循環數列的「完全齊次對稱多項式」表示法

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

定義 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，$h_n(\alpha,\beta)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。由乘法公式，知 $\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$。

本篇文章從 $h_n(1,-1)$ 出發，這是一個很單純的念頭：將 1 與－1 代入 $h_n(\alpha,\beta)$，會發生什麼事？

這是個可以立刻回答的問題，答案是 $h_n(1,-1)=\dfrac{1^{n+1}-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}=\dfrac{1^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2}$。注意到這恰好是一個很特殊的數列：0，1，0，1，0，……(從 $n=1$ 開始，每兩個一循環)，而 1 與－1 是 1 的平方根。

接下來的問題是：$h_n(1,\omega,\omega^2)$ 的值是什麼(其中 $1,\omega,\omega^2$ 為 $x^3=1$ 的三個根)？更一般地，將 $x^m-1=0$ 的 m 個根代入 $h_n(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的結果是什麼呢？

在一番探索與嘗試之後，作出了猜想(詳細過程於「貳、本文」作介紹)，卻一時沒有相對應的證明，所以擱置了一段時間。偶然之中，搜尋到了科學教育月刊的一篇文章：「循環數列的一般項公式----- 一個數學問題研究的例子」(參考資料[1])。讀完之後，忽然領悟到該文的「定理一」，正是筆者所需的關鍵，其敘述如下：

「固定 $k\in N$。定義數列 $\{a_{k,n}\}_{n\geq 1}$ 以 $a_{k,n}=\begin{cases}0, & 當n不是k的倍數\\ 1, & 當n是k的倍數\end{cases}$。則 $\{a_{k,n}\}_{n\geq 1}$ 的一般項 $a_{k,n}=\dfrac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{k-1})^n}{k}$，其中 α 為 $x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1=0$ 的任一複數根。」(參考資料[1])

在本篇文章中，將該文的「定理一」調整成如下的敘述：

設 $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$，其中 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$，且 $m\ge 2$，則

$$\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}=\begin{cases}0, & \text{當}n\text{不是}m\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}n\text{是}m\text{的倍數}\end{cases}$$ 。

運用此一事實，以及完全齊次對稱多項式的一個性質--「次方乘法的分配律」，筆者終於證明了如下的命題：

「設 $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$，其中 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$，且 $m\ge 2$，則 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=\begin{cases}0, & \text{當}n\text{不是}m\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}n\text{是}m\text{的倍數}\end{cases}$ 。」

一方面，從左式到右式，此一命題說明了「**將 1 的所有 m 次方根作為變數，代入完全齊次對稱多項式，所得結果正是一個循環數列**」；另一方面，從右式到左式，此一命題說明了「**循環數列可用完全齊次對稱多項式加以表示**」，此即本篇文章名稱「循環數列的『完全齊次對稱多項式』表示法」的由來。

貳、本文

一、記號、定義與已知的結果

1. 循環數列：

採用參考資料[1]的記號，定義：

$$a_{k,n}=\begin{cases}0, & \text{當}n\text{不是}k\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}n\text{是}k\text{的倍數}\end{cases}$$ ，其中 $n\ge 1$，$k\ge 1$。

例：$\langle a_{2,n}\rangle=0$，1，0，1，0，……。

例：$\langle a_{3,n}\rangle=0$，0，1，0，0，1，……。

性質：

設 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $m\ge 2$，則 $\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}=a_{m,n}$。

(參考資料[1])

例：取 $m=3$，令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\omega^3=1$ 且 $\omega^2+\omega+1=0$，

當 $n=3k$ 時，$\frac{1^n+\omega^n+(\omega^2)^n}{3}=\frac{1^{3k}+\omega^{3k}+(\omega^2)^{3k}}{3}=\frac{1+(\omega^3)^k+(\omega^3)^{2k}}{3}=1$

當 $n=3k+1$時，$\dfrac{1^n+\omega^n+(\omega^2)^n}{3}=\dfrac{1^{3k+1}+\omega^{3k+1}+(\omega^2)^{3k+1}}{3}$

$$=\frac{1+(\omega^3)^k\cdot\omega+(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2}{3}=\frac{1+\omega+\omega^2}{3}=0$$

