費氏數列多重卷積恆等式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

將 $\sum\limits_{i+j=n} F_i F_j$ 稱作費氏數列的「二重卷積」，而 $\sum\limits_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}$ 稱作費氏數列的「 $(m+1)$ 重卷積」。關於費氏數列的多重卷積，目前已知的結果有

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{a_1}\cdot F_{a_2}\cdot\cdots\cdot F_{a_k} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_m^{n+k-1-m}\cdot C_{k-1}^{n+k-1-2m}$$ (參考資料[1])，以及

$$\sum_{a+b=n} F_a F_b = \frac{1}{5}\left[(n-1)\cdot F_n + 2n\cdot F_{n-1}\right]，\ n\ge 1$$ 與

$$\sum_{a+b+c=n} F_a F_b F_c = \frac{1}{50}\left[(5n^2-9n-2)F_{n-1} + (5n^2-3n-2)F_{n-2}\right]，\ n\ge 2$$ 與

$$\sum_{a+b+c+d=n} F_a F_b F_c F_d = \frac{1}{150}\left[(4n^3-12n^2-4n+12)F_{n-2} + (3n^3-6n^2-3n+6)F_{n-3}\right]，\ n\ge 3。$$

(參考資料[2])

而在「費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式」(參考資料[3])一文中，運用「完全齊次對稱多項式」的性質(參考資料[4][5][6][7])，筆者推導並證明了 $\sum\limits_{i+j=n} F_i F_j = \dfrac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}$ 。更一般的研究興趣，在尋求「多重卷積」 $\sum\limits_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}$ 的表達式。在本篇文章中，筆者將透過「完全齊次對稱多項式」的性質--「取相同變數公式」，得到 $\sum\limits_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}$ 的一個新的表達式：

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1}(-1)^i C_m^{n-1-i}C_m^{m+i}L_{n-m-1-2i} & \text{，當}(n-m)\text{為偶數}\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1}(-1)^i C_m^{n-1-i}C_m^{m+i}L_{n-m-1-2i}+(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}\cdot\left(C_m^{\frac{n+m-1}{2}}\right)^2 & \text{，當}(n-m)\text{為奇數}\end{cases}$$

其中 $n>m+1$，且 $\left[\frac{n-m}{2}\right]$ 為不大於 $\frac{n-m}{2}$ 的最大整數。

此表達式為本人之原創，特此聲明。

貳、本文

一、記號、定義與已知公式

(一) 完全齊次對稱多項式 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

定義：$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「$n$ 元 k 次完全齊次對稱多項式」。

特別地，$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，且 $h_k(a)=a^k$。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$。

例：$h_n(\alpha,\beta)=\displaystyle\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}}(\alpha^i\beta^j)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$

(二) 費氏數列 (Fibonacci Numbers)

定義：滿足「$F_1=1$，$F_2=1$，以及遞迴關係 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，其中 $n=1,2,\cdots$」的數列，稱為「費氏數列」(Fibonacci Numbers)，此數列的前幾項為：1，1，2，3，5，8，……。

設 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$，則費氏數列的一般項為

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$ (參考資料[8])。

(三) 魯卡斯數列 (Lucas Numbers)

定義：滿足「$L_1=1$，$L_2=3$，以及遞迴關係 $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$，其中 $n=1,2,\cdots$」的數列，稱為「魯卡斯數列」(Lucas Numbers)，此數列的前幾項為：1，3，4，7，11，18，29，47，……。

設 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α 與 β，取 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，則魯卡斯數列的一般項為 $L_n=\alpha^n+\beta^n$ (參考資料[8])。

(四) 自由分解重組恆等式 (參考資料[4])

$$h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\cdots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2})\cdot\cdots\cdot h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m})]，$$

其中 $i_m=n$。

例：$h_3(a,b,c,d)=\displaystyle\sum_{\substack{i+j=3\\ i,j\ge 0}}h_i(a,b)\cdot h_j(c,d)$

$$=h_3(a,b)\cdot h_0(c,d)+h_2(a,b)\cdot h_1(c,d)+h_1(a,b)\cdot h_2(c,d)+h_0(a,b)\cdot h_3(c,d)$$

