預測與驗證平面凸多邊形面積公式(II)

李輝濱

嘉義縣私立同濟高級中學

【(續)科學教育月刊第 398 期第 24 頁之後】

貳、本文(續)

三、預測平面凸多邊形面積平方式公式與驗證(續)

(三) 平面凸六邊形

a. 預測原型面積平方式公式

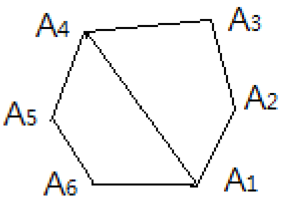

圖 7

在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，如圖 7.令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，令此凸六邊形面積為 **S(6)**，n = 6，則 m = 4，故連接兩個頂角 A_4 與 A_1 使形成一對角線 $\overline{A_4A_1}$，將此凸六邊形分割成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 和另一個四邊形 $A_1A_4A_5A_6$，再參照 5 個綜合規則，先預測出這平面凸六邊形面積平方式公式如下；

$$
\begin{aligned}
[S(6)]^2 = \frac{1}{4}[\,&(V_1V_2)^2+(V_1V_3)^2+(V_2V_3)^2+(V_4V_5)^2+(V_4V_6)^2+(V_5V_6)^2\,] \\
&-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2)^2+\frac{1}{2}[-V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4) \\
&-V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)-V_3V_4V_5V_6\cos\left(A_4+A_6\right)-V_4V_5V_6\,V_1\cos(A_5+A_1) \\
&-V_5V_6V_1V_2\cos(A_6+A_2)-V_6V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)\,]+\frac{1}{2}[\,V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5) \\
&+V_2V_3V_4V_6\cos(A_3+A_5+A_6)+V_3V_4V_5V_1\cos(A_4+A_6+A_1)+V_4V_5V_6V_2\cos(A_5+A_1+A_2) \\
&+V_5V_6V_1V_3\cos(A_6+A_2+A_3)+V_6V_1V_2V_4\cos(A_1+A_3+A_4)\,] \\
&+\frac{1}{2}[-V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-V_2V_3V_5V_6\cos(A_3+A_6)-V_3V_4V_6V_1\cos(A_4+A_1)\,] \qquad \textbf{(6-1)}
\end{aligned}
$$

此方程式 **(6-1)**式就是 原型的平面凸六邊形面積平方式公式！

若令 $V_1 = 0$，使頂點 A_1 角度亦等於零，則平面凸六邊形即退化成平面凸五邊形，此為凸五邊形 $A_2A_3A_4A_5A_6$，而方程式(6−1)式再經過簡單的幾個轉換後即退化成(5−1)式的相同類型態！

若此凸六邊形內接於一圓，則 $A_1 + A_3 + A_5 = A_2 + A_4 + A_6 = 2\pi$，將這角度關係代入(6−1)式，經化簡運算並令 $S(6)_{circle}$ 為圓內接六邊形面積，(6−1)式即變換成下式；

$$
\begin{aligned}
\left[S(6)_{circle}\right]^2 = & \frac{1}{4}[(V_1V_2)^2 + (V_1V_3)^2 + (V_2V_3)^2 + (V_4V_5)^2 + (V_4V_6)^2 + (V_5V_6)^2] \\
& - \frac{1}{16}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2)^2 + \frac{1}{2}[-V_1V_2V_3V_4\cos A_6 - V_2V_3V_4V_5\cos A_1 \\
& - V_3V_4V_5V_6\cos A_2 - V_4V_5V_6V_1\cos A_3 - V_5V_6V_1V_2\cos A_4 - V_6V_1V_2V_3\cos A_5] \\
& + \frac{1}{2}[V_1V_2V_3V_5\cos(A_5 - A_6) + V_2V_3V_4V_6\cos(A_6 - A_1) + V_3V_4V_5V_1\cos(A_1 - A_2) \\
& + V_4V_5V_6V_2\cos(A_2 - A_3) + V_5V_6V_1V_3\cos(A_3 - A_4) + V_6V_1V_2V_4\cos(A_4 - A_5)] \\
& + \frac{1}{2}[-V_1V_2V_4V_5\cos(A_2 + A_5) - V_2V_3V_5V_6\cos(A_3 + A_6) - V_3V_4V_6V_1\cos(A_4 + A_1)] \qquad \textbf{(6-2)}
\end{aligned}
$$

