四階循環及對稱魔術立方體

林克瀛

國立清華大學 物理系

壹、前言

一個四階的魔術立方體，是從 1 到 64 的連續整數所排成的立方體，使得與立方體任何一條邊平行的四個數字之和，以及沿任一條對角線(由一角穿過立方體中心到另一角)的四個數之和都是 130。每一個魔術立方體經由旋轉及鏡射一共可得 48 個互相等價的立方體。因為立方體有 8 個角，若有一個角的格子內有一數 A，則經過多次旋轉後 A 可以出現在任何角上。若以 A 所在的角為一個三維直角坐標系的原點，把與此角相連的三條互相垂直的邊作為 xyz 軸，則立方體繞一根經過原點及立方體中心的軸旋轉 120 及 240 度一共可得三個不同的立方體 利用鏡射再加三個，於是一共有 8×6=48 個。

1972 加拿大人 Hendricks 証明不等價的三階魔術立方體共有四個。四階魔術立方體的總數仍為未知數。我用電腦計算出兩種滿足特殊條件的四階魔術立方體的數目。不等價的循環立方體總數為 64(71,894,994) = 4,601,279,616，不等價的對稱立方體總數為 64(69,489,200) = 4,447,308,800。

貳、循環魔術立方體的分類

立方體的 64 格，每一格的位置用三個變數 x, y, z 代表。變數的值是 1,2,3,4。z=1 代表第一層。由下向上，每一層是一個 4×4 方陣。x 軸的方向由西向東，y 軸的方向由北向南。N(x, y, z)代表在位置(x, y, z)的數字。魔術立方體的必要條件是

$$N(x,y,1)+N(x,y,2)+N(x,y,3)+N(x,y,4)=130$$
$$N(x,1,z)+N(x,2,z)+N(x,3,z)+N(x,4,z)=130$$
$$N(1,y,z)+N(2,y,z)+N(3,y,z)+N(4,y,z)=130$$
$$N(1,1,1)+N(2,2,2)+N(3,3,3)+N(4,4,4)=130$$
$$N(1,4,1)+N(2,3,2)+N(3,2,3)+N(4,1,4)=130$$
$$N(4,1,1)+N(3,2,2)+N(2,3,3)+N(1,4,4)=130$$
$$N(4,4,1)+N(3,3,2)+N(2,2,3)+N(1,1,4)=130$$

循環立方體的定義，就是把魔術立方體沿某方向(例如 z)把四個方陣輪換(把第一二三層依次上移到二三四層，把原來的第四層下降到第一層) 仍得到一個不等價的循環立方體。每一個四階循環立方體可以經由這種方法產生 4×4×4=64 個不等價的立方體，因此循環立方體的總數必為 64 之倍數。

美國康乃爾大學數學家 Rosser 與 Walker 在一篇用群論來研究四階循環魔方陣的論文中，証明方陣每一格子內的數字與沿跟對角線平行的方向移兩格的數字之

和都相等。以世界上最早發現的四階循環魔方陣為例

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

7+10=12+5=1+16=14+3=2+15=13+4=8+9 =11+6=17

若將一個循環魔方陣沿兩個互相垂直的方向分別把第三及第四行交換，即可轉換成為一個對稱魔方陣(以方陣中心為原點，每一對位於對稱位置的兩數之和都是17)

7	12	14	1
2	13	11	8
9	6	4	15
16	3	5	10

因此四階循環魔方陣與對稱魔方陣的數目相同都是 48。

他們的理論也可以用在四階魔術立方體，但是結果有一些不同。為方便起見，把 64 個格子交錯塗上黑白兩色，並把數字 1 放入黑格子中。由循環立方體的定義，可以証明，每一黑(白)格子內的數字與沿對角線平行方向移兩格的數字之和必相等，以 B(W)代表，B 及 W 之和為 130。

定理：65−B=W−65=0, 1, 2, 4, 8, 16, 32.

證明：循環魔術立方體的必要條件是把 64 個整數分為兩组。每組有 16 對整數，同一組每一對整數之和都相同。第一種是 B=W=65，一共有 32 對 (1+64=2+63=… =32+33=65)。第二種是 B=64，W=66。黑(白)色格子內有 32 個奇(偶)數，各有 16 對(1+63=3+61=…=31+33=64，2+64=4+62=…=32+34=66)。第三種是 B=63，W=67。黑格子內有 16 對(1+62=5+58=…=61+2=63)白格子內有 16 對(3+64=7+60=…=63+4 =67)第四種是 B=61，W=69。黑格子內有 16 對(1+60=9+52=…=57+4 =2+59=10+51=…=58+3=61)。白格子內有 16 對(5+64=13+56=…=61+8=6+63=14+55=…=62+7=69)第五種是 B=57，W=73。黑格子有 16 對 (1+56=2+55=…=8+49=17+40=18+39=…=24+33=57)。白格子有 16 對(9+64=10+63=…=16+57=25+48=26+47=…=32+41=73) 第六種是 B=49，W=81。黑格子有 16 對(1+48=2+47=…=16+33=49) 白格子有 16 對(17+64=18+63=…=32+49=81)第七種是 B=33，W= 97。黑格子有 16 對(1+32=2+31=…=16 +17=33)白格子有 16 對(33+64=34 +63=…=48+49=97)。

