帶電粒子在電場和磁場中的運動

黃光照
臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

在 95 年指定科目物理考科中，第 15 題(E)選項考了帶電質點以 y 方向的初速，進入 x 方向的均勻磁場及電場中，其軌跡為拋物線。無獨有偶地，在 96 年第 6 題(E)選項再次考了帶電質點在相互垂直的電磁場中，在原點處由靜止釋放，其運動軌跡為圓形。我們知道帶電質點在靜電場中會受到電力，而具有速度 $\vec{v}$ 的帶電質點在磁場中會受到磁力。如果空間中僅有電場或磁場，那麼帶電質點在其中的運動性質和軌跡都是比較簡單的。而當電場和磁場同時存在時，對帶電質點所受的作用力將是電力和磁力的向量和，這時其運動性質和軌跡就較為複雜。本文將按電場和磁場的組合方式以及帶電粒子進入場的方向做有系統地進行分類處理，討論帶電質點的運動情況及其軌跡，如此不但可知上述兩選項的對錯，更能一探此類問題之全貌。

貳、推導帶電粒子在電場和磁場中運動軌跡的參數方程式

如圖 1 所示，空間存在均勻的磁場 $\vec{B}=B\vec{j}$ 和均勻的電場 $\vec{E}$，其中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 夾 θ 角，即 $\vec{E} = E\sin\theta\vec{i} + E\cos\theta\vec{j}$。一帶正電 q，質量為 m 的質點，於時間 $t=0$，在原點 O 處以初速 $\overrightarrow{v_0}=(v_{0x},v_{0y},v_{0z})$，射入此均勻的電磁場中。帶電質點所受的作用力為

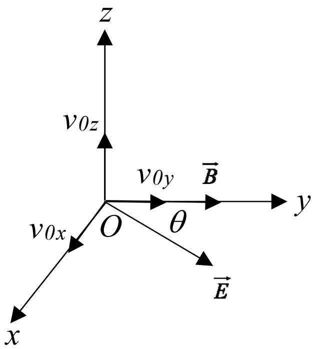


圖 1

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=q\left(\left(E\sin\theta\vec{i}+E\cos\theta\vec{j}\right)+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & B & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$=q\left[(E\sin\theta-B\dot{z})\vec{i}+(E\cos\theta)\vec{j}+B\dot{x}\vec{k}\right]$$

$$=m\vec{a}=m(\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}) \quad\cdots\cdots (1)$$

因此

$$m\ddot{x}=qE\sin\theta-qB\dot{z} \quad\cdots\cdots (2)$$

$$m\ddot{y}=qE\cos\theta \quad\cdots\cdots (3)$$

$$m\ddot{z}=qB\dot{x} \quad\cdots\cdots (4)$$

將(2)式對 t 微分

$$m\dddot{x}=-qB\ddot{z} \quad\cdots\cdots (5)$$

將(4)式代入(5)式，得

$$m\dddot{x}=-\frac{q^2B^2}{m}\dot{x} \quad \text{即} \quad \frac{\mathrm{d}^2(\dot{x})}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q^2B^2}{m^2}(\dot{x})=0 \quad\cdots\cdots (6)$$

解(6)式，得

$$\dot{x}=v_m\cos\left(\frac{qB}{m}t+\varphi\right) \quad\cdots\cdots (7)$$

其中　　v_m和 φ 為待定常數

將(7)式對時間微分，得

$$\ddot{x}=-\frac{qBv_m}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi\right) \quad\cdots\cdots (8)$$

將(8)式代入(2)式得：

$$\dot{z}=\frac{E\sin\theta}{B}+v_m\sin\left(\frac{qB}{m}t+\varphi\right) \quad\cdots\cdots (9)$$

將初始條件：$t=0$，$\dot{x}=v_{0x}$，$\dot{y}=v_{0y}$，$\dot{z}=v_{0z}$ 代入(7)式和(9)式得：

$$v_{0x}=v_m\cos\varphi \text{，即} \cos\varphi=\frac{v_{0x}}{v_m} \quad\cdots\cdots (10)$$

$$v_{0z}=\frac{E\sin\theta}{B}+v_m\sin\varphi \text{，即} \sin\varphi=\frac{v_{0z}-\dfrac{E\sin\theta}{B}}{v_m} \quad\cdots\cdots (11)$$