註：變數 a,b,c,d 分成 2 組：第一組為 a,b，第二組為 c,d。在此例中，$m=2$，$k=3$，$k_1=i$，$k_2=j$，$i_1=2$，$i_2=4$，$a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=c$，$a_4=d$。

(五) 取相同變數公式 (參考資料[5])

$$h_k(\underbrace{a_1,\cdots,a_1}_{p_1+1\text{個}},\underbrace{a_2,\cdots,a_2}_{p_2+1\text{個}},\cdots,\underbrace{a_m,\cdots,a_m}_{p_m+1\text{個}})=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}}(C_{p_1}^{p_1+k_1}{a_1}^{k_1})(C_{p_2}^{p_2+k_2}{a_2}^{k_2})\cdots(C_{p_m}^{p_m+k_m}{a_m}^{k_m})$$

例：一方面，$h_2(a,b,c,d,e)=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$

$$\Rightarrow h_2(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta)=3\alpha^2+6\alpha\beta+6\beta^2$$

另一方面，$\displaystyle\sum_{\substack{i+j=2\\ i,j\ge 0}}[(C_1^{i+1}\alpha^i)\cdot(C_2^{j+2}\beta^j)]=C_1^3C_2^2\alpha^2\beta^0+C_1^2C_2^3\alpha^1\beta^1+C_1^1C_2^4\alpha^0\beta^2=3\alpha^2+6\alpha\beta+6\beta^2$

註：在此例中，$m=2$，$k=2$，$p_1=1$，$p_2=2$，$a_1=\alpha$，$a_2=\beta$，$k_1=i$，$k_2=j$。

二、公式推導

(一) 四個性質與主要引理：設 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根。

<u>性質 1.</u> $F_{n+1}=h_n(\alpha,\beta)$。

證明：由費氏數列的比內(Binet)公式，得

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n=h_n(\alpha,\beta)。$$

註：即**費氏數列可轉化為二元齊次對稱多項式**，其中 F 與 h 的下標相差 1。

性質 2. $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} F_{a_1}F_{a_2}\cdots\cdots F_{a_p}F_{a_{p+1}}$

$$=\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} h_{a_1-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_2-1}(\alpha,\beta)\cdots\cdots h_{a_p-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_{p+1}-1}(\alpha,\beta)$$

證明：由性質 1，知 $F_{a_j}=h_{a_j-1}(\alpha,\beta)$，其中 $j=1,2,\cdots,p+1$，得證。

性質 3. $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} h_{a_1-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_2-1}(\alpha,\beta)\cdots\cdots h_{a_p-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_{p+1}-1}(\alpha,\beta)$

$$=h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1\text{個}},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1\text{個}})$$

證明：由「自由分解重組恆等式」(參考資料[4])，有

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\cdots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2})\cdots\cdots h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m})]$$

$=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_{i_1},a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2},\cdots,a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m})=h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。 (註)

在此恆等式中，取 $m=p+1$， $n=2p+2$， $k=N-(p+1)$，

$k_1=a_1-1$， $k_2=a_2-1$， …， $k_{p+1}=a_{p+1}-1$，

$i_1=2$， $i_2=4$， …， $i_m=2m=2(p+1)=n$，

$a_1=\alpha$， $a_2=\beta$， $a_3=\alpha$， $a_4=\beta$， …， $a_{2p+1}=\alpha$， $a_{2p+2}=\beta$，

可得 $\displaystyle\sum_{(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_{p+1}-1)=N-(p+1)} h_{a_1-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_2-1}(\alpha,\beta)\cdots\cdots h_{a_p-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_{p+1}-1}(\alpha,\beta)$

$$=h_{N-p-1}(\underbrace{\alpha,\beta,\alpha,\beta,\cdots,\alpha,\beta}_{\text{共}(p+1)\text{對}\alpha,\beta})=h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1\text{個}},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1\text{個}})$$

$$\Rightarrow \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} h_{a_1-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_2-1}(\alpha,\beta)\cdots\cdots h_{a_p-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_{p+1}-1}(\alpha,\beta)$$