當 $n=3k+2$ 時，$\dfrac{1^n+\omega^n+(\omega^2)^n}{3}=\dfrac{1^{3k+2}+\omega^{3k+2}+(\omega^2)^{3k+2}}{3}$

$$=\frac{1+(\omega^3)^k\cdot\omega^2+(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^4}{3}=\frac{1+\omega+\omega^2}{3}=0$$

綜合以上討論，得 $\dfrac{1^n+\omega^n+(\omega^2)^n}{3}=\begin{cases}0,\ 當n不是3的倍數\\1,\ 當n是3的倍數\end{cases}$，

這表示 $\dfrac{1^n+\omega^n+(\omega^2)^n}{3}=a_{3,n}$。

2. 完全齊次對稱多項式 **(Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)**

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n})$ ，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地，$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，且 $h_k(a)=a^k$ 。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}a_3{}^{\lambda_3})=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ 。

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$。

例：$h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$。

性質：

次方乘法的分配律：$r^n\cdot h_n(a_1,a_2,\cdots,a_m)=h_n(a_1r,a_2r,\cdots,a_mr)$

例：$r^2\cdot h_2(a,b,c)=a^2r^2+b^2r^2+c^2r^2+abr^2+bcr^2+car^2$

$$=(ar)^2+(br)^2+(cr)^2+(ar)(br)+(br)(cr)+(cr)(ar)=h_2(ar,br,cr)$$ 。

證明：

$$r^n\cdot h_n(a_1,a_2,\cdots,a_m)=r^n\cdot\left[\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\geq 0}}(a_1{}^{\lambda_1}a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_m{}^{\lambda_m})\right]$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\ge 0}} (r^n a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_m^{\lambda_m}) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\ge 0}} (r^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m} \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_m^{\lambda_m})$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\ge 0}} \left[(ra_1)^{\lambda_1}(ra_2)^{\lambda_2}\cdots(ra_m)^{\lambda_m}\right] = h_n(a_1 r, a_2 r, \cdots, a_m r)$$

3. 基本對稱多項式

定義：$e_k(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k \\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\le 1}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 k 次基本對稱多項式」。

例：$e_2(a_1,a_2,a_3) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2 \\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3}) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$。

例：$e_0(a,b,c)=1$，$e_1(a,b,c)=a+b+c$，$e_2(a,b,c)=ab+bc+ca$，$e_3(a,b,c)=abc$。

例：$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - e_1(a,b,c)x^2 + e_2(a,b,c)x - e_3(a,b,c)$。

4. 對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」：**(參考資料[2][3])**

$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k e_k \cdot h_{n-k} = 0$，其中 $n \ge m$，

亦即 $h_n - e_1h_{n-1} + \cdots + (-1)^k e_k h_{n-k} + \cdots + (-1)^m e_m h_{n-m} = 0$。

(其中 $e_k = e_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$h_k = h_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$)

說明：此式刻劃了基本對稱多項式與完全齊次對稱多項式的關聯性，也說明了 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是 m 階遞迴數列。

例：當 $m=3$，$n=3$時，$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e_k \cdot h_{3-k} =$

$$h_3(a_1,a_2,a_3) - e_1(a_1,a_2,a_3)h_2(a_1,a_2,a_3) + e_2(a_1,a_2,a_3)h_1(a_1,a_2,a_3) - e_3(a_1,a_2,a_3)h_0(a_1,a_2,a_3)$$

$$= h_3(a,b,c) - e_1(a,b,c)h_2(a,b,c) + e_2(a,b,c)h_1(a,b,c) - e_3(a,b,c)h_0(a,b,c)$$

(其中令 $a_1 = a$，$a_2 = b$，$a_3 = c$)

一方面，$h_3(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + cb^2 + a^2c + ac^2 + abc$