此方程式 **(6−2)**式即為**原型的圓內接六邊形面積平方式公式**！

b. **驗證** (略)；此驗證過程與五邊形，七邊形者完全類似，請參考這兩者。

c. **將原型的公式化成半角的公式**；

仿效五邊形 【(二)−c.】的計算過程，得到下列公式：

$$
\begin{aligned}
\left[S(6)\right]^2 = & \frac{1}{16}[(V_1 + V_2 + V_3)^2 - (V_4 - V_5)^2 - (V_5 - V_6)^2 - (V_6 - V_4)^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2] \\
& \times[(V_4 + V_5 + V_6)^2 - (V_1 - V_2)^2 - (V_2 - V_3)^2 - (V_3 - V_1)^2 + V_1^2 + V_2^2 + V_3^2] \\
& + \frac{1}{2}(V_4V_5V_6 - V_1V_2V_3)(V_1 + V_2 + V_3 - V_4 - V_5 - V_6) - [V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_2 + A_4}{2}) \\
& + V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3 + A_5}{2}) + V_3V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_4 + A_6}{2}) + V_4V_5V_6V_1\cos^2(\frac{A_5 + A_1}{2}) \\
& + V_5V_6V_1V_2\cos^2(\frac{A_6 + A_2}{2}) + V_6V_1V_2V_3\cos^2(\frac{A_1 + A_3}{2})] - [V_1V_2V_3V_5\sin^2(\frac{A_2 + A_4 + A_5}{2}) \\
& + V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_3 + A_5 + A_6}{2}) + V_3V_4V_5V_1\sin^2(\frac{A_4 + A_6 + A_1}{2}) \\
& + V_4V_5V_6V_2\sin^2(\frac{A_5 + A_1 + A_2}{2}) + V_5V_6V_1V_3\sin^2(\frac{A_6 + A_2 + A_3}{2}) \\
& + V_6V_1V_2V_4\sin^2(\frac{A_1 + A_3 + A_4}{2})] - [V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2 + A_5}{2}) \\
& + V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3 + A_6}{2}) + V_3V_4V_6V_1\cos^2(\frac{A_4 + A_1}{2})] \qquad \textbf{(6−3)}
\end{aligned}
$$

方程式(6−3)式即為半角型的平面凸六邊形面積平方式公式！

同樣地，若令 $V_1 = 0$，使頂點 A_1 角度等於零，則平面凸六邊形即退化成凸五邊形，此為五邊形 $A_2A_3A_4A_5A_6$，而方程式(6−3)式再經過簡單的幾個轉換後即退化成(5−8)式的相同類型態！

另外，又得到下列公式 ，

$$
\begin{aligned}
\left[S(6)_{circle}\right]^2 = \frac{1}{16}\,&[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4{}^2+V_5{}^2+V_6{}^2] \\
&\times [(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1{}^2+V_2{}^2+V_3{}^2] \\
&+\frac{1}{2}(V_4V_5V_6-V_1V_2V_3)\ (V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)\ -[\ V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_6}{2}) \\
&+V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_1}{2})+V_3V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_2}{2})+V_4V_5V_6V_1\cos^2(\frac{A_3}{2}) \\
&+V_5V_6V_1V_2\cos^2(\frac{A_4}{2})+V_6V_1V_2V_3\cos^2(\frac{A_5}{2})\ ]-[\ V_1V_2V_3V_5\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2}) \\
&+V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})+V_3V_4V_5V_1\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})+V_4V_5V_6V_2\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2}) \\
&+V_5V_6V_1V_3\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})+V_6V_1V_2V_4\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})\ ]-[\ V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2}) \\
&+V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})+V_3V_4V_6V_1\cos^2(\frac{A_4+A_1}{2})\ ] \qquad \textbf{(6-4)}
\end{aligned}
$$

方程式 (6−4)式即為半角型的圓內接六邊形面積平方式公式！

(四) 平面凸七邊形

a. 預測原型面積平方式公式

現在再參照前述的 5 個綜合規則來預測平面凸七邊形面積平方式公式

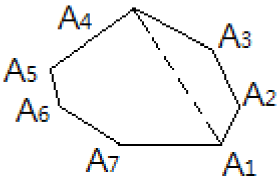

圖 8

如圖 8. 在平面上給定一個凸七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_1}=V_7$，令此凸七邊形面積為 **S(7)**，n = 7，則 m = 4，故連接兩個頂角 A_4 與 A_1 使形成一對角線 $\overline{A_4A_1}$，將此凸七邊形分割成四邊形

$A_1A_2A_3A_4$ 和五邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7$ ，則先預測出的平面凸七邊形面積平方式公式如下；

