中學生通訊解題第 93-94 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9301

已知 $x_1 = 123$, $x_2 = 321$, $x_3 = 789$, $x_4 = 987$ ，且當 $n \ge 5$ ， $x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}$ ，求 $x_{2011} + x_9 + x_5$ 之值。

簡答：-468

參考解答：

$\forall n \ge 6$ ，

$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}$

$= (x_{n-2} - x_{n-3} + x_{n-4} - x_{n-5}) - x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}$

$= -x_{n-5}$

$\forall n \ge 11$ ， $x_{n-5} = -x_{n-10} \Rightarrow x_n = x_{n-10}$ ，

$\therefore x_{2011} + x_9 + x_5$

$= x_1 + (-x_4) + (x_4 - x_3 + x_2 - x_1)$

$= -789 + 321 = -468$ 。

【解答評析】

本題需稍做思考推理得到較簡化之遞迴關係，進一步加以計算得出答案。題目可歸類成數論領域中，較容易的。

問題編號
9302

下面是一個八位數除以一個三位數的算式，試求商數。

$$
\begin{array}{ccc r|cccccccc}
 & & & & & & & 7 & * & * & * & * \\
\cline{5-12}
* & * & * & \big) & * & * & * & * & * & * & * & 8 \\
 & & & & & * & * & * & & & & \\
\cline{5-12}
 & & & & & & * & * & * & * & & \\
 & & & & & & & * & * & * & & \\
\cline{5-12}
 & & & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & * & * & * & * \\
\cline{5-12}
 & & & & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

簡答：70709

參考解答：

假設

$$
\begin{array}{ccc r|cccccccc}
 & & & & & & & 7 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\
\cline{5-12}
x_1 & x_2 & x_3 & \big) & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & 8 \\
 & & & & & b_1 & b_2 & b_3 & & & & \\
\cline{5-12}
 & & & & & & c_1 & c_2 & a_5 & a_6 & & \\
 & & & & & & & d_1 & d_2 & d_3 & & \\
\cline{5-12}
 & & & & & & & & e_1 & e_2 & a_7 & 8 \\
 & & & & & & & & e_1 & e_2 & a_7 & 8 \\
\cline{5-12}
 & & & & & & & & & & & 0
\end{array}
$$

其中為**十進制**數碼，下標為 1 的文字都不為 0。

(1) $\because$ 商數上 7 後，同時移下兩位 $\overline{a_5a_6}$

$\therefore$ $\overline{c_1c_2a_5} < \overline{x_1x_2x_3}$ ， $y_2 = 0$ ，

同理 $y_4 = 0$。

(2) $\because$ $\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{b_1b_2b_3}$ 為 $\overline{c_1c_2}$

$\therefore$ $a_1 = 1$，$a_2 = 0$，$b_1 = 9$，且 $\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$，

同理 $c_1 = 1$，$c_2 = 0$，$d_1 = 9$，$\overline{a_5a_6} < \overline{d_2d_3}$。

(3) $\because c_2 = 0 \therefore a_4 = b_3$；$\because c_1 = 1$，$\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$

$\therefore a_3 < b_2$ ， $a_3 = 0$， $b_2 = 9$。

(4) $\because 7\cdot\overline{x_1x_2x_3}=\overline{b_1b_2b_3}=\overline{99b_3}$

$\therefore x_1=1$， $x_2=4$。

(5) $\because 7\cdot\overline{14x_3}=\overline{99b_3}$ $\therefore 7\cdot x_3=10+b_3$

$\therefore x_3=2$， $b_3=4$， $a_4=4$。

(6) $\because y_5\cdot 142$ 是四位數，且個位數為 8

$\therefore y_5=9$。

(7) $\because \overline{e_1e_2a_7}<\overline{x_1x_2x_3}$ $\therefore e_1=1$

$\because 10+a_5-d_2=e_1=1$ $\therefore d_2=9$，

$\because y_3\cdot 142=\overline{99d_3}$ $\therefore y_3=7$，$d_3=4$。

(8) $\because \overline{e_1e_2a_78}=9\times 142=1278$

$\therefore e_2=2$， $a_7=7$，

因此 $\overline{c_1c_2a_5a_6}=994+12=1006$，

$\therefore a_5=0$， $a_6=6$，

得商為 70709，原式為

$$\begin{array}{r|cccccccc}
 & & & & 7 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ \hline
142 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 7 & 8 \\
 & & 9 & 9 & 4 & & & & \\ \cline{2-9}
 & & & 1 & 0 & 0 & 6 & & \\
 & & & & 9 & 9 & 4 & & \\ \cline{2-9}
 & & & & & 1 & 2 & 7 & 8 \\
 & & & & & 1 & 2 & 7 & 8 \\ \cline{2-9}
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