$=h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1\text{個}},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1\text{個}})$，得證。

註：變數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分成 m 組：第一組為 $a_1,a_2,\cdots,a_{i_1}$，第二組為 $a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2}$，……，第 m 組為 $a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m}$，其中 $a_{i_m}=a_n$。

性質 4. $\displaystyle h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1\text{個}},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1\text{個}})=\sum_{\substack{k_1+k_2=N-p-1\\ k_1,k_2\ge 0}}(C_p^{k_1+p}C_p^{k_2+p}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})$

證明：由「變數不全相異」的完全齊次對稱多項式，有

$$h_k(\underbrace{a_1,\cdots,a_1}_{p_1+1個},\underbrace{a_2,\cdots,a_2}_{p_2+1個},\cdots,\underbrace{a_m,\cdots,a_m}_{p_m+1個}) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k \\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}} (C_{p_1}^{p_1+k_1}{a_1}^{k_1})(C_{p_2}^{p_2+k_2}{a_2}^{k_2})\cdots(C_{p_m}^{p_m+k_m}{a_m}^{k_m})$$

在此恆等式中，取 $m=2$， $k=N-(p+1)$， $p_1=p_2=p$ ， $a_1=\alpha$ ， $a_2=\beta$ ，可得

$$h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1個},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1個}) = \sum_{\substack{k_1+k_2=N-(p+1) \\ k_1,k_2\ge 0}} (C_p^{p+k_1}\alpha^{k_1})(C_p^{p+k_2}\beta^{k_2})$$

$$= \sum_{\substack{k_1+k_2=N-p-1 \\ k_1,k_2\ge 0}} (C_p^{k_1+p}C_p^{k_2+p}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})$$ ，得證。

<u>主要引理：</u> $\displaystyle\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}} = \sum_{\substack{k_1+k_2=n-m-1 \\ k_1,k_2\ge 0}} (C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})$ ，其中 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根。

證明：由性質 2、性質 3 與性質 4，可得

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} F_{a_1}F_{a_2}\cdots\cdots F_{a_p}F_{a_{p+1}}$$

$$= \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{p+1}=N} h_{a_1-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_2-1}(\alpha,\beta)\cdots\cdots h_{a_p-1}(\alpha,\beta)\cdot h_{a_{p+1}-1}(\alpha,\beta) \qquad (性質\ 2)$$

$$= h_{N-(p+1)}(\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{p+1個},\underbrace{\beta,\beta,\cdots,\beta}_{p+1個}) \qquad (性質\ 3)$$

$$= \sum_{\substack{k_1+k_2=N-p-1 \\ k_1,k_2\ge 0}} (C_p^{k_1+p}C_p^{k_2+p}\alpha^{k_1}\beta^{k_2}) \qquad (性質\ 4)$$

將 N 換成 n ， p 換成 m ，即得

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}} = \sum_{\substack{k_1+k_2=n-m-1 \\ k_1,k_2\ge 0}} (C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})$$ 。

(二) 主要定理(費氏數列多重卷積恆等式)

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}$$

$$
=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1}(-1)^i C_m^{n-1-i}C_m^{m+i}L_{n-m-1-2i} & ,當(n\text{-}m)為偶數\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1}(-1)^i C_m^{n-1-i}C_m^{m+i}L_{n-m-1-2i}+(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}\cdot(C_m^{\frac{n+m-1}{2}})^2 & ,當(n\text{-}m)為奇數\end{cases},
$$

其中 $n>m+1$，且 $\left[\frac{n-m}{2}\right]$為不大於 $\frac{n-m}{2}$ 的最大整數。

證明：首先，由「主要引理」，可知

$$
\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n}F_{a_1}F_{a_2}\cdots F_{a_m}F_{a_{m+1}}=\sum_{\substack{k_1+k_2=n-m-1\\k_1,k_2\ge 0}}(C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2}),
$$