$$\begin{aligned}
\left[S(7)\right]^2 = &\frac{1}{4}\left[\,(V_1V_2)^2+(V_1V_3)^2+(V_2V_3)^2+(V_4V_5)^2+(V_4V_6)^2+(V_4V_7)^2+(V_5V_6)^2+(V_5V_7)^2+(V_6V_7)^2\,\right] \\
&-\frac{1}{16}\left(\,V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2-V_7^2\,\right)^2+\frac{1}{2}\left[-V_1V_2V_3V_4\cos(A_2+A_4)\right. \\
&-V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)-V_3V_4V_5V_6\cos\left(A_4+A_6\right)-V_4V_5V_6\,V_7\cos(A_5+A_7) \\
&\left.-V_5V_6V_7V_1\cos(A_6+A_1)-V_6V_7V_1V_2\cos(A_7+A_2)-V_7V_1V_2V_3\cos(A_1+A_3)\,\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[\,V_1V_2V_3V_5\cos(A_2+A_4+A_5)+V_2V_3V_4V_6\cos(A_3+A_5+A_6)+V_3V_4V_5V_7\cos(A_4+A_6+A_7)\right. \\
&+V_4V_5V_6V_1\cos(A_5+A_7+A_1)+V_5V_6V_7V_2\cos(A_6+A_1+A_2)+V_6V_7V_1V_3\cos(A_7+A_2+A_3) \\
&\left.+V_7V_1V_2V_4\cos(A_1+A_3+A_4)\,\right]+\frac{1}{2}\left[-V_1V_2V_3V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)\right. \\
&-V_2V_3V_4V_7\cos(A_3+A_5+A_6+A_7)-V_3V_4V_5V_1\cos\left(A_4+A_6+A_7+A_1\right) \\
&-V_4V_5V_6\,V_2\cos(A_5+A_7+A_1+A_2)-V_5V_6V_7V_3\cos(A_6+A_1+A_2+A_3) \\
&\left.-V_6V_7V_1V_4\cos(A_7+A_2+A_3+A_4)-V_7V_1V_2V_5\cos(A_1+A_3+A_4+A_5)\,\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[-V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-V_2V_3V_5V_6\cos(A_3+A_6)-V_3V_4V_6V_7\cos\left(A_4+A_7\right)\right. \\
&-V_4V_5V_7\,V_1\cos(A_5+A_1)-V_5V_6V_1V_2\cos(A_6+A_2)-V_6V_7V_2V_3\cos(A_7+A_3) \\
&\left.-V_7V_1V_3V_4\cos(A_1+A_4)\,\right]+\frac{1}{2}\left[\,V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_5+A_6)+V_2V_3V_5V_7\cos(A_3+A_6+A_7)\right. \\
&+V_3V_4V_6V_1\cos\left(A_4+A_7+A_1\right)+V_4V_5V_7\,V_2\cos(A_5+A_1+A_2)+V_5V_6V_1V_3\cos(A_6+A_2+A_3) \\
&\left.+V_6V_7V_2V_4\cos(A_7+A_3+A_4)+V_7V_1V_3V_5\cos(A_1+A_4+A_5)\,\right] \qquad \textbf{(7−1)}
\end{aligned}$$

此方程式 **(7−1)**式就是 **原型的平面凸七邊形面積平方式公式！**

(7−1)式第三部份總共有 C(7,4)=35 個 cosine 項，分成 5 循環組，每一循環組有 7 項。依照所歸納出的循環順序很容易將它們排列出來，勿擔心其有多複雜且都完全正確沒有一項重複！

若令 $V_7=0$，使頂點 A_7 角度亦等於零，則平面凸七邊形即退化成平面凸六邊形，而方程式 (7−1)式經過簡單的轉換後即退化成 (6−1)式！

令圓內接七邊形的面積為 $S(7)_{circle}$ ，由圓內接奇數邊形的性質知圓內接七邊形 7 個內角之間任幾個內角和無任何其它特殊關係，故此**方程式 (7−1)式也是原型的圓內接七邊形面積平方式公式！**

則 $\left[S(7)_{circle}\right]^2=\left[S(7)\right]^2$ **(7−1)**

b. **驗證**

如下圖 9. 此凸七邊形被分割成四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 和五邊形 $A_1A_4A_5A_6A_7$，

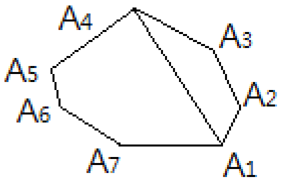

圖 9.

由引理 2.和引理 5.的餘弦公式性質，可得下列關係式；

$$\frac{1}{2}(V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2-V_7^2)$$
$$=V_1V_2\cos A_2+V_2V_3\cos A_3-V_1V_3\cos(A_2+A_3)-V_4V_5\cos A_5-V_5V_6\cos A_6-V_6V_7\cos A_7$$
$$+V_4V_6\cos(A_5+A_6)+V_5V_7\cos(A_6+A_7)-V_4V_7\cos(A_5+A_6+A_7) \qquad \textbf{(7−2)}$$

另由引理 3.和引理 6.的面積公式性質，可得下列關係式；

$$\mathbf{2\ S(7)} = V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin(A_2+A_3)+V_4V_5\sin A_5+V_5V_6\sin A_6$$
$$+V_6V_7\sin A_7-V_4V_6\sin(A_5+A_6)-V_5V_7\sin(A_6+A_7)+V_4V_7\sin(A_5+A_6+A_7) \qquad \textbf{(7−3)}$$