且答案唯一。

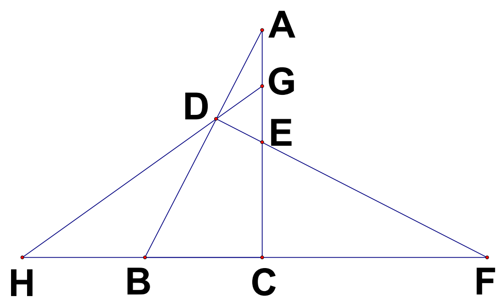
【解題評析】

1. 本題利用直式除法的原理，題目有趣，同學踴躍參與作答。
2. 作答應說明答案是唯一的，大部分同學的作答詳盡。

問題編號
9303

如右圖，△ ABC 為直角三角形，其中 $\angle C=90°$，而在線段 $\overline{AB}$ 上取一點 D，過 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂直線，分別交直線 $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E, F 兩點，然後在線段 $\overline{AE}$ 上取一點 G，設直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 和直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 H 點，已知△ BDH 和△ DFH 為相似三角形，

試證： G 為 $\overline{AE}$ 的中點。



參考解答：

因為△ ABC ~△ FBD (AA 相似)，所以 $\angle A=\angle F$，另一方面因為△ BDH ~△ DFH，所以 $\angle BDH=\angle DFH$ ，因此 $\angle A=\angle BDH=\angle ADG$ (對頂角相等)，所以△ ADG 為等腰三角形再加上 $\angle ADE$ 為直角，可推得 G 為 $\overline{AE}$ 的中點。

【解題評析】

同學們大都利用相似形中對應角度相等的概念，去計算出 $\angle DAG=\angle ADG$ 或 $\angle GDE=\angle GED$，進而確定 G 為 $\overline{AE}$ 的中點。最後提醒一下，在證明的過程中，必須將已知的條件和要證的部份弄清楚，不可以倒因為果。

問題編號
9304

將一個 101 邊形的邊依序塗色為紅、藍、紅、藍、...、紅、藍、黃，每條邊塗一種顏色。然後允許進行如下操作：在保證任何相鄰兩邊都不同色的條件下，每次可改變一條邊的顏色。問能否經過若干次操作而使 101 條邊的塗色狀態變為紅、藍、紅、藍、...、紅、黃、藍？

簡答：不可能實現

參考解答：

將 101 邊形的 101 條邊依次編號為 1,2,..., 101。定義函數 $f(i)$ 如下：

(1) 當 $i-1,\ i,\ i+1$ 這 3 條邊中第 1 條與第 3 條同色時，令 $f(i)=0$；

(2) 當這 3 條邊的顏色依次為紅黃藍、黃藍紅或藍紅黃時，令 $f(i)=1$；

(3) 當這 3 條邊的顏色依次為紅藍黃、藍黃紅或黃紅藍時，令 $f(i)=-1$。

考慮操作前後和數 $S=\sum_{i=1}^{101} f(i)$ 的變化情形。

注意，僅當第 $i-1$ 與第 $i+1$ 條邊同色時，才能將第 i 條邊改變顏色。當第 i 條邊改變顏色時，又僅僅影響到 $f(i-1)$ 與 $f(i+1)$ 的值，而其它的 $f(i)$ 都保持不變。當寫出 $i-2,\ i-1, i, i+1,\ i+2$ 等 5 條邊的顏色時，變化情形如下：

藍紅藍紅藍 $\leftrightarrow$ 藍紅黃紅藍

藍紅藍紅黃 $\leftrightarrow$ 藍紅黃紅黃

黃紅藍紅黃 $\leftrightarrow$ 黃紅黃紅黃

黃紅藍紅藍 $\leftrightarrow$ 黃紅黃紅藍

這裡只列出了第 $i-1$ 與第 $i+1$ 條邊均為紅色的情形，均為藍色或黃色的情形可由此轉換得出。易見，操作前後 $f(i-1)$ 與 $f(i+1)$ 的值不變，即在允許操作之下，和數 S 的值是不變量。

因為初始狀態所對應的和數 $S_0=-3$，而希望達到的終結狀態所對應的和數 $S_1=3$，所以不可能實現。

問題編號
9305

設 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=n(n+1)$，

求 $x_1^2+2x^2_2+3x^2_3+\cdots+nx^2_n$ 之最小值及此時 $x_1, x_2\cdots, x_n$ 之值為何?

