

拼圖與摺紙學配方法

李祐宗

澎湖縣立文光國民中學

配方法是許多國中八年級學生學習的困擾點之一，配方法是解決一元二次方程式重要的方式，公式解也是從配方法得到的。筆者先前發表過拼圖以及利用摺紙法來學因式分解(詳見科學教育月刊第 348 及 370 期)，然而在最近的教學中，發現這兩種方式亦可以幫助教師教學及學生學習。

以下是一元二次式的配方過程：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a}, \end{aligned}$$

配方法的關鍵首先在於將二次項的係數變為 1 的情況下，藉由一次項的係數 $\frac{b}{a}$ 來決定要搭配的常數項 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ，加上本文是以摺紙與拼圖等方式來教導學生，所以底下討論的題目中，二次項係數均為 1、一次項的係數均為正數。

Ex1 $x^2 + 2x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2$

在之前拼圖法學因式分解中，我們知道完全平方式(一元二次方程式)拚出來的

圖形是正方形。因此要將此題配成完全平方，先準備一個二次項及兩個一次項，然後一次項對分，也就是將 $2x$ 分成 x 及 x 。

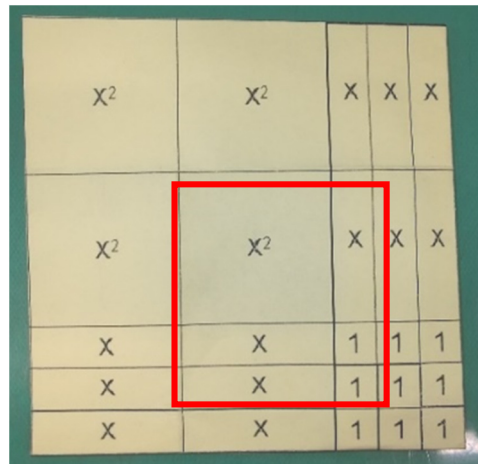


圖 1

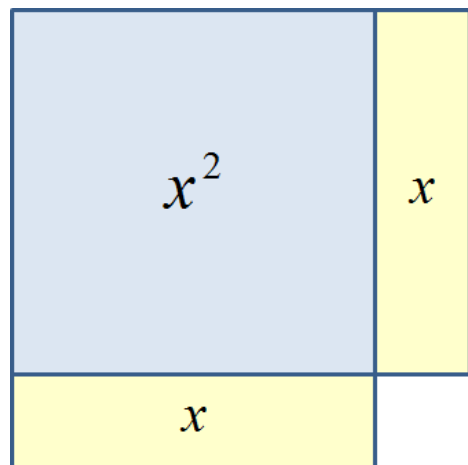


圖 2

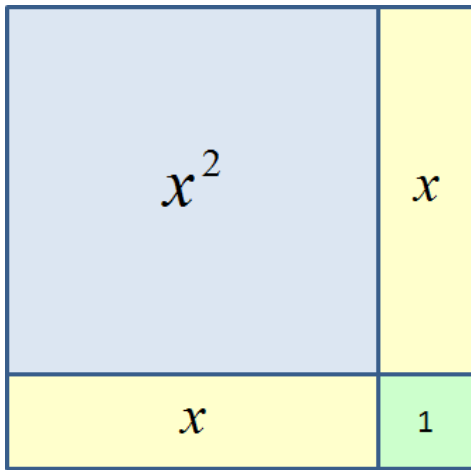


圖 3

接著問學生，右下角還缺多少可以拼成正方形？學生答：1。因此再加上一塊便可拼成正方形，也就是 $x^2 + 2x + \underline{1^2} = (x + \underline{1})^2$ 。(如圖 2 及圖 3) 摺紙的方式則參考圖 1，將紅色框以外的部分往後摺即可。

* 比較： $x^2 + 2x + \underline{1^2} = (x + \underline{1})^2$ 。

Ex2 $x^2 + 4x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2$

要將此題配成完全平方，先準備一個二次項及四個一次項，然後一次項對分，也就是將 $4x$ 分成 $2x$ 及 $2x$ 。接著問學生，右下角還缺多少可以拼成正方形？學生答：4(也就是 2^2)。因此再加上一塊便可拼成正方形，也就是 $x^2 + 4x + \underline{2^2} = (x + \underline{2})^2$ ，摺紙的方式參考圖 6。

