從平分問題到動態穩定：一個應用二進位解題的實例

陳奕均[1] 蘇柏奇[2*] 游淑媛[2]

[1]國立新竹高級中學

[2]苗栗縣立興華高級中學

我們探討將兩堆小石子移動成數量相等狀態的數學遊戲：「有左、右兩堆小石子，移動這些小石子，每次都從數量較多的那一堆拿出當下較少那堆之個數的小石子，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆小石子數目相等。」

一定能移動成兩堆數量相等嗎？若可以，需要多少次的移動？為方便討論，定義如下：

定義：

1. 左堆小石子有 x 個，右堆小石子有 y 個，以數對(x, y)表示。
2. 若兩堆小石子的個數相等，即 $x = y$，則數對(x, y) 稱為「穩定狀態」。

例如：左、右兩堆小石子，左堆有 5 顆、右堆 3 顆，其移動過程如下：

第 1 次移動時，右堆較少，從左堆移動 3 顆至右堆，移動後兩堆分別有 2、6 顆。

第 2 次移動時，左堆較少，從右堆移動 2 顆至左堆，移動後兩堆分別有 4、4 顆。

此時，兩堆的數量相同，即完成此局。

上述移動過程，記為：$(5, 3)\rightarrow(2, 6)\rightarrow(4, 4)$

兩堆小石子的數量關係有三種：$x > y$, $x = y$, $x < y$。其中，若 $x= y$, 則表示已經形成兩堆數量相等的狀態；不難得知，$x > y$ 及 $x < y$ 兩種情形之間具有對稱的關係，例如：(3,5)和(5,3)的移動過程極為相似$\begin{cases}(3,5)\rightarrow(6,2)\rightarrow(4,4)\\(5,3)\rightarrow(2,6)\rightarrow(4,4)\end{cases}$。因此，不妨只討論 $x > y$ 時的移動情形。

一、初探~從實驗數據形成猜測

我們依序探討幾個基本問題，首先，檢驗是否所有數對皆能形成穩定狀態。

*為本文通訊作者

問題 1：所有數對皆能形成「穩定狀態」嗎？

列出幾個數對的移動過程如下：

$x+y$	移動過程	說明
4	(3,1)→(2,2)	形成穩定狀態
5	(3,2)→(1,4)→(2,3)→(4,1)→(3,2)→…	形成循環
	(4,1)→(3,2)→(1,4)→(2,3)→(4,1)→…	形成循環

若(x, y)可形成穩定狀態，即$(x, y)\to\ldots\to(k, k)$，移動過程中，兩堆小石子的總量不變，故得：$x + y=2k$ 為偶數，因此，當 $x + y$ 為奇數時，數對(x, y)無法形成穩定狀態。

當(x, y)兩堆和為偶數時，經過第 1 次移動後變成$(x-y,\ 2y)$ ，則兩堆個數都為偶數，接下來，不論移動多少次，兩堆個數必皆為偶數。因此，若(x, y)能形成等量狀態(k, k)，則 k 為偶數，故 $x+y=2k$ 為 4 的倍數，即得當 $x+y$ 不為 4 的倍數，無法形成穩定狀態。

由上述探討可以初步判斷某些狀態必定無法形成穩定狀態。例如：$(x, y)=(8,3)$時，因 $x+y=11$ 不為 4 的倍數，必不會形成穩定狀態。再如：$(x, y)=(7, 3)$ 時，也因為 $x+y=10$ 不為 4 的倍數，必不會形成穩定狀態。進一步思考，若 $x+y$ 為 4 的倍數時的情況：