將(10)、(11)兩式代入(7)式得

$$\dot{x} = v_m\left[\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\cos\varphi - \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\sin\varphi\right]$$

$$= v_m\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\cdot\frac{v_{0x}}{v_m} - \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\cdot\frac{\left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)}{v_m}\right)$$

$$= v_{0x}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad \text{......} (12)$$

將(10)、(11)兩式代入(9)式得

$$\dot{z} = \frac{E\sin\theta}{B} + v_m\left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\cdot\frac{v_{0x}}{v_m} + \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\cdot\frac{\left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)}{v_m}\right]$$

$$= \frac{E\sin\theta}{B} + v_{0x}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad \text{......} (13)$$

將(3)式對時間 t 積分兩次，並將初始條件 $t = 0$，$y = 0$，$\dot{y} = v_{0y}$ 代入，很容易得到

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE\cos\theta}{m}t^2 + v_{0y}t \quad \text{......} (14)$$

將(12)式和(13)式對時間 t 積分，得：

$$x(t) = \frac{mv_{0x}}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB}\left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + c_1 \quad \text{......} (15)$$

$$z(t) = \frac{E\sin\theta}{B}t - \frac{mv_{0x}}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{m}{qB}\left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + c_2 \quad \text{......} (16)$$

將初始條件：$t = 0$，$x = 0$，$z = 0$ 代入(15)式和(16)式得：

$$c_1 = -\frac{m}{qB}\left(v_{0z} - \frac{E\sin\theta}{B}\right) \quad \text{......} (17)$$

$$c_2 = \frac{mv_{0x}}{qB} \quad \text{......} (18)$$

將(17)式和(18)式，代入(15)式和(16)式得：

$$x(t)=\frac{mv_{0x}}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)-\frac{m}{qB}\left(v_{0z}-\frac{E\sin\theta}{B}\right)\left[1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \text{ .... (19)}$$

$$z(t)=\frac{E\sin\theta}{B}t+\frac{mv_{0x}}{qB}\left[1-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]+\frac{m}{qB}\left(v_{0z}-\frac{E\sin\theta}{B}\right)\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \text{ ...... (20)}$$

綜合(14)、(19)和(20)式，得到帶電質點在均勻電場和均勻磁場中運動軌跡的參數方程式如下：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{mv_{0x}}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right)-\dfrac{m}{qB}\left(v_{0z}-\dfrac{E\sin\theta}{B}\right)\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \\ y(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{qE\cos\theta}{m}t^2+v_{0y}t \\ z(t)=\dfrac{E\sin\theta}{B}t+\dfrac{mv_{0x}}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right]+\dfrac{m}{qB}\left(v_{0z}-\dfrac{E\sin\theta}{B}\right)\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \end{cases} \text{ ....(21)}$$

參、物理教學中常遇到的幾種情況

一、空間中僅有均勻電場 $\vec{E}$

(一)當帶電質點自原點 O 沿 $\vec{E}$ 方向射入時：

取 $\vec{E}=E\vec{j}$，即 $\theta=0^o$、$\vec{v_0}=v_0\vec{j}$，見圖 2。

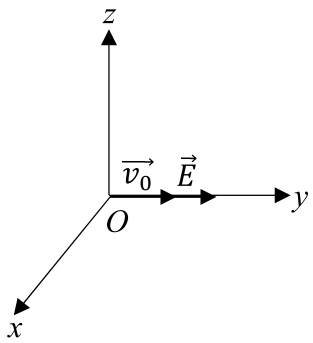


圖 2

由於帶電質點在 x、z 軸兩方向不受力，y 軸作等加速運動，參考(14)式知：

$$\begin{cases} x(t)=z(t)=0 \\ y(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2+v_0t \end{cases} \text{ .... (22)}$$