其中 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根。

接著，就 k_1+k_2 的奇偶性分情形討論：

Case1. k_1+k_2 為奇數(此時 $n-m$ 為偶數)：設 $k_1+k_2=2p+1\ge 0$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_1+k_2=2p+1}(C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})\\
&=\sum_{\substack{k_1+k_2=2p+1\\k_1>k_2}}(C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})+\sum_{\substack{k_1+k_2=2p+1\\k_1<k_2}}(C_m^{k_1+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{k_1}\beta^{k_2})\\
&=\sum_{k_2=0}^{p}C_m^{2p+1-k_2+m}C_m^{k_2+m}\alpha^{2p+1-k_2}\beta^{k_2}+\sum_{k_1=0}^{p}C_m^{k_1+m}C_m^{2p+1-k_1+m}\alpha^{k_1}\beta^{2p+1-k_1}\\
&=\sum_{i=0}^{p}C_m^{2p+1-i+m}C_m^{i+m}\alpha^{2p+1-i}\beta^{i}+\sum_{i=0}^{p}C_m^{i+m}C_m^{2p+1-i+m}\alpha^{i}\beta^{2p+1-i}\\
&=\sum_{i=0}^{p}C_m^{2p+1-i+m}C_m^{i+m}(\alpha^{2p+1-i}\beta^{i}+\alpha^{i}\beta^{2p+1-i})\\
&=\sum_{i=0}^{p}C_m^{(2p+1)-i+m}C_m^{i+m}(\alpha\beta)^i(\alpha^{2p+1-2i}+\beta^{2p+1-2i})\\
&=\sum_{i=0}^{\frac{n-m-2}{2}}C_m^{(n-m-1)-i+m}C_m^{m+i}(-1)^iL_{(2p+1)-2i}=\sum_{i=0}^{\frac{n-m-2}{2}}(-1)^iC_m^{n-1-i}C_m^{m+i}L_{n-m-1-2i}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i}$$

Case2. $k_1 + k_2$ 為偶數(此時 $n-m$ 為奇數)：

設 $k_1 + k_2 = 2p \geq 0$ ， $\sum_{k_1+k_2=2p} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2})$

$$= \sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1>k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2}) + \sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1<k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2})$$

$$+ \sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1=k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2})$$

注意到 $\sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1=k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2}) = (C_m^{p+m})^2 (\alpha\beta)^p = (C_m^{p+m})^2 \cdot (-1)^p$

$$= (C_m^{\frac{n+m-1}{2}})^2 \cdot (-1)^{\frac{n-m-1}{2}} ,$$

且 $\sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1>k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2}) + \sum_{\substack{k_1+k_2=2p \\ k_1<k_2}} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2})$

$$= \sum_{k_2=0}^{p-1} C_m^{2p-k_2+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{2p-k_2} \beta^{k_2} + \sum_{k_1=0}^{p-1} C_m^{k_1+m} C_m^{2p-k_1+m} \alpha^{k_1} \beta^{2p-k_1}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} C_m^{2p-i+m} C_m^{i+m} \alpha^{2p-i} \beta^i + \sum_{i=0}^{p-1} C_m^{i+m} C_m^{2p-i+m} \alpha^i \beta^{2p-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} C_m^{2p-i+m} C_m^{i+m} (\alpha^{2p-i} \beta^i + \alpha^i \beta^{2p-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} C_m^{2p-i+m} C_m^{i+m} (\alpha\beta)^i (\alpha^{2p-2i} + \beta^{2p-2i})$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n-m-3}{2}} C_m^{(n-m-1)-i+m} C_m^{m+i} (-1)^i L_{2p-2i} = \sum_{i=0}^{\frac{n-m-3}{2}} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i}$$

可得 $\sum_{k_1+k_2=2p} (C_m^{k_1+m} C_m^{k_2+m} \alpha^{k_1} \beta^{k_2})$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{n-m-3}{2}} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i} + (-1)^{\frac{n-m-1}{2}} \cdot (C_m^{\frac{n+m-1}{2}})^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i} + (-1)^{\frac{n-m-1}{2}} \cdot (C_m^{\frac{n+m-1}{2}})^2$$

綜合以上兩種情形，即得

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_m} F_{a_{m+1}}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i} & ,\text{當}(n-m)\text{為偶數} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]-1} (-1)^i C_m^{n-1-i} C_m^{m+i} L_{n-m-1-2i} + (-1)^{\frac{n-m-1}{2}} \cdot (C_m^{\frac{n+m-1}{2}})^2 & ,\text{當}(n-m)\text{為奇數} \end{cases},$$