另一方面，$e_1(a,b,c)h_2(a,b,c) - e_2(a,b,c)h_1(a,b,c) + e_3(a,b,c)h_0(a,b,c)$

$$= (a+b+c)\cdot h_2(a,b,c) - e_2(a,b,c)\cdot(a+b+c) + abc\cdot 1$$

$$= (a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-ab-bc-ca) + abc$$

$= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + cb^2 + a^2c + ac^2 + abc$

於是可得 $h_3 - e_1 \cdot h_2 + e_2 \cdot h_1 - e_3 \cdot h_0 = 0$，即 $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k e_k \cdot h_{3-k} = 0$。

二、探索過程

(一)實驗階段

先觀察 $h_n(1,\omega,\omega^2)$：

由 $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega^3 = 1$ 且 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$，可得

$h_0(1,\omega,\omega^2) = 1$， $h_1(1,\omega,\omega^2) = 1 + \omega + \omega^2 = 0$，

$h_2(1,\omega,\omega^2) = 1^2 + \omega^2 + \omega^4 + 1\cdot\omega + \omega\cdot\omega^2 + \omega^2\cdot 1 = 1 + \omega^2 + \omega + \omega + 1 + \omega^2 = 0$

由 $h_3(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + abc$，得

$h_3(1,\omega,\omega^2) = 1^3 + \omega^3 + (\omega^2)^3 + 1\cdot\omega\cdot(1+\omega) + \omega\cdot\omega^2\cdot(\omega+\omega^2) + \omega^2\cdot 1\cdot(\omega^2+1) + 1\cdot\omega\cdot\omega^2$

$= 1^3 + \omega^3 + \omega^6 + \omega\cdot(-\omega^2) + \omega^3\cdot(-1) + \omega^2\cdot(-\omega) + \omega^3$

$= 1 + 1 + 1 - \omega^3 - \omega^3 - \omega^3 + \omega^3 = 1$

至此，可知 $h_n(1,\omega,\omega^2)$ 的前三項為 0，0，1(從 $n=1$ 算起)，是一個好的開始，但接下來隨著 n 的增大，計算變得繁雜。

此時，運用對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」(參見前頁)：

$h_n - e_1 \cdot h_{n-1} + e_2 \cdot h_{n-2} - e_3 \cdot h_{n-3} = 0$，其中 $e_1(1,\omega,\omega^2) = 1 + \omega + \omega^2 = 0$，

$e_2(1,\omega,\omega^2) = 1\cdot\omega + \omega\cdot\omega^2 + \omega^2\cdot 1 = \omega + 1 + \omega^2 = 0$， $e_3(1,\omega,\omega^2) = 1\cdot\omega\cdot\omega^2 = 1$，可得：

$h_n - 0\cdot h_{n-1} + 0\cdot h_{n-2} - 1\cdot h_{n-3} = 0 \Rightarrow h_n = h_{n-3}$，可得

$h_4 = h_1 = 0$， $h_5 = h_2 = 0$， $h_6 = h_3 = 1$， $h_7 = h_4 = 0$，⋯⋯，已可看出 $h_n(1,\omega,\omega^2)$ 的數列(從 $n=1$ 算起)是 0，0，1，0，0，1，⋯⋯，每三個一循環。

總結以上的實驗過程，由 $h_1 = 0$， $h_2 = 0$， $h_3 = 1$，以及 $h_n = h_{n-3}$，實際上，已經證明了：

$$h_n(1,\omega,\omega^2) = \begin{cases} 0, & \text{當 } n \text{ 不是3的倍數} \\ 1, & \text{當 } n \text{ 是3的倍數} \end{cases}$$

很自然地，提出如下的「猜想」:

設 $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$，其中 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$

則 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=\begin{cases}0, & \text{當}\,n\,\text{不是}\,m\,\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}\,n\,\text{是}\,m\,\text{的倍數}\end{cases}$。

(二)思考證明策略

可先建立一個「週期性引理」:

設 $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$，其中 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$，

則有 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_{n-m}(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$，記作 $h_n=h_{n-m}$，其中 $n\ge m$。

證明：

$\because$ $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$

$\Rightarrow x^m-1$

$=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdot\cdots\cdot(x-\alpha^{m-1})$