帶電質點沿 y 軸正向作等加速度直線運動。

(二) 當帶電質點自原點 *O* 和 $\vec{E}$ 方向夾一角度射入時：

取 $\vec{E}=-E\vec{j}$，即 $\theta = 180^{o}$、$\vec{v_0}=v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}$、$v_{0z}=0$，由於帶電質點在 x 軸和 z 軸方向皆不受力且 $v_{0z}=0$，因此在 x 軸上作等速直線運動而 $z(t)=0$，至於 y 軸則作等加速度運動，故得出

$$\begin{cases} x(t)=v_{0x}t \\ y(t)=v_{0y}t-\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2 \\ z(t)=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (23)$$

帶電質點是在 x-y 平面上作拋物線的等加速度運動，如圖 3 所示。

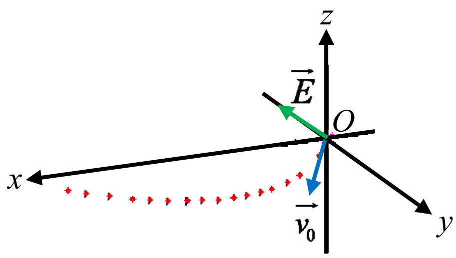


圖 3

二、空間中僅有均勻磁場 $\vec{B}$

因 $\vec{\boldsymbol{E}}=\mathbf{0}$，(21)式可化簡成

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{mv_{0x}}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right)-\dfrac{mv_{0z}}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \\ y(t)=v_{0y}t \\ z(t)=\dfrac{mv_{0x}}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right]+\dfrac{mv_{0z}}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots (24)$$

(一) 當 $\vec{v_0}$ 平行 $\vec{B}$，帶電質點自原點 *O* 射入：

取 $\vec{B}=B\vec{j}$，$v_{0y}=v_0$，$v_{0x}=v_{0z}=0$，代入(24)式，得

$x(t)=z(t)=0$，$y(t)=v_0t$，帶電質點沿磁場方向作等速直線運動，即磁場對此質點無作用力。

(二) 當 $\overrightarrow{v_0}$ 垂直 $\vec{B}$，帶電質點自原點 *O* 射入：

取 $\vec{B} = B\vec{j}$ 、$v_{0x} = v_0$、$v_{0y} = v_{0z} = 0$，代入(24)式，得

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_0}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \dfrac{mv_0}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \end{cases} \qquad \cdots\cdots (25)$$

進一步推得 $x^2 + (z - \dfrac{mv_0}{qB})^2 = (\dfrac{mv_0}{qB})^2$，帶電質點在 x-z 平面內，以 $(0,0,\dfrac{mv_0}{qB})$ 為圓心，$\dfrac{mv_0}{qB}$ 為半徑作等速率圓周運動。

(三) 當 $\overrightarrow{v_0}$ 既非平行、也非垂直 $\vec{B}$，帶電質點自原點 *O* 射入：

取 $\vec{B} = B\vec{j}$ 、 $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ 、 $v_{0z} = 0$ ，代入(24)式，得

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_{0x}}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \\ y(t) = v_{0y}t \\ z(t) = \dfrac{mv_{0x}}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \end{cases} \qquad \cdots\cdots (26)$$

進一步推得 $x^2 + (z - \dfrac{mv_{0x}}{qB})^2 = (\dfrac{mv_{0x}}{qB})^2$ ，帶電質點投影在 x-z 平面內的運動，是以 $(0,0,\dfrac{mv_{0x}}{qB})$ 為圓心，$\dfrac{mv_{0x}}{qB}$ 為半徑作等速率圓周運動。而在平行 $\vec{B}$ 方向上(即 y 軸上)作等速直線運動，而這兩種運動的結合就是所謂的螺旋線運動，如圖 4 所示。以上所述，帶電質點在只有均勻電場或磁場中的運動行為是高中生所熟悉的。

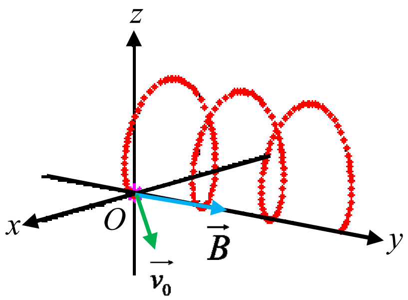


圖 4

三、空間中同時存在均勻的電場$\vec{E}$和磁場$\vec{B}$

(一) 假設 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 均沿 y 軸正向，帶電質點以 $\vec{v_0}$ 沿 x 軸方向自原點 O 射入[註 1]：