簡答：$2n(n+1)$

參考解答：

解答 1

設 $x_1=2+y_1$，$x_2=2+y_2$，…，$x_n=2+y_n$，

則 $x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n$

$=y_1+2y_2+3y_3+...+ny_n+2(1+2+...+n)$。

所以，$y_1+2y_2+3y_3+...+ny_n=0$。

因此，$x_1^2+2x^2_2+3x^2_3+...+nx^2_n$

$=(2+y_1)^2+2(2+y_2)^2+3(2+y_3)^2+...+n(2+y_n)^2$

$=2n(n+1)+4(y_1+2y_2+3y_3...+ny_n)$

$+(y_1^2+2y^2_2+3y^2_3+...+ny^2_n)$

$=2n(n+1)+(y_1^2+2y^2_2+3y^2_3+...+ny^2_n)$

$\geq 2n(n+1)$

因此，當 $y_1 = y_2 = y_3 = ... = y_n = 0$ 時，即 $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 2$ 時，$x_1^2 + 2x^2_2 + 3x^2_3 + \cdots + nx^2_n$ 最小值為 $2n(n+1)$。

<u>解答 2</u> 利用科西不等式

$$\left(1+2+\cdots+n\right)\left(1x_1^2+2x_2^2+\cdots+nx_n^2\right)$$
$$\geq \left(x_1+2x_2+\cdots+nx_n\right)^2 = n^2(n+1)^2$$

因此，

$$x_1^2+2x_2^2+...+nx_n^2 \geq \frac{n^2(n+1)^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2n(n+1)$$

科西不等式等號成立於

$\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}x_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x_2} = ... = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}x_2}$，即 $x_1 = x_2 = ... = x_n$。

又由 $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n(n+1)$，

得 $x_1 = x_2 = ... = x_n = 2$。

因此，當 $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 2$ 時，

$x_1^2 + 2x^2_2 + 3x^2_3 + ... + nx^2_n$ 最小值為 $2n(n+1)$。

【解題評析】

本題有八位同學作答，三位同學採用的方法為柯西不等式之方法。另外幾位同學，嘗試利用歸納法解此問題，由 $n=1$ 時，$x_1 = 2$ 推論到 $n=2$ 時，$x_1 = x_2 = 2$(由題目條件推)。最大的問題在於並沒有說明此時，產生的值就是最小值。<u>**解答 1**</u>的方法重點在於將數據平移，大大的簡化了討論過程。

問題編號 9401

如果一個正整數 n 能夠同時唯一表示為 $k(k \geq 2)$個正整數的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 與它們之積 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$，那麼此正整數稱為“好數”。例如 10 就是“好數”，10＝5＋2＋1＋1＋1＝5×2×1×1×1，且此種表示唯一。請問：

(1) 三個正整數 71、105、1727 何者是“好數”？

(2) 試由第(1)題的觀察，說明一個正整數 n 是“好數”須滿足的條件，並證明之。

簡答：

(1) 71、105 不是“好數”，1727 是“好數”。

(2) n 為“好數”$\Leftrightarrow$ n 為兩個質數的乘積。

參考解答：

(1) ∵ 71 為質數，71＝71×1＜71+1，

∴ 71 不是“好數”。

∵ $105 = 3\times5\times7$，

$105 = 3+5+7+\underbrace{1+1+...+1}_{90\text{個}}$

$= 3\times5\times7\underbrace{\times1\times1...\times1}_{90\text{個}}$，105

$= 3+35+\underbrace{1+1+...+1}_{67\text{個}} = 3\times35\underbrace{\times1\times1...\times1}_{67\text{個}}$，