其中 $n > m+1$，且 $\left[\frac{n-m}{2}\right]$ 為不大於 $\frac{n-m}{2}$ 的最大整數。

註：對於 $\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_m} F_{a_{m+1}}$，當 $n = m+1$ 時，有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m+1} = 1$，

可得 $\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=n} F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_m} F_{a_{m+1}} = \underbrace{F_1 \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_1}_{n\text{個}} = 1$ 。

（三）例子：取 $n = 9$， $m = 4$：

一方面， $\sum_{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=9} F_{a_1} F_{a_2} F_{a_3} F_{a_4} F_{a_5}$

$$= (F_1 \cdot F_1 \cdot F_1 \cdot F_1 \cdot F_5) \cdot 5 + (F_1 \cdot F_1 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_4) \cdot \frac{5!}{3!} + (F_1 \cdot F_1 \cdot F_1 \cdot F_3 \cdot F_3) \cdot \frac{5!}{3!2!}$$

$$+ (F_1 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_2 \cdot F_3) \cdot \frac{5!}{2!2!} + (F_1 \cdot F_2 \cdot F_2 \cdot F_2 \cdot F_2) \cdot 5$$

$$= (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5) \cdot 5 + (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3) \cdot 20 + (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 10 + (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2) \cdot 30 + (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot 5$$

$$= 25 + 60 + 40 + 60 + 5 = 190,$$

另一方面，$\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{9-4}{2}\right]-1}(-1)^i C_4^{9-1-i}C_4^{4+i}L_{9-4-1-2i}+(-1)^{\frac{9-4-1}{2}}\cdot(C_4^{\frac{9+4-1}{2}})^2$

$$=\sum_{i=0}^{2-1}(-1)^i C_4^{8-i}C_4^{4+i}L_{4-2i}+(-1)^2\cdot(C_4^6)^2=C_4^{8-0}C_4^{4+0}L_{4-2\cdot 0}-C_4^{8-1}C_4^{4+1}L_{4-2\cdot 1}+15^2$$

$$=70\cdot 1\cdot 7-35\cdot 5\cdot 3+225=190$$ 。

參、結語

回顧本文的工作，首先將費氏數列改寫成「完全齊次對稱多項式」，接著利用「自由分解重組恆等式」，將兩個以上的齊次式的卷積，轉換成一個變數不全相異的完全齊次對稱多項式，再利用「取相同變數公式」，得到「主要引理」。最後利用根與係數關係，轉換成「Lucas 數列」的線性組合。

相對地，參考資料[1]使用了生成函數與偏微分的手法，得到一個簡潔的表達式。

對筆者而言，原本費氏數列的多重卷積，是一個不可思議的龐然大物，能找到一條道路，將之轉化為 Lucas 數列的線性組合，已令筆者感到喜出望外，相較於參考資料[1]，本篇文章所用的手法與公式，比較接近目前的高中教學程度與內容。當然公式與公式之間，孰優孰劣，敬請各位親愛的讀者，作出自己心中的評價。

參考資料

1. Yi Yuan and Wenpeng Zhang, Some Identities Involving the Fibonacci Polynomials, The Fibonacci Quarterly, 2002, P314~318。
2. Wenpeng Zhang, Some Identities Involving the Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, 1997, P225~229。
3. 陳建燁，費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式。科學教育月刊，已接受。
4. 陳建燁(2016)，完全齊次對稱多項式(起)：自由分解重組恆等式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
5. 陳建燁(2016)，完全齊次對稱多項式(承)：取相同變數之公式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
6. 陳建燁(2016)，完全齊次對稱多項式(轉)：偏微分公式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
7. 陳建燁(2016)，完全齊次對稱多項式(合)：取相同變數與偏微分，高中數學學科中心電子報第 113 期。
8. 陳建燁(2016)，推導費氏數列性質三部曲(中)：用根與係數關係，高中數學學科中心電子報第 109 期。