以 $\theta=0^0$、$\vec{E}=E\vec{j}$、$\vec{B}=B\vec{j}$、$v_{0x}=v_0$、$v_{0y}=v_{0z}=0$，代入(21)式，得

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{mv_0}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \\ y(t)=\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2 \\ z(t)=\dfrac{mv_0}{qB}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \end{cases} \qquad \cdots\cdots (27)$$

又 $x^2+(z-\dfrac{mv_0}{qB})^2=\left(\dfrac{mv_0}{qB}\right)^2$ 由此可知，帶電質點投影在 x-z 平面內的運動，是以 $(0,0,\dfrac{mv_0}{qB})$為圓心，作半徑 $r=\dfrac{mv_0}{qB}$，週期 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$的等速率圓周運動。在 y 方向作等加速度 $a=\dfrac{qE}{m}$ 直線運動。質點的合成運動是不等距的螺旋線運動，轉一周前進螺距 $d=\dfrac{1}{2}a(nT)^2-\dfrac{1}{2}a\left[(n-1)T\right]^2=\dfrac{(2n-1)}{2}aT^2$，螺距比 $d_1:d_2:d_3\cdots=1:3:5\cdots$，如圖 5 所示。

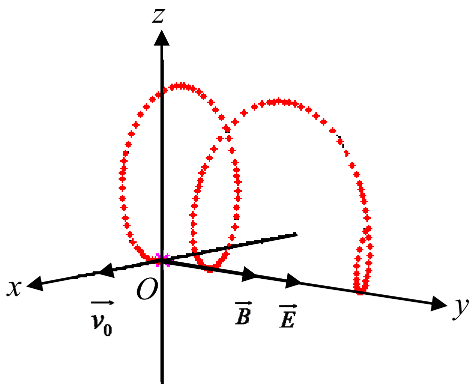


圖 5

(二) 假設 $\vec{E}$ 沿 x 軸正向、$\vec{B}$ 沿 y 軸正向，帶電質點以 $\vec{v}_0$ 沿 z 軸方向自原點 O 射入：

以 $\theta = 90^o$、$\vec{E} = E\vec{i}$ 、$\vec{B} = B\vec{j}$、$v_{0z} = v_0$、$v_{0x} = v_{0y} = 0$ 代入(21)式，得

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \dfrac{E}{B}t + \dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \\ \quad\;\; = \dfrac{mE}{qB^2}\left(\dfrac{qB}{m}t\right) + \dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots (28)$$

令 $b = -\dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)$、$a = \dfrac{mE}{qB^2}$、$\theta = \dfrac{qB}{m}t$，代入(28)式，得

$$\begin{cases} x(t) = b(1-\cos\theta) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = a\theta - b\sin\theta \end{cases} \quad \cdots\cdots (29)$$

下列分三種情況討論：

1. 當 $v_0 < \dfrac{E}{B}$ 時：$b > 0$、$a > 0$、$a - b = \dfrac{mv_0}{qB} > 0$，即 $a > b$。當 v_0 增大時，由 $b = -\dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{E}{B}\right)$，可見 b 減小，軌跡將向 z 軸靠攏，如圖6所示，圖中的曲線①、②、③ 代表速率 v_0 逐漸增大。

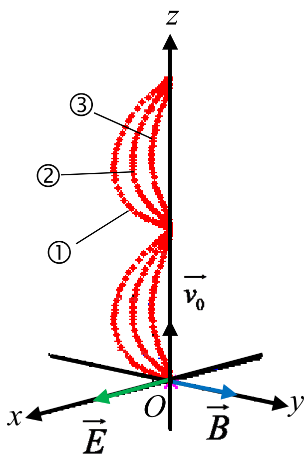


圖 6

2. $v_0=\dfrac{E}{B}$時： $b=0$ 、 $a\theta=\dfrac{E}{B}t=v_0t$ ，方程式(29)式變為

$$\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=0 \\ z(t)=v_0t \end{cases} \qquad \cdots\cdots (30)$$