則由 (7−2)式的平方 加上 (7−3)式的平方，再經詳細化簡，得

$$[S(7)]^2=\frac{1}{4}[(V_1V_2)^2+(V_1V_3)^2+(V_2V_3)^2+(V_4V_5)^2+(V_4V_6)^2+(V_4V_7)^2+(V_5V_6)^2+(V_5V_7)^2$$
$$+(V_6V_7)^2]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2-V_7^2)^2+\frac{1}{2}[V_1V_2^2V_3\cos(A_2-A_3)$$
$$-V_1^2V_2V_3\cos A_3-V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-V_1V_2V_5V_6\cos(A_2+A_6)-V_6V_7V_1V_2\cos(A_7+A_2)$$
$$+V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_5+A_6)+V_7V_1V_2V_5\cos(A_2+A_6+A_7)-V_1V_2V_3^2\cos A_2$$
$$-V_1V_2V_4V_7\cos(A_2+A_5+A_6+A_7)-V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)-V_2V_3V_5V_6\cos(A_3+A_6)$$
$$-V_6V_7V_2V_3\cos(A_7+A_3)+V_2V_3V_4V_6\cos(A_3+A_5+A_6)+V_2V_3V_5V_7\cos(A_3+A_6+A_7)$$
$$-V_2V_3V_4V_7\cos(A_3+A_5+A_6+A_7)+V_1V_3V_4V_5\cos(A_2+A_3+A_5)-V_4^2V_5V_6\cos A_6$$
$$+V_1V_3V_5V_6\cos(A_2+A_3+A_6)+V_6V_7V_1V_3\cos(A_7+A_2+A_3)+V_4V_5^2V_6\cos(A_5-A_6)$$
$$-V_1V_3V_4V_6\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)-V_7V_1V_3V_5\cos(A_2+A_3+A_6+A_7)-V_4V_5V_6^2\cos A_5$$
$$+V_7V_1V_3V_4\cos(A_2+A_3+A_5+A_6+A_7)+V_4V_5V_6\ V_7\cos(A_5-A_7)+V_4^2V_5V_7\cos(A_6+A_7)$$
$$-V_4V_5^2V_7\cos(A_5-A_6-A_7)+V_5V_6^2V_7\cos(A_6-A_7)-V_5^2V_6V_7\cos A_7-V_4V_5V_7^2\cos A_5$$
$$+V_4V_5V_6\ V_7\cos(A_5+A_7)-V_4V_6^2V_7\cos(A_5+A_6-A_7)-V_5V_6V_7^2\cos A_6-V_4^2V_6V_7\cos A_7$$
$$+V_4V_6V_7^2\cos(A_5+A_6)+V_4V_5V_6\ V_7\cos(A_5-A_7) \qquad \textbf{(7−4)}$$

注意 (7−4)式第三部份內容裡共出現 36 個 cosine 項，其中也出現了 17 個不符和綜合規則的項數，而這 17 項恰分配成 5 組；每一組都須經由角度修正參數法來修正成符和綜合規則的項，修正完成最後的項數也回歸到 35 項。

(1) 第一組

是 $F = V_4^2V_5V_7\cos(A_6+A_7) - V_4V_5^2V_7\cos(A_5-A_6-A_7) - V_4V_5V_7^2\cos A_5 + V_4V_5V_6V_7\cos(A_5-A_7)$

$= V_4V_5V_7\,[\,V_4\cos(A_6+A_7) - V_5\cos(A_5-A_6-A_7) + V_6\cos(A_5-A_7) - V_7\cos A_5\,]$

應用角度修正參數法將 F 的 [ ]內 4 個項作轉換，運算過程如下；

應用引理 1. 取 n=7 代入一組方程式(1)與(2)，並化簡可得到以 V_1 為底的方程式；

$$V_1 = V_2\cos A_2 - V_3\cos(A_2+A_3) + V_4\cos(A_2+A_3+A_4) - V_5\cos(A_2+A_3+A_4+A_5) - V_6\cos(A_7+A_1) + V_7\cos A_1 \quad \textbf{(1−7.1)}$$

$$0 = V_2\sin A_2 - V_3\sin(A_2+A_3) + V_4\sin(A_2+A_3+A_4) - V_5\sin(A_2+A_3+A_4+A_5) + V_6\sin(A_7+A_1) - V_7\sin A_1 \quad \textbf{(2−7.1)}$$