表示法不是唯一。

∴ 105 不是“好數”。

∵ 1727＝11×157，其中 11,157 為質數；

1727

$= 11+157+\underbrace{1+1+...+1}_{1559\text{個}}$，表示法是唯一，

$\therefore$ 1727 是“好數”。

故 71、105 不是“好數”，1727 是“好數”。

(2) a. 若 n 為質數，則 n 不是“好數”。

$\because n = n\cdot 1 < n+1$ $\therefore n$ 不能表示為相同正整數的和與積。

b. 若 $n = p\cdot q$，其中 p、q 為質數，則 $n = p\cdot q = p+q+1\times(pq-p-q)$，且這種表示唯一。

c. 若 $n = abc$，其中 a、b、c 為大於 1 的整數，則 $n = abc = ab+c+1\times(abc-ab-c) = a+b+c+1\times(abc-a-b-c)$ 故 n 為“好數”$\Leftrightarrow$ n 為兩個質數的乘積。

【解題評析】

1.本題為正整數的加法分解與乘法分解，並利用到「一個質數的正因數只有 1 和自己本身」。

2.此題不僅要滿足條件的表示法「存在」，而且表示法「唯一」，大多數的同學沒有看清題意，未考慮唯一性，以致於答案錯誤。

3. 數學家 G.Polya 在所著怎樣解題一書中，提出解題的四個階段：第一、**了解**問題，看清所要求的是什麼；第二、弄清楚題目裡各部份的關係，以獲得解決問題的想法，並作出**計劃**；第三、**實行**計畫；第四、**回顧**整個解法，核校和討論。同學在解題時，可以參考以上的方法，並多加體會。

問題編號
9402

解方程式 $\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{x+\frac{1}{x}}=x$。

簡答：$1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

參考解答：

構造輔助方程式：將已知式取倒數

$\Rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{x+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$，兩式相加

$\Rightarrow 2\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}=x+\frac{1}{x}\overset{令}{=}a \Rightarrow a^2-4a-4=0$

$\Rightarrow a = 2+2\sqrt{2}$ (負不合)

$\Rightarrow x+\frac{1}{x} = 2+2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2-2(1+\sqrt{2})x+1=0$

$\therefore x = 1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ (取大者)

$\therefore x = 1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}$。

【解題重點】

本題固然可以透過平方再平方求解，但過程較為繁瑣。若是能夠觀察出方程式與 x 和 $\frac{1}{x}$ 有關，進而將已知式取倒數，就可以得到一個關於 $x+\frac{1}{x}$ 方程式，接著就可以解出 x。值得特別注意的是，解出來的兩個 x 有一個不合。這是因為必須要滿足 $x>\frac{1}{x}$。這是不容易看出來的！若是換個方法，直接利用 $x=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ 則可以正確的解出唯一個解。

問題編號
9403

三角形中某兩邊的高分別為 1 和 3，求此三角形的內切圓半徑 r 的取值範圍。

簡答：$\frac{3}{8}<r<\frac{1}{2}$

參考解答：

設三角形的三邊長為 a,b,c，面積為 A。

$$A=\frac{a\cdot 1}{2}=\frac{b\cdot 3}{2}\Rightarrow a=2A, b=\frac{2A}{3}\quad \text{又}$$

$$a+b>c>a-b\Rightarrow \frac{8A}{3}>c>\frac{4A}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{16A}{3}>a+b+c>\frac{12A}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{16A}<\frac{1}{a+b+c}<\frac{3}{12A}$$

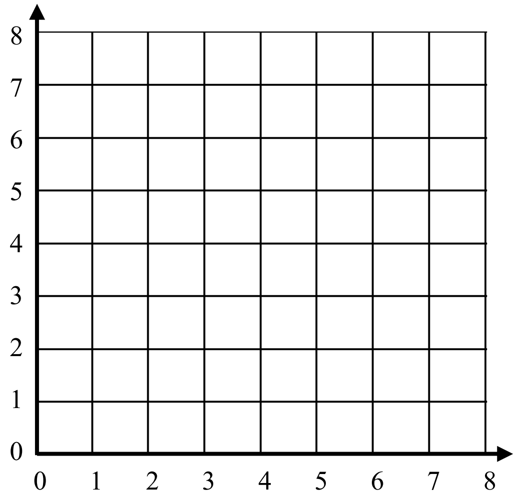
$$\Rightarrow \frac{3}{8}<\frac{2A}{a+b+c}<\frac{3}{6}\Rightarrow \frac{3}{8}<r<\frac{1}{2}\ 。$$