可見帶電質點沿 z 軸作等速直線運動，此時帶電質點所受到的電力和磁力平衡。

3. $v_0>\dfrac{E}{B}$時： $b<0$ ， $a>0$ ， $a-|b|=\dfrac{m}{qB}\left(\dfrac{2E}{B}-v_0\right)$ ，再細分 3 種情況：

① 當 $\dfrac{2E}{B}>v_0$時： $a>|b|$ ，帶電質點的運動軌跡如圖 7-①。

② 當 $\dfrac{2E}{B}=v_0$時： $a=|b|$ ，帶電質點的運動軌跡為普通擺線(cycloid) [註 2]，如圖 7-②。

③ 當 $\dfrac{2E}{B}<v_0$時： $a<|b|$ ，帶電質點的運動軌跡如圖 7-③。

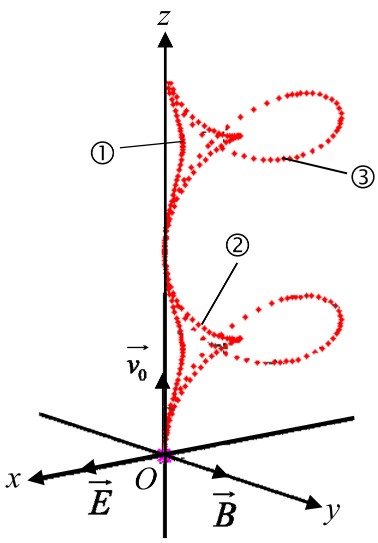


圖 7

(三) 假設 $\vec{E}$ 沿 x 軸正向、$\vec{B}$ 沿 y 軸正向，帶電質點自原點 O 由靜止釋放[註 3]**：**

以 $\theta = 90^o$、 $\vec{E}=E\vec{i}$ 、 $\vec{B}=B\vec{j}$ 、 $v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$，代入(21)式得

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{mE}{qB^2}\left[1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \\ y(t)=0 \\ z(t)=\dfrac{E}{B}t-\dfrac{mE}{qB^2}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right)=\dfrac{mE}{qB^2}\left[\dfrac{qB}{m}t-\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right] \end{cases}$$

令 $a=\dfrac{mE}{qB^2}$ 、 $\theta=\dfrac{qB}{m}t$ 代入上式得

$$\begin{cases} x(t)=a(1-\cos\theta) \\ y(t)=0 \\ z(t)=a(\theta-\sin\theta) \end{cases} \qquad \text{.......} (31)$$

帶電質點的運動軌跡為普通擺線，見圖 8。

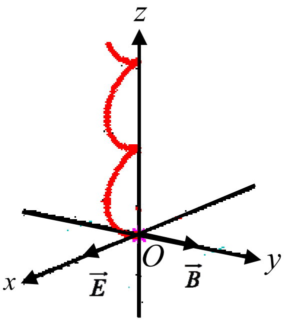


圖 8

肆、結論

帶電質點在僅有均勻電場或磁場中的運動，它的運動軌跡可以是拋物線、直線、圓或螺旋線。而在均勻電場和均勻磁場同時存在時，帶電質點在其間的軌跡方程式如(21)式所示。當均勻電場和均勻磁場在同一方向時，帶電質點在其間的運動，它的運動軌跡可以是直線、不等距的螺旋線或擺線，而當均勻電場和均勻磁場相互垂直時，它的運動軌跡可以是擺線。

伍、參考文獻

傅靜之(1988)：帶電質點在電場和磁場中的運動。物理教學，7，4-8 頁。
方文川、黃書鵬(2015)：帶電質點在均勻電磁場中運動分類淺析。物理之友，31(3)，31-35。

陸、備註

[註 1]