比對 (1−7.1)式與 F 的[ ]內 4 個項，得知須將 7 個內角分成 $A_2+A_3+A_4+A_6+A_7$ 與 A_1+A_5 的 2 組，並令 $A_1+A_5=(2.5)\pi-\varphi$ 且 $A_2+A_3+A_4+A_6+A_7=(2.5)\pi+\varphi$，$\varphi$ 為角度修正參數，將此 2 組角度分別代入(1−7.1)式與(2−7.1)式內，化簡並加以移項，提出公因式，組合，整理，得

$$\begin{aligned} V_1 = \sin\varphi\cdot[&-V_2\cos(A_3+A_4+A_6+A_7) + V_3\cos(A_4+A_6+A_7) - V_4\cos(A_6+A_7) \\ &+ V_5\cos(A_5-A_6-A_7) - V_6\cos(A_5-A_7) + V_7\cos A_5\,] \\ +\cos\varphi\cdot[&\,V_2\sin(A_3+A_4+A_6+A_7) - V_3\sin(A_4+A_6+A_7) + V_4\sin(A_6+A_7) \\ &+ V_5\sin(A_5-A_6-A_7) - V_6\sin(A_5-A_7) + V_7\sin A_5\,] \end{aligned}$$

將上式改寫成 $V_1 = \sin\varphi\cdot(-F_1) + \cos\varphi\cdot F_2$ **(7−4a)**

$$\begin{aligned} 0 = \cos\varphi\cdot[&\,V_2\cos(A_3+A_4+A_6+A_7) - V_3\cos(A_4+A_6+A_7) + V_4\cos(A_6+A_7) \\ &- V_5\cos(A_5-A_6-A_7) + V_6\cos(A_5-A_7) - V_7\cos A_5\,] \\ +\sin\varphi\cdot[&\,V_2\sin(A_3+A_4+A_6+A_7) - V_3\sin(A_4+A_6+A_7) + V_4\sin(A_6+A_7) \\ &+ V_5\sin(A_5-A_6-A_7) - V_6\sin(A_5-A_7) + V_7\sin A_5\,] \end{aligned}$$

將上式改寫成 $0 = \cos\varphi\cdot F_1 + \sin\varphi\cdot F_2$ **(7−4b)**

將 (7−4a)式與 (7−4b)式聯立解出，得 $V_1\sin\varphi = -F_1$

而 $\cos(A_1+A_5) = \cos((2.5)\pi-\varphi) = \sin\varphi$，則 $V_1\cos(A_1+A_5) = -F_1$，故得

$$V_1\cos(A_1+A_5) + V_2\cos(A_3+A_4+A_6+A_7) - V_3\cos(A_4+A_6+A_7) + V_4\cos(A_6+A_7) - V_5\cos(A_5-A_6-A_7) + V_6\cos(A_5-A_7) - V_7\cos A_5 = 0$$

因 $\cos(A_3+A_4+A_6+A_7) = -\cos(A_5+A_1+A_2)$，則上式轉換成

$$V_4\cos(A_6+A_7) - V_5\cos(A_5-A_6-A_7) + V_6\cos(A_5-A_7) - V_7\cos A_5 = -V_1\cos(A_1+A_5) + V_2\cos(A_5+A_1+A_2) + V_3\cos(A_4+A_6+A_7) \quad \textbf{(7−4c)}$$

將 (7−4c)式代回第一組 F 式中，因此，第一組 F 式轉換完成，得

$$F = V_4V_5V_7\,[-V_1\cos(A_1+A_5) + V_2\cos(A_5+A_1+A_2) + V_3\cos(A_4+A_6+A_7)\,] \quad \textbf{(7−F)}$$

(2) 第二組

是 G $= -V_4^2V_6V_7\cos A_7 + V_4V_5V_6\,V_7\cos(A_5-A_7) + V_4V_6V_7^2\cos(A_5+A_6) - V_4V_6^2V_7\cos(A_5+A_6-A_7)$

$= V_4V_6V_7\,[-V_4\cos A_7 + V_5\cos(A_5-A_7) - V_6\cos(A_5+A_6-A_7) + V_7\cos(A_5+A_6)\,]$

比對 (1−7.1)式與 G 的[ ]內 4 個項，得知須將 7 個內角分成 $A_2+A_3+A_4+A_7$ 與 $A_1+A_5+A_6$ 的 2 組，並令 φ 為角度修正參數，$A_2+A_3+A_4+A_7=(2.5)\pi+\varphi$ 且 $A_1+A_5+A_6=(2.5)\pi-\varphi$，將此 2 組角度分別代入 (1−7.1)式與 (2−7.1)式內，化簡並加以移項，提出公因式，組合，整理，得

$$V_1 = \sin\varphi\cdot[-V_2\cos(A_3+A_4+A_7)+V_3\cos(A_4+A_7)-V_4\cos A_7+V_5\cos(A_5-A_7)$$
$$-V_6\cos(A_5+A_6-A_7)+V_7\cos(A_5+A_6)\,]+\cos\varphi\cdot[\,V_2\sin(A_3+A_4+A_7)$$
$$-V_3\sin(A_4+A_7)+V_4\sin A_7+V_5\sin(A_5-A_7)-V_6\sin(A_5+A_6-A_7)+V_7\sin(A_5+A_6)\,]$$

