個結可以畫出很多長相不一樣的結圖，且依$u(K)$的定義，必須先計算出各結圖的非結數後，再取最小值，故困難之處在於除了如何計算出結圖的非結數之外，還需要思考如何找出無限多個結圖的非結數的值，並取它們的最小值，確實不是一件容易的事。

有時當我們想計算某個結圖的不變量並嘗試許多次後，發現這個圖沒有不變量時，並不意味著日後再一次的嘗試亦會無法達到我們的目標。這就類似於在數學解題過程中，即我們對某命題能夠舉出多個支持其正確性的例子，但卻不足以形成一個證明的道理一樣。這反映出以各種結不變量對結進行分類時，有時在決定或計算結不變量是有困難的，但也反映出其挑戰性，從結理論後續發展的歷程來看，能夠找出各種不同的結不變量來研究如何將結分類，將會是可以持續探索的方向，建議有興趣的讀者可持續閱讀參考資料中所列舉的文獻。

參考文獻

中文文獻

孫維民與譚克平 (2017)。結可以用數學的角度來研究嗎。**科學教育月刊**，**394**，11-26。
楊樹文 (2001)。結與結的不變量。**數學傳播**，**25**(2)，4-19。

英文文獻

Adams, C. C. (2004). *The knot book*: *An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York: W.H. Freeman and Company.
Cromwell, P. P. (2004). *Knots and links*. New York: Cambridge University Press.
Farmer, D. W. & Standard, T. B. (1996). *Knots and surfaces*: *A guide to discovering mathematics* (vol. 6). Providence, RI: American Mathematical Society.
Livingston, C. (1993). *Knot theory*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
Murasugi, K. (1996). *Knot theory and its applications* (B. Kurpita, Trans.). Boston: Birkhauser.
Sumners, D. W. (1995). Lifting the curtain: Using topology to probe the hidden action of enzymes. *Notices of the American Mathematical Society*, *42*(5), 528-537.
Sumners, D. W. (2011). DNA knots: theory and experiments. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, *191*, 1-19.