* 比較： $x^2 - 4x + \underline{2^2} = (x - \underline{2})^2$ 。

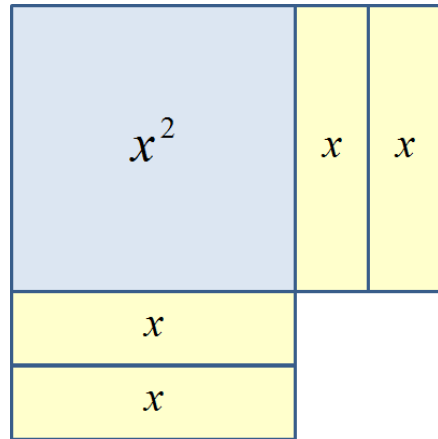


圖 4

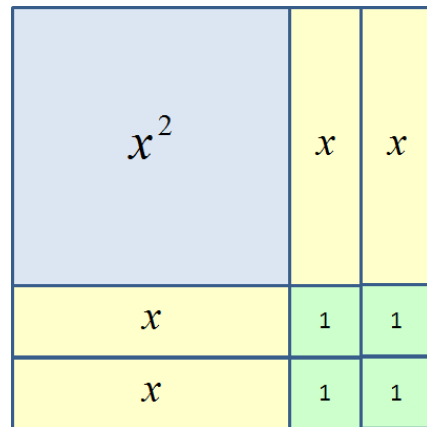


圖 5

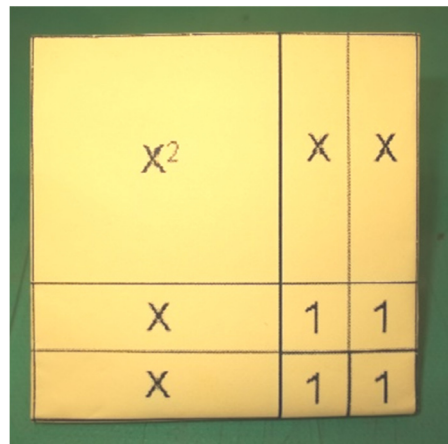


圖 6

Ex3 $x^2 + 7x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2$

只要各項係數為正數，理論上都可以用拼圖法來完成，甚至一次項的係數為奇數時也可以使用。不過此題筆者建議用摺紙法來作較為合適(如圖 8，最右側及最下側各摺一半的寬度)。首先將 $7x$ 分成 $3.5x$ 及 $3.5x$ ，接著請學生算出常數的部分

$(\frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2)$ 。因此得到

$$x^2 + 7x \left(\frac{7}{2}\right) = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$$

* 比較： $x^2 + 7x \left(\frac{7}{2}\right) = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2$