將上式改寫成　$V_1 = \sin\varphi\cdot(-G_1) + \cos\varphi\cdot G_2$ **(7−5a)**

$$0 = \cos\varphi\cdot[\,V_2\cos(A_3+A_4+A_7)-V_3\cos(A_4+A_7)+V_4\cos A_7-V_5\cos(A_5-A_7)$$
$$+V_6\cos(A_5+A_6-A_7)-V_7\cos(A_5+A_6)\,]+\sin\varphi\cdot[\,V_2\sin(A_3+A_4+A_7)$$
$$-V_3\sin(A_4+A_7)+V_4\sin A_7+V_5\sin(A_5-A_7)-V_6\sin(A_5+A_6-A_7)+V_7\sin(A_5+A_6)\,]$$

將上式改寫成　$0=\cos\varphi\cdot G_1+\sin\varphi\cdot G_2$ **(7−5b)**

將 (7−5a)式與 (7−5b)式聯立解出，得 $V_1\sin\varphi=-G_1$

而 $\cos(A_1+A_5+A_6)=\cos((2.5)\pi-\varphi)=\sin\varphi$，則 $V_1\cos(A_1+A_5+A_6)=-G_1$，得

$$V_1\cos(A_1+A_5+A_6)=-V_2\cos(A_3+A_4+A_7)+V_3\cos(A_4+A_7)-V_4\cos A_7$$
$$+V_5\cos(A_5-A_7)-V_6\cos(A_5+A_6-A_7)+V_7\cos(A_5+A_6)$$

將上式移項，整理，得

$$-V_4\cos A_7+V_5\cos(A_5-A_7)-V_6\cos(A_5+A_6-A_7)+V_7\cos(A_5+A_6)$$
$$= V_1\cos(A_1+A_5+A_6)+V_2\cos(A_3+A_4+A_7)-V_3\cos(A_4+A_7) \quad \textbf{(7−5c)}$$

將 (7−5c)式代回第二組 G 式中，因此，第二組 G 式轉換完成，得

$$G = V_4V_6V_7\,[\,V_1\cos(A_1+A_5+A_6)+V_2\cos(A_3+A_4+A_7)-V_3\cos(A_4+A_7)\,] \quad \textbf{(7−G)}$$

(3) 第三組

是　H $= V_1V_2^2V_3\cos(A_2-A_3) - V_1^2V_2V_3\cos A_3 - V_1V_2V_3^2\cos A_2$

$= V_1V_2V_3\,[-V_1\cos A_3+V_2\cos(A_2-A_3)-V_3\cos A_2\,]$

仿效 (1−7.1)式與(2−7.1)式，但換成以 V_7 為底的方程式，得下列兩式；

$$V_7 = V_1\cos A_1 - V_2\cos\left(A_1+A_2\right)+V_3\cos(A_1+A_2+A_3)-V_4\cos(A_1+A_2+A_3+A_4)$$
$$-V_5\cos(A_6+A_7)+V_6\cos A_7 \quad \textbf{(1−7.7)}$$

$$0 = V_1\sin A_1 - V_2\sin\left(A_1+A_2\right)+V_3\sin\left(A_1+A_2+A_3\right)-V_4\sin\left(A_1+A_2+A_3+A_4\right)$$
$$+V_5\sin(A_6+A_7)-V_6\sin A_7 \quad \textbf{(2−7.7)}$$

比對(1−7.7)式與 H 的[]內 3 個項，得知須將 7 個內角分拆成 2 組為 A_1+A_3 與 $A_2+A_4+A_5+A_6+A_7$，並令 φ 角度修正參數，$A_1+A_3=(2.5)\pi-\varphi$ 且 $A_2+A_4+A_5+A_6+A_7=(2.5)\pi+\varphi$，將此 2 組角度代入(1−7.7)式與(2−7.7)式內，化簡並加以移項，提出公因式，組合，整理，再參照模仿 F 組及 G 組的演算過程(省略這些過程)，最後得 (7−6)式，如下；

$$-V_1\cos A_3+V_2\cos(A_2-A_3)-V_3\cos A_2$$
$$=-V_4\cos(A_2+A_4)+V_5\cos(A_2+A_4+A_5)-V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)-V_7\cos(A_1+A_3) \quad \textbf{(7−6)}$$

將(7−6)式代回第三組 H 式中，最後得轉換完成的第三組 H 式，如下

$$\mathrm{H}=V_1V_2V_3\,[-V_4\cos(A_2+A_4)+V_5\cos(A_2+A_4+A_5)-V_6\cos(A_2+A_4+A_5+A_6)-V_7\cos(A_1+A_3)]$$

(7−H)

(4) 第四組

是 $\mathrm{T}=V_4V_5^2V_6\cos(A_5-A_6)-V_4V_5V_6^2\cos A_5-V_4^2V_5V_6\cos A_6$
$=V_4V_5V_6\,[-V_4\cos A_6+V_5\cos(A_5-A_6)-V_6\cos A_5]$