問題 2：若 $x+y$ 為 4 的倍數，則數對(x, y)一定能形成穩定狀態嗎？

針對 $x+y=8,12,16,20,24$ 進行探討，從中發現，當 $x+y=4,8,16$ 時，所有數對(x, y)皆可形成穩定狀態，得以下猜測：

> 猜測一：形成穩定狀態的充要條件
>
> $x+y=2^k$時，數對(x, y)皆可形成穩定狀態。

進一步思考形成穩定狀態的最少移動次數：

問題 3：若 $x+y=2^k$，則數對(x, y)形成穩定狀態的最少次數為何？

就 y 之值討論（過程節錄如附錄一），我們得到以下猜測：

> 猜測二：形成穩定狀態的次數
>
> 當 $x+y=2^k$, $\gcd(x, y)=2^m$時，數對(x, y)形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

二、檢驗猜測~數量和為 之數對形成穩定狀態的次數

本節驗證數量和為 2^k 時，任意數對形成穩定狀態的次數。經過多次實驗，我們發現

每次移動，較少一堆的數量變成原來的兩倍，若以二進位制來表示，即各位值上的數前進一位，如(34, 30)形成穩定狀態過程為：

$$\begin{cases}100010\\011110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}000100\\111100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}001000\\111000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}010000\\110000\end{cases}\rightarrow\begin{cases}100000\\100000\end{cases}。$$

進一步發現，當 $x+y=2^k$ ，若將 x, y 表成二進位制，令 $x=\sum_{i=0}^{k}a_i\times 2^i$, $y=\sum_{i=0}^{k}b_i\times 2^i$,其中 a_i, b_i $(1\le i\le k)$為 0 或 1，則當 $\gcd(x,y)=2^m$ 時，得到

$$\begin{cases}a_i=b_i=0,\ 0\le i\le m-1\\a_m=b_m=1\\a_i+b_i=1,\ m+1\le i\le k-1\end{cases}\qquad(*)。$$

將(*)以下表表示：

	2^k	2^{k-1}	2^{k-2}	2^{k-3}	……	2^{m+1}	2^m	2^{m-1}	…	2^0
x	0	1	0 或 1				1	0	…	0
y	0	0	0 或 1				1	0	…	0
$x+y$	1	0	0	0	0	0	0	0	…	0

考慮 $x>y$ 時，數對(x, y)移動為 ，觀察兩堆數量的二進位變化：

1. $y\xrightarrow{\times 2}2y$ ：

   數量較少的一堆由 y 變成 $2y$，二進位的變化為：「在最右側補一個 0」。

   例如： $(1)_2\xrightarrow{\times 2}(10)_2$, (即：在最右側補 0, 得 10)

   $(10)_2\xrightarrow{\times 2}(100)_2$, (即：在最右側補 0, 得 100)

2. $x\xrightarrow{-y}x-y$ ：

   因為 x-y=2x-(x+y)=2x-2^k, 化簡得： $x\xrightarrow{-y}2x-2^k$,

   數量較多的一堆由 x 變成 2x-2k，二進位的變化為：

   先「在最右側補一個 0」(即 x 乘以 2)，再「刪除最左側的 1」(即減 $2k$)。

   例如： $(110)_2\xrightarrow{-10}(100)_2$

   (先在最右側補 0, 得 1100，再刪除最左側之 1,得 ~~1~~100).

   再如： $(1101)_2\xrightarrow{-11}(1010)_2$

   (先在最右側補 0, 得 10100，再刪除最左側之 1,得 ~~1~~1010).

由上述二進位的變化，我們得到不論此堆較多或較少，移動後的二進位變化可以表示為：「先在最右側補 0，再刪除最左側之 1 或 0」。

另一方面，當其中一數形成 $(1\underbrace{00.....0}_{k-1個0})_2$ 時，另一數也必 $(1\underbrace{00.....0}_{k-1個0})_2$ ，因此，僅需探討其中一數形成 $(1\underbrace{00.....0}_{k-1個0})_2$ 的次數，即可得到數對形成穩定狀態的移動次數。

例如：(33, 31)形成穩定狀態所需移動次數等於$(33)_{10}=(100001)_2$ 形成$(100000)_2$ 的次數，由100001 → 000010 → 000100 → 001000 → 010000 → 100000, 經 5 次得穩定狀態。