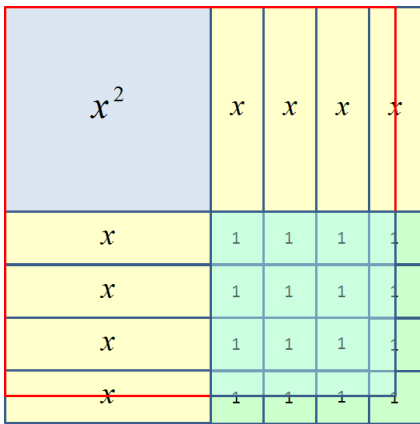


圖 7

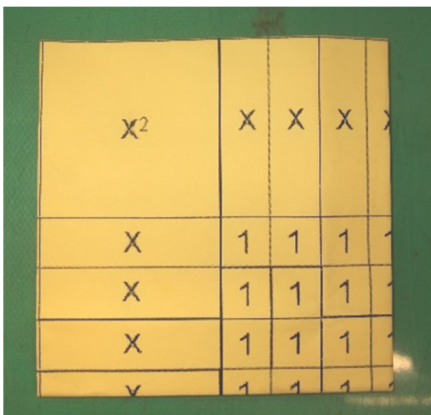


圖 8

Ex4 $x^2 + 8x \underline{16} = (x + \underline{4})^2$

* 比較： $x^2 - 8x \underline{16} = (x \underline{4})^2$

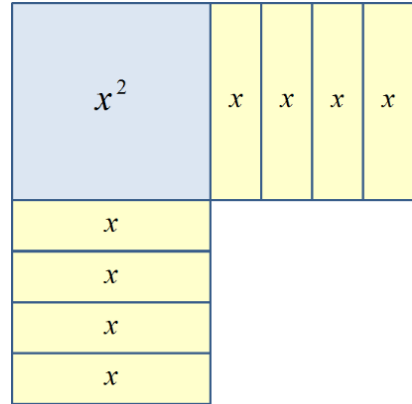


圖 9

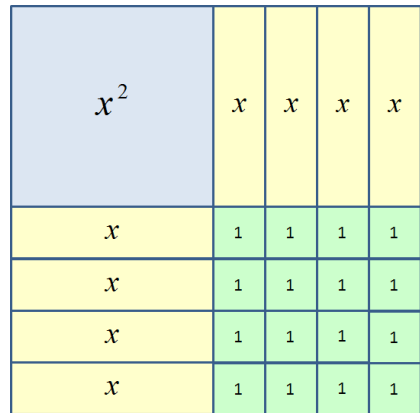


圖 10

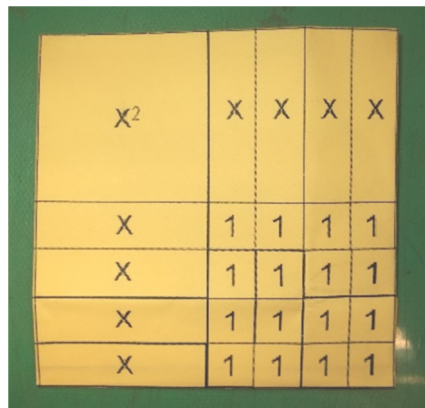


圖 11

Ex5 $x^2 + \underline{\quad}x + 1 = (x + \underline{\quad})^2$

如遇到填充題為填一次項的係數時，方法是類似的，此題先準備一個二次項及一個 1，就可以知道還缺 $2x$ 。因此

$x^2 + \underline{2}x + 1 = (x + \underline{1})^2$

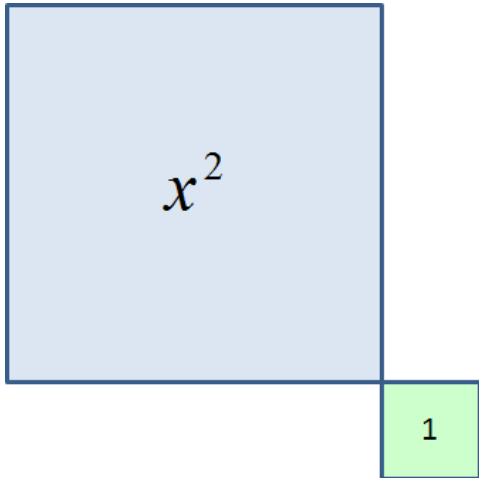


圖 12

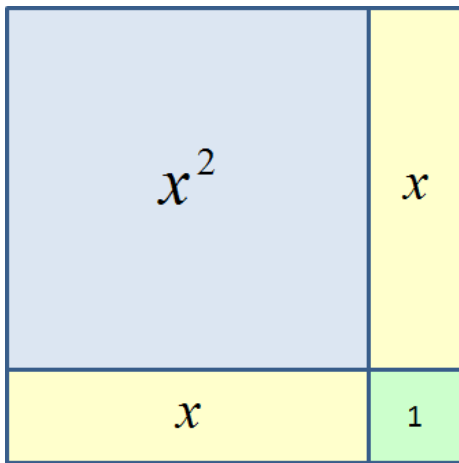


圖 13

Ex6 $x^2 + \underline{\quad} + 16 = (x + \underline{\quad})^2$

此題先準備一個二次項及 16 個 1，就可以知道還缺 $8x$ 。因此

$x^2 + \underline{8}x + 16 = (x + \underline{4})^2$

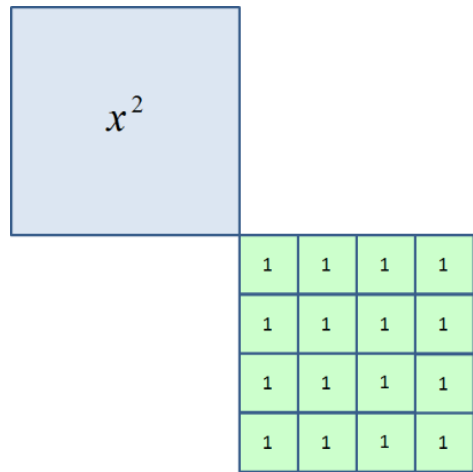


圖 14

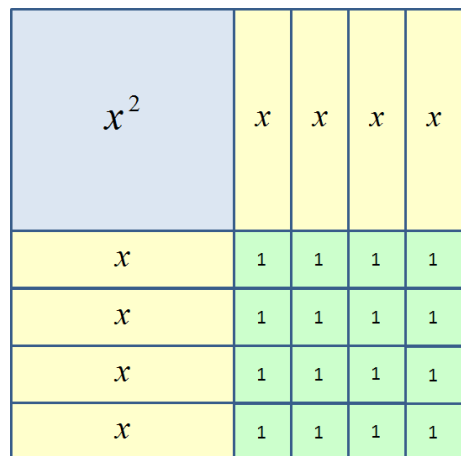


圖 15

配方法的核心觀念就是和的乘法公式與差的乘法公式的運用，在國中階段能有多一點的方式與教具，可以讓多一點的學生更加了解。

參考文獻

李祐宗(2012)。國中補救教學示例—從拼圖學因式分解。科學教育月刊, 348,

37-45。
 李祐宗(2014)。因式分解又一章--摺紙學因式分解。科學教育月刊, 370, 39-41。

x^2	x^2	x^2	x	x	x	x	x	x
x^2	x^2	x^2	x	x	x	x	x	x
x^2	x^2	x^2	x	x	x	x	x	x
x	x	x	1	1	1	1	1	1
x	x	x	1	1	1	1	1	1
x	x	x	1	1	1	1	1	1
x	x	x	1	1	1	1	1	1
x	x	x	1	1	1	1	1	1

[圖卡，讀者可自行影印放大]