不等價的四階循環魔術立方體可用(B,W) 分為七類，利用電腦解得的結果見表一，N(B,W)代表不等價立方體的數目，表一的數字已將因子 64 分離。每一類各舉一例 (見圖一至七)。

四階對稱魔術立方體的定義是：以立方體的中心為原點，每一對位於對稱位置的兩個數字之和都是 65。圖八就是一例。

若將一個對稱立方體沿三個互相垂直的方向，分別把第三及第四層方陣互換，即可轉換成一個循環立方體且 B=W=65，例如第八圖可轉換為第一圖。同理第一圖亦可轉換為第八圖。因此對稱立方體的數目與 B=W=65 的循環立方體的數目是相同的。

第一層				第二層				第三層				第四層			
1	28	43	58	49	15	19	47	32	42	44	12	48	45	24	13
51	11	29	39	9	2	59	60	40	55	8	27	30	62	34	4
21	53	33	23	41	52	17	20	22	7	64	37	46	18	16	50
57	38	25	10	31	61	35	3	36	26	14	54	6	5	56	63

圖一

1	10	57	62	38	39	8	45	61	50	5	14	30	31	60	9
46	21	22	41	37	2	51	40	18	53	42	17	29	54	15	32
59	52	3	16	6	55	36	33	7	4	63	56	58	19	28	25
24	47	48	11	49	34	35	12	44	23	20	43	13	26	27	64

圖二

1	28	45	56	60	49	19	2	42	43	30	15	27	10	36	57
32	41	44	13	34	12	25	59	47	26	3	54	17	51	58	4
33	52	21	24	31	6	40	53	18	11	62	39	48	61	7	14
64	9	20	37	5	63	46	16	23	50	35	22	38	8	29	55

圖三

1	48	26	55	56	34	37	3	20	29	59	22	53	19	8	50
63	18	24	25	4	23	49	54	30	51	5	44	33	38	52	7
2	47	41	40	61	11	16	42	35	14	60	21	32	58	13	27
64	17	39	10	9	62	28	31	45	36	6	43	12	15	57	46

圖四

1	62	20	47	63	21	13	33	51	12	40	27	15	35	57	23
48	19	59	4	49	43	7	31	28	39	9	54	5	29	55	41
17	46	6	61	16	34	58	22	37	26	56	11	60	24	10	36
64	3	45	18	2	32	52	44	14	53	25	38	50	42	8	30

圖五

1	55	12	62
56	11	59	4
9	61	6	54
64	3	53	10

63	13	21	33
41	51	7	31
24	34	58	14
2	32	44	52

43	27	40	20
28	39	17	46
37	19	48	26
22	45	25	38

23	35	57	15
5	29	47	49
60	16	18	36
42	50	8	30

圖六

1	37	29	63
55	11	43	21
30	58	2	40
44	24	56	6

51	20	36	23
19	33	26	52
35	28	50	17
25	49	18	38

31	57	3	39
41	27	53	9
4	34	32	60
54	12	42	22

47	16	62	5
15	59	8	48
61	10	46	13
7	45	14	64

圖七

1	28	58	43
51	11	39	29
57	38	10	25
21	53	23	33

49	15	47	19
9	2	60	59
31	61	3	35
41	52	20	17

48	45	13	24
30	62	4	34
6	5	63	56
46	18	50	16

32	42	12	44
40	55	27	8
36	26	54	14
22	7	37	64

圖八

表一

B	W	N(B,W)/64)
65	65	69,489,200
64	66	469,921
63	67	377,803
61	69	355,173
57	73	355,173
49	81	377,803
33	97	469,921

參考文獻

趙文敏(1981) 四階魔方陣。科學教育月刊，39，39-43。

林克瀛(1972) 漫談魔方陣。 科學月刊， 3卷 ， 10期， 48-51。

林克瀛(1980) 三階魔術立方體的全解。 數學傳播， 16， 149-151。

林克瀛(1981) 漫談魔術立方體。 科學月刊， 12 卷， 1 期， 60-62。

林克瀛(1981) 四階魔方陣的全解。 數學傳播， 17， 109-114。

Andrews, W. S. (1960) Magic squares and cubes. Dover.

Benson, W. and Jacoby, O. (1976) New recreations with magic squares. Dover.

Benson, W. and Jacoby, O. (1981) Magic cubes: new recreations. Dover.

Heinz, H. D. and Hendricks, J. R. (2000) Magic square lexicon: illustrated.

Lin, K. Y. (1986 林克瀛) Magic cubes and hypercubes of order 3. Discrete Math. 58, 159-166.

Rosser, B. and Walker, R. J. (1938) On the transformation group for diabolic magic squares of order four, Bulliton. Am. Math Society, 44, 416-420.