比對(1−7.1)式與 T 的[ ]內 3 個項，得知須將 7 個內角拆分成為 $A_2+A_3+A_4+A_6$ 與 $A_1+A_5+A_7$ 的 2 組，並令 φ 為角度修正參數，$A_1+A_5+A_7=(2.5)\pi-\varphi$ 且 $A_2+A_3+A_4+A_6=(2.5)\pi+\varphi$，將此 2 組角度分別代入(1−7.1)式與(2−7.1)式內，化簡並加以移項，提出公因式，組合，整理，再參照模仿 F 組及 G 組的演算過程(省略這些過程)，最後得 (7−7)式，如下；

$$-V_4\cos A_6+V_5\cos(A_5-A_6)-V_6\cos A_5$$
$$=-V_7\cos(A_5+A_7)+V_1\cos(A_5+A_7+A_1)-V_2\cos(A_5+A_7+A_1+A_2)-V_3\cos(A_4+A_6) \quad \textbf{(7−7)}$$

將 (7−7)式代回第四組 T 式中，最後得轉換完成的第四組 T 式，如下；

$$\mathrm{T}.=V_4V_5V_6\,[-V_7\cos(A_5+A_7)+V_1\cos(A_5+A_7+A_1)$$
$$-V_2\cos(A_5+A_7+A_1+A_2)-V_3\cos(A_4+A_6)] \quad \textbf{(7−T)}$$

(5) 第五組

是 $\mathrm{W}=V_5V_6^2V_7\cos(A_6-A_7)-V_5V_6V_7^2\cos A_6-V_5^2V_6V_7\cos A_7$
$=V_5V_6V_7\,[-V_5\cos A_7+V_6\cos(A_6-A_7)-V_7\cos A_6]$

仿效 (1−7.1)式與(2−7.1)式，但換成以 V_4 為底的方程式，得下列兩式；

$$V_4=V_5\cos A_5-V_6\cos(A_5+A_6)+V_7\cos(A_5+A_6+A_7)-V_1\cos(A_5+A_6+A_7+A_1)$$
$$-V_2\cos(A_3+A_4)+V_3\cos A_4 \quad \textbf{(1−7.4)}$$

$$0=V_5\sin A_5-V_6\sin(A_5+A_6)+V_7\sin(A_5+A_6+A_7)-V_1\sin(A_5+A_6+A_7+A_1)$$
$$+V_2\sin(A_3+A_4)-V_3\sin A_4 \quad \textbf{(2−7.4)}$$

比對 (1−7.4)式與 W 的[ ]內 3 個項，得知須將 7 個內角分拆成 2 組為 A_5+A_7 與

$A_1+A_2+A_3+A_4+A_6$，並令 φ 為角度修正參數，$A_5+A_7=(2.5)\pi-\varphi$ 且 $A_1+A_2+A_3+A_4+A_6$ $=(2.5)\pi+\varphi$,將此 2 組角度代入(1−7.4)式與 (2−7.4)式內，化簡並加以移項，提出公因式，組合，整理，再參照模仿 F 組及 G 組的演算過程(省略這些過程)，最後得(7−8)式，如下；

$$-V_5\cos A_7+V_6\cos(A_6-A_7)-V_7\cos A_6$$
$$=-V_1\cos(A_6+A_1)+V_2\cos(A_6+A_1+A_2)-V_3\cos(A_6+A_1+A_2+A_3)-V_4\cos(A_5+A_7) \qquad \textbf{(7−8)}$$

將 (7−8)式代回第五組 W 式中，最後得轉換完成的第五組 W 式，如下；

$$\mathrm{W}=V_5V_6V_7\,[\,-V_1\cos(A_6+A_1)+V_2\cos(A_6+A_1+A_2)-V_3\cos(A_6+A_1+A_2+A_3)-V_4\cos(A_5+A_7)\,]$$

(7−W)

(6) 以上這五組全部轉換完成的項數共計 18 項，其中包含在(7−W)式與(7−T)式內的 2 個完全相同項：$-V_4V_5V_6V_7\cos(A_5+A_7)$ 及 16 個完全相異的項。而原來(7−4)式中還有 19 項，包含$+V_4V_5V_6V_7\cos(A_5+A_7)$ 這一項。將(7−F)式、(7−G)式、(7−H)式、(7−T)式及(7−W)式這五組全部轉換完成的新 18 個項取代原來(7−4)式中那不符規則的 17 個項，形成 37 個項；這 37 項內容裡包括有 2 個$-V_4V_5V_6V_7\cos(A_5+A_7)$ 及 1 個$+V_4V_5V_6V_7\cos(A_5+A_7)$，加減之後少了 2 項，剛好構成了完全符合綜合規則條件下相異的 35 項！再依據每一項邊長右下標數字按順序作循環組排列，並要特別檢查及調整每一 cosine 項( )內的角度組合使符合內角排列法則，如此操作即完美無缺地將這全新轉換完成的第三部份 35 個 cosine 項排列成(7−1)式正確的原型平面凸七邊形面積平方式公式標準型式！驗證完成。