【解題評析】

本題需掌握三角形內切圓半徑與三角形面積間的關係，再加上一些三角形邊長間的大小性質，進行一些代數運算，應不難迎刃而解。

問題編號
9404

如圖所示，由邊長 1 的單位正方形構成之 8×8 正方形中，共有 81 個格子點，以這些點為頂點的正方形面積有多少種不同的值？可構造出多少個正方形？



提示：構造出之正方形，其邊不一定為圖中之格線，例如：圖中(0, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(1, 0)四點所構成之正方形亦符合所求。

簡答：面積有 23 種不同的值，共可構造出 540 個正方形

參考解答：

如圖，所有正方形的邊長 c 均可用 a、b 表示：$c=\sqrt{a^2+b^2}$，且 $a+b\le 8$。

不失一般性，令 $0\le a\le b\le 8$ 且 $b\ne 0$，則 a、b 之所有可能值如下：

a	0	1	2	3	4
b	1−8	1−7	2−6	3−5	4

(1) $a=0$ 時，$c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (即所有邊均在格線上)，面積之值分別為 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64，共 8 種。

(2) $a=1$ 時，$c=\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{26}, \sqrt{37}, \sqrt{50}$，面積之值分別為 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50，共 7 種。

(3) $a=2$ 時，$c=\sqrt{8}, \sqrt{13}, \sqrt{20}, \sqrt{29}, \sqrt{40}$ 面積之值分別為 8, 13, 20, 29, 40，共 5 種。

(4) $a=3$ 時，$c=\sqrt{18}, \sqrt{25}, \sqrt{34}$，面積之值分別為 18, 25, 34，共 3 種。

(5) $a=4$ 時，$c=\sqrt{32}$，面積值為 32，共 1 種。

由上面得知，所有可能的面積值共 8 + 7 + 5 + 3 + 1 – 1 = 23 種。(面積 25 重複出現)

接下來討論構造出的正方形個數，將所有正方形分類為三類：

(1) $a=0$ 者，共有

$$8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=204$$

個。

(2) $0<a=b\le 8$ 者，有(1, 1)、(2, 2)、(3, 3)、(4, 4)，共 $7^2+5^2+3^2+1^2=84$ 個正方形。

(3) $0<a<b\le 8$ 者，有

(1, 2)……………………共 $6^2\times 2=72$ 個

(1, 3)……………………共 $5^2\times 2=50$ 個

(1, 4)、(2, 3) ………共 $4^2\times 2\times 2=64$ 個

(1, 5)、(2, 4) ………共 $3^2\times 2\times 2=36$ 個

(1, 6)、(2, 5)、(3, 4)共 $2^2\times 2\times 3=24$ 個

(1, 7)、(2, 6)、(3, 5) 共 $1^2\times 2\times 3=6$ 個

共 252 個正方形。

由(1)(2)(3)得正方形總數為 204+84+252=540 個。

問題編號
9405

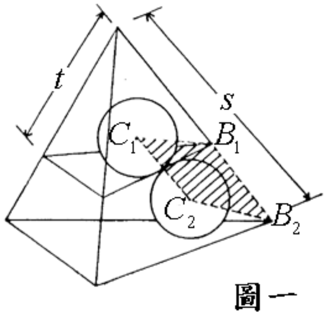
有四個半徑皆為 1 的球，每一個球皆與另外三球外切，已知一正四面體包住此四圓球，求正四面體邊長之最小值。

簡答：$2+2\sqrt{6}$

參考解答：

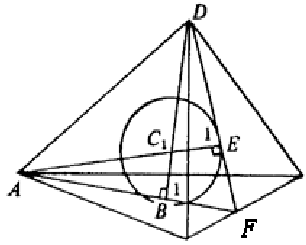
如圖一，四面體為 4 球之外切正四面體

$\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=2\Rightarrow s=t+2$



圖一

如圖二，四面體為球 C_1 之外切正四面體



圖二

$\overline{AD}=t$，$\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{AF}=\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}t)=\frac{\sqrt{3}}{3}t$

$$\overline{AC_1}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{C_1B}^2}=\sqrt{\frac{t^2}{3}+1}$$

$$\because \Delta ABC_1\sim\Delta AEF\Rightarrow\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FE}}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{t^2}{3}+1}}{1}=\frac{3}{1}\Rightarrow t=2\sqrt{6}，s=t+2=2+2\sqrt{6}，$$

故正四面體邊長之最小值為

$s=t+2=2+2\sqrt{6}$。

【解題評析】

本題屬於空間幾何問題，如果能充分運用到畢氏定理及相似三角形相關性質，可以適度簡化計算過程。