$=x^m-e_1x^{m-1}+e_2x^{m-2}+\cdots+(-1)^k e_k x^{m-k}+\cdots+(-1)^m e_m$，其中 $e_k=e_k(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$

比較係數，可得 $e_1=e_2=\cdots=e_{m-1}=0$，與 $e_m=(-1)^{m+1}$

再由對稱多項式的「$e-h$ 恆等式」:

$h_n-e_1h_{n-1}+\cdots+(-1)^k e_k h_{n-k}+\cdots+(-1)^m e_m h_{n-m}=0$，可得

$h_n-0\cdot h_{n-1}+\cdots+(-1)^k\cdot 0\cdot h_{n-k}+\cdots+(-1)^m\cdot(-1)^{m+1}\cdot h_{n-m}=0$

$\Rightarrow h_n=h_{n-m}$，得證。

建立了此一「週期性引理」之後，實際上，只要能計算出 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$ 從 $n=1$ 開始的前 m 項為 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{m-1\text{個}},1$，即可完成「猜想」的證明。

對於 $h_k(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$，其中 $k=1,2,\cdots,m$，直接展開應該不是一件容易的事。在一段時間的研究之後，運用參考資料[1]的「定理一」，以及完全齊次對稱多項式的一個性質--「次方乘法的分配律」，終於還是得到了一個一般性的證明。

(三)猜想的證明：

1. 先從 $m=3$ 開始：

設 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，則 $x^3-1=0$ 的三根為 $1,\omega,\omega^2$。

由完全齊次對稱多項式「次方乘法的分配律」，可得：

$1^n\cdot h_n(1,\omega,\omega^2)=h_n(1,\omega,\omega^2)$ ....(1)

$\omega^n \cdot h_n(1,\omega,\omega^2) = h_n(\omega,\omega^2,\omega^3) = h_n(1,\omega,\omega^2)$ ....(2)

$(\omega^2)^n \cdot h_n(1,\omega,\omega^2) = h_n(\omega^2,\omega^3,\omega^4) = h_n(1,\omega,\omega^2)$ ....(3)

(1)＋(2)＋(3)，得

$$(1^n+\omega^n+\omega^{2n})\cdot h_n(1,\omega,\omega^2) = 3\cdot h_n(1,\omega,\omega^2)$$

$$\Rightarrow (\frac{1^n+\omega^n+\omega^{2n}}{3}-1)\cdot h_n(1,\omega,\omega^2)=0$$

(1) 當 n 不是 3 的倍數時，由參考資料[1]的定理一之推論，可得

$$\frac{1^n+\omega^n+\omega^{2n}}{3}-1=0-1=-1$$

$$\Rightarrow 0=(\frac{1^n+\omega^n+\omega^{2n}}{3}-1)\cdot h_n(1,\omega,\omega^2)=-h_n(1,\omega,\omega^2)$$

$$\Rightarrow h_n(1,\omega,\omega^2)=0$$

(2) 當 n 是 3 的倍數時，令 $n=3k$，其中 k 為自然數，由「週期性引理」，有

$$h_n=h_{n-3}=h_{n-6}=\cdots=h_{n-3(k-1)}=h_{n-3k}=h_0=1$$

所以當 n 是 3 的倍數時，有 $h_n(1,\omega,\omega^2)=1$ 。

由(1)(2)，可得

$$h_n(1,\omega,\omega^2)=\begin{cases} 0, & \text{當}\,n\,\text{不是}3\text{的倍數} \\ 1, & \text{當}\,n\,\text{是}3\text{的倍數} \end{cases}$$

即 $h_n(1,\omega,\omega^2)=a_{3,n}$，亦即循環數列 $a_{3,n}$ 可表示為 $h_n(1,\omega,\omega^2)$ 。

2. 一般情形：

設 $\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$，其中 $m\ge 2$，則 $x^m-1=0$ 的 m 個根為 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1}$ 。