例如：(34, 30)形成穩定狀態所需移動次數等於$(34)_{10}=(100010)^2$ 形成$(100000)_2$的次數，由100010 → 000100 → 001000 → 010000 → 100000, 經 4 次得穩定狀態。

經由上述討論，我們歸納為：當 $x+y=2^k$, $y=p\times 2^m$ 且 p 為奇數，即 $y=(...1\underbrace{00...0}_{m個0})_2$時，數對形成穩定狀態的次數等於 y 形成 的次數，問題轉變為：

「 $y=(...1\underbrace{00...0}_{m個0})_2$經過幾次移動可變成 $(1\underbrace{00...0}_{k-1個0})_2$ ？」

數量 y 的這一堆每次移動的二進位變化為：

$$(...1\underbrace{00...0}_{m個0})_2 \to (...1\underbrace{00...0}_{m+1個0})_2 \to (...1\underbrace{00...0}_{m+2個0})_2 \to (...1\underbrace{00...0}_{m+3個0})_2 \to ... \to (...1\underbrace{00...0}_{k-1個0})_2$$

因此，我們得到經過 $k-1-m$ 次移動可變成穩定狀態。歸納如下：

定理 1： 當 $x+y=2^k$, $\gcd(x,y)=2^m$時，數對 (x,y)形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。

三、$x+y=p\times 2^k$ (p 為奇數且 $p\neq 1$)的情形

在前述實驗中，我們發現當 $x+y\neq 2^k$時，有些數對(x, y)也能形成穩定狀態，接著探討滿足 $x+y=p\times 2^k$　(p 為奇數且 $p\neq 1$)之數對(x, y)形成穩定狀態的次數。

探討過程中，我們注意到兩個數對(pa, pb)及(a, b), $a>b$ 的移動非常相似：

$$\begin{cases}(pa,pb) & \to \quad (pa-pb,2pb)=p\times(a-b,2b) \\ (a,b) & \to \quad (a-b,2b)\end{cases}$$

舉例如下：

數對	移動過程
(125, 35)和(25, 7)	$\begin{cases}(125,35) \to (90,70) \to (20,140) \to (40,120) \to (80,80) \\ (25,7) \to (18,14) \to (4,28) \to (8,24) \to (16,16)\end{cases}$
(33, 3)和(11, 1)	$\begin{cases}(33,3) \to (30,6) \to (24,12) \to (12,24) \to \text{...循環} \\ (11,1) \to (10,2) \to (8,4) \to (4,8) \to \text{...循環}\end{cases}$

歸納如下：

> 定理 2：
> (pa, pb)及(a, b)有相關的形成穩定狀態充要條件及次數。

由定理 1、2，進一步得 $x+y=p\times 2^k$, $\gcd(x,y)=p\times 2^m$ 時，形成穩定狀態次數如下：

> 定理 3：
> 若 $x+y=p\times 2^k$ 且 $\gcd(x,y)=p\times 2^m$, (p 為奇數)，
> 則數對(x, y)形成穩定狀態的次數為 $k-m-1$ 次。

那麼，**當 $x+y=p\times 2^k$ 且 $gcd(x, y)=r\times 2^m$, $p\neq r$ 時，(x, y)能否形成穩定狀態？**分別列出數對(33, 3)和(81, 7) 的移動過程：

數對	移動過程
(33, 3)	$\begin{cases}(33,3) \to (30,6) \to (24,12) \to \ldots & (\text{和為 } 9\times 2^2) \\ (11,1) \to (10,2) \to (8,4) \to \ldots & (\text{和為 } 3\times 2^2) \\ \to (4,2) \to \ldots & (\text{和為 } 3\times 2^1) \\ (2,1) \to \text{循環} & (\text{和為 } 3\times 2^0)\end{cases}$
(81,7)	$\begin{cases}(81,7) \to (74,14) \to (60,28) \to (32,56) \to \ldots & (\text{和為 } 11\times 2^3) \\ (37,7) \to (30,14) \to (16,28) \to \ldots & (\text{和為 } 11\times 2^2) \\ (15,7) \to (8,14) \to \ldots & (\text{和為 } 11\times 2^1) \\ (4,7) \to \text{循環} & (\text{和為 } 11\times 2^0)\end{cases}$