95 年指定科目物理考科中第 15 題：

在 *xyz* 直角坐標中，下列有關帶電質點在電磁場中運動軌跡的敘述，何者是正確的？

(A)質點以 y 方向的初速，進入 x 方向的均勻電場中，其軌跡為拋物線

(B)質點以 x 方向的初速，進入 x 方向的均勻電場中，其軌跡為拋物線

(C)質點以 z 方向的初速，進入 x 方向的均勻磁場中，其軌跡為圓弧

(D)質點以 y 方向的初速，進入 x 方向的均勻磁場中，其軌跡為螺線

(E)質點以 y 方向的初速，進入 x 方向的均勻磁場及電場中，其軌跡為拋物線。

其中(E)選項的質點軌跡正是文中所述的【不等距螺旋線】。

本題也可應用『運動的獨立性原理』來解題：

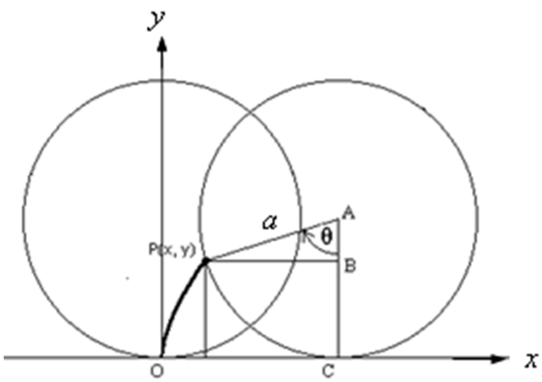
因入射的初速$\overrightarrow{\boldsymbol{v_0}}$垂直於電場$\vec{\boldsymbol{E}}$和磁場$\vec{B}$，故在與 x 軸垂直的平面內不受靜電力作用，又磁力 $\overrightarrow{F_B} = q\overrightarrow{v_0} \times \vec{B}$ 恆不對質點作功，故此質點在 yz 平面上的投影，係作等速率圓周運動。至於平行於 x 軸方向上，作初速為零的等加速運動。綜合以上兩種運動，該質點的運動軌跡為不等距的螺旋線。

[註 2]

設有半徑為 a 的圓，位於原點 O 且與 x 軸相切，沿著正 x 軸方向純滾動。圓上一點 $P(x, y)$，自原點處開始移動。當圓滾動角度為 θ，即$\angle BAP = \theta$，則圓自原點 O 移至 C 點，移動的距離為 $a\theta$，亦為 PC 弧長，如下圖所示。，我們可得下列式子：

$$\overline{OC} = \overset{\frown}{PC} = a\theta$$

$$\begin{cases} x = \overline{OC} - \overline{PB} = a(\theta - \sin\theta) \\ y = \overline{CA} - \overline{BA} = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



上述式子也可如下推導：

(1) 假設圓先在原地轉動 θ，$P(x,y)$： $x = -a\sin\theta$ ， $y = a(1-\cos\theta)$

(2) 設 P 原在圓心的正下方，考慮圓沿$+x$ 軸純滾動，往前移動了 $a\theta$ ，則 $P(x,y)$須修正為 $P(x,y)$： $x = a(\theta - \sin\theta)$ ， $y = a(1-\cos\theta)$

又若 P 點不是位在圓周上，而是位在圓內或圓外且距圓心為 b，則上述 P 點的軌跡方程式可以很容易得出

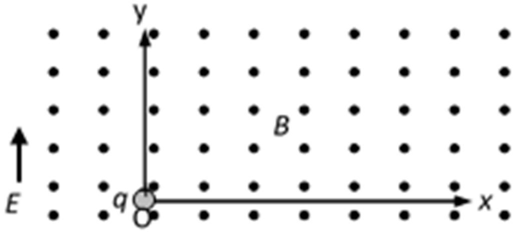
$$\begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$$

此軌跡稱為次擺線(trochoid)。當 $b < a$ 時，稱短擺線(curtate cycloid)；當 $b > a$ 時，稱長擺線(prolate cycloid)。

【註 3】

96 年指定科目物理考科中第 6 題：

如右圖所示，在平行於+y 方向上施加一強度為 E 的均勻電場，另在垂直射出紙面的方向上施加一強度為 B 的均勻磁場。起始時，有一質量為 m、帶有正電荷 q 的質點，靜止放置在原點處。只受此電磁場的作用下(重力可不計)，則在質點的運動過程中，下列敘述何者正確？



(A) 任何時刻質點的加速度朝向+y 方向　(B) 任何時刻磁場對質點不作功

(C) 任何時刻電場對質點不作功　(D) 任何時刻磁場對質點的作用力為零

(E) 質點在此電磁場中的運動軌跡為圓形。

此題(E)選項帶電質點的運動軌跡，誠如正文中所述為一普通的擺線，如下圖所示。