由完全齊次對稱多項式「次方乘法的分配律」，可得：

$$1^n\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$\alpha^n\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_n(\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\cdots,\alpha^m)=h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$(\alpha^2)^n\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_n(\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\cdots,\alpha^{m+1})=h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(\alpha^k)^n\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_n(\alpha^k,\alpha^{k+1},\alpha^{k+2},\cdots,\alpha^{m-1+k})=h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(\alpha^{m-1})^n\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=h_n(\alpha^{m-1},\alpha^m,\alpha^{m+1},\cdots,\alpha^{2m-2})=h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

將以上 m 個式子相加，可得

$$\left[1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n\right]\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=m\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}-1\right)\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=0$$

(1) 當 n 不是 m 的倍數時，由參考資料[1]的定理一之推論，可得

$$\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}-1=0-1=-1$$

$$\Rightarrow 0=\left(\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}-1\right)\cdot h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})$$

$$=-h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})\Rightarrow h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=0$$

(2) 當 n 是 m 的倍數時，令 $n=mp$，其中 p 為自然數，由「週期性引理」，有

$$h_n=h_{n-m}=h_{n-2m}=\cdots=h_{n-(p-1)m}=h_{n-pm}=h_0=1$$

所以當 n 是 m 的倍數時，有 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=1$。

由(1)(2)，可得 $h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=\begin{cases}0, & \text{當}n\text{不是}m\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}n\text{是}m\text{的倍數}\end{cases}$。

至此，已證明了「猜想」。

(四) 討論：更一般的循環數列

對於更一般的循環數列，例如：

$\langle d_n\rangle$:1，6，8，1，6，8，1，6，8，…… (其中 $d_1=1$)，

可將 $\langle d_n\rangle$ 拆解為三數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 與 $\langle c_n\rangle$ 的線性組合，其中

$\langle a_n\rangle$:1，0，0，1，0，0，1，0，0，……，

$\langle b_n\rangle$:0，1，0，0，1，0，0，1，0，……，

$\langle c_n\rangle$:0，0，1，0，0，1，0，0，1，……。

由已證明之「猜想」，有 $c_n=h_n(1,\omega,\omega^2)$，其中 $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$，

由數列下標的關係，有 $b_n=c_{n+1}=h_{n+1}(1,\omega,\omega^2)$，其中 $n\geq 1$，以及

$a_n=c_{n+2}=h_{n+2}(1,\omega,\omega^2)$，其中 $n\geq 1$。

由此可得 $d_n=1\cdot a_n+6\cdot b_n+8\cdot c_n=h_{n+2}+6\cdot h_{n+1}+8\cdot h_n$，表示成完全齊次對稱多項式的線性組合。

參、結語

本文從一個單純的念頭 $h_n(1,-1)$ 出發，經過 $h_n(1,\omega,\omega^2)$ 的實驗，猜想的提出，「週期性引理」的建立，文獻搜尋找到「定理一」，加上「次方乘法的分配律」，最終證明了：

$$h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=\begin{cases}0, & \text{當}\,n\,\text{不是}\,m\,\text{的倍數}\\ 1, & \text{當}\,n\,\text{是}\,m\,\text{的倍數}\end{cases},$$

其中 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$，且 $m\geq 2$。

此一等式的意義在於，**可將循環數列用完全齊次對稱多項式加以表示；而更一般的循環數列，也可用完全齊次對稱多項式的線性組合來表達。**整個探索歷程，可說麻雀雖小，卻也五臟俱全。

此外，本文也相當於證明了

$$h_n(1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{m-1})=\frac{1^n+\alpha^n+(\alpha^2)^n+\cdots+(\alpha^{m-1})^n}{m}$$ ，其中 $m\geq 2$， $n\geq 1$

此一等式是否有更直接的證法或其他的意義，有待有興趣的讀者加以探索。

參考資料：

[1].陳薇、祁恒昱、謝沛興，循環數列的一般項公式——一個數學問題研究的例子，科學教育月刊第 249 期，中華民國 91 年 5 月，P20～25。

[2]. I.G.Macdonald，Symmetric Functions and Hall Polynomials，P12～14。

[3].陳建燁，對稱多項式的 $e-h$ 恆等式(上)(下)，高中數學學科中心電子報第 124 期，2017 年 7 月。