上述兩例最後形成之兩堆數量和分別為 3,11 皆不是偶數，無法形成穩定狀態。上述

過程一般的情況如下：若一開始數對為 $x+y=p\times2$ 且 x, y 的最大公因數為 $r\times2^m$, p, r 為奇數，且 $p\neq r$ 註：經推理可得 r 必為 p 的因數)，其移動過程為：

$$\begin{array}{ccccccccc} (x,y) & \rightarrow & (x_1,y_1) & \rightarrow & (x_2,y_2) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & (x_{k-m},y_{k-m}) \\ x+y=p\times2^k & & x_1+y_1=\frac{p}{r}\times2^{k-m-1} & & x_2+y_2=\frac{p}{r}\times2^{k-m-2} & & & & x_{k-m}+y_{k-m}=\frac{p}{r}\times2^0 \end{array}$$

最後所形成的數對之兩數和 $x_{k-m}+y_{k-m}=\frac{p}{r}\times2^0$ 不為偶數，無法形成穩定狀態。得到結論：

> 定理 4：
> 若 $x+y=p\times2^k\ (p\neq1)$ 且 $\gcd(x,y)=r\times2^m$, p, r 為奇數，
> 則(x, y) 形成穩定狀態的充要條件為 $p=r$。

四、結語

一個簡單的規則：「從較多的一堆，取出較少一堆的數量，將其移至較少的一堆，反覆這樣的移動過程，直至兩堆數量相等」，在這樣的移動過程中，兩堆數量總和不變，我們依數量和進行有系統地進行分析，由實驗數據形成猜測，在驗證的過程中，意外發現二進位制的妙用，藉此得到形成穩定狀態的充要條件與次數，詳細的探索過程可參閱文獻 1。

參考資料

陳奕均(2015)，第 55 屆全國中小學科展國中組數學科作品。從平分問題到動態穩定。

附錄一：

$x+y=2^k$ 時，(x , y) 的最少移動次數

1. y 為奇數：

   當 $x+y=8=2^3$ 時，(7, 1), (5, 3) 形成等量狀態次數皆為 2。

   當 $x+y=16=2^4$ 時，(15, 1), (13, 3), (11, 5), (9, 7) 形成穩定狀態皆為 3 次。

   得猜測：「若 p 為奇數，則數對 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1$ 次。」

2. $y=2p$ (p 為奇數)：

   列出 $y=2p$ (p 為奇數)時形成穩定狀態的次數：

$x+y$	2^k	k	x	y	形成穩定狀態的次數
8	2^3	3	6	2	1
16	2^4	4	14	2	2
			10	6	

所以得出猜測：「數對 $(2^k-2p,2p)$ 形成穩定狀態所需的次數為 $k-2$ 次。」

3. $y=p\times2^m$ (p 為奇數)：

列出當 $y=4p$ (p 為奇數)時形成穩定狀態的次數：

$x+y$	2^k	k	x	y	形成穩定狀態的次數
8	2^3	3	4	4	0
16	2^4	4	12		1
32	2^5	5	28		2
32	2^5	5	20	12	2

歸納一般 的情形如下：

$x+y$	x	y	形成穩定狀態的次數
2^k	$2^k-p\times2^m$	$p\times2^m$	$k-1-m$

其中當 $x+y=2^k$, $y=p\times2^m$ 時 $x=2^k-p\times2^m$,進一步得 x,y 的最大公因數 $\gcd(x,y)=2^m$，所以得出猜測二如下：

> 猜測二：形成穩定狀態的次數
>
> 當 $x+y=2^k$, $\gcd(x,y)=2^m$ 時，數對 (x,y) 形成穩定狀態所需的次數為 $k-1-m$ 次。