(五) 平面凸八邊形

由前述四種原型平面凸多邊形面積平方式公式的內容知，每一 cos 項( )內的角度組合都是呈現加法性分佈，因此為了縮減敘述長度，直接定義出(1)邊長乘積與(2)角度組合兩者符號如下；

定義(1) 邊長乘積：$V_{pq\cdots rt}=V_pV_q\cdots V_rV_t$

定義(2) 角度組合：$A_{bcd\cdots xyz}=A_b+A_c+A_d+\cdots+A_x+A_y+A_z$

如此，所有的面積平方式公式長度即可大大地縮減！

a. 預測原型面積平方式公式

現在再參照前述的 5 個綜合規則來預測平面凸八邊形面積平方式公式；

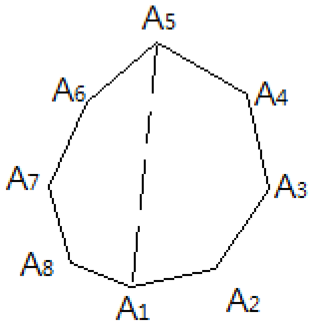

圖 10.

如圖 10. 在平面上給定一個凸八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_7}=V_6$，$\overline{A_7A_8}=V_7$，$\overline{A_8A_1}=V_8$，令此凸八邊形面積為 **S(8)**，n = 8，則 m = 5，故連接兩個頂角 A_5 與 A_1 使形成一對角線 $\overline{A_5A_1}$，將此凸八邊形分割成 五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 五邊形 $A_1A_5A_6A_7A_8$，則預測出的平面凸八邊形面積平方式公式如下；

$$[S(8)]^2=\frac{1}{4}[V_{12}{}^2+V_{13}{}^2+V_{14}{}^2+V_{23}{}^2+V_{24}{}^2+V_{34}{}^2+V_{56}{}^2+V_{57}{}^2+V_{58}{}^2+V_{67}{}^2+V_{68}{}^2+V_{78}{}^2]$$

$$-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2-V_5^2-V_6^2-V_7^2-V_8^2)^2-\frac{1}{2}[V_{1234}\cos A_{24}+V_{2345}\cos A_{35}$$

$$+V_{3456}\cos A_{46}+V_{4567}\cos A_{57}+V_{5678}\cos A_{68}+V_{6781}\cos A_{71}+V_{7812}\cos A_{82}+V_{8123}\cos A_{13}]$$

$$+\frac{1}{2}[V_{1235}\cos A_{245}+V_{2346}\cos A_{356}+V_{3457}\cos A_{467}+V_{4568}\cos A_{578}+V_{5671}\cos A_{681}+V_{6782}\cos A_{712}$$

$$+V_{7813}\cos A_{823}+V_{8124}\cos A_{134}]-\frac{1}{2}[V_{1236}\cos A_{2456}+V_{2347}\cos A_{3567}+V_{3458}\cos A_{4678}$$

$$+V_{4561}\cos A_{5781}+V_{5672}\cos A_{6812}+V_{6783}\cos A_{7123}+V_{7814}\cos A_{8234}+V_{8125}\cos A_{1345}]$$

$$+\frac{1}{2}[V_{1237}\cos A_{24567}+V_{2348}\cos A_{35678}+V_{3451}\cos A_{46781}+V_{4562}\cos A_{57812}+V_{5673}\cos A_{68123}$$

$$+V_{6784}\cos A_{71234}+V_{7815}\cos A_{82345}+V_{8126}\cos A_{13456}]-\frac{1}{2}[V_{1245}\cos A_{25}+V_{2356}\cos A_{36}$$

$$+V_{3467}\cos A_{47}+V_{4578}\cos A_{58}+V_{5681}\cos A_{61}+V_{6712}\cos A_{72}+V_{7823}\cos A_{83}+V_{8134}\cos A_{14}]$$

$$+\frac{1}{2}[V_{1246}\cos A_{256}+V_{2357}\cos A_{367}+V_{3468}\cos A_{478}+V_{4571}\cos A_{581}+V_{5682}\cos A_{612}$$

$$+V_{6713}\cos A_{723}+V_{7824}\cos A_{834}+V_{8135}\cos A_{145}]-\frac{1}{2}[V_{1247}\cos A_{2567}+V_{2358}\cos A_{3678}$$

$$+V_{3461}\cos A_{4781}+V_{4572}\cos A_{5812}+V_{5683}\cos A_{6123}+V_{6714}\cos A_{7234}+V_{7825}\cos A_{8345}$$

$$+V_{8136}\cos A_{1456}]-\frac{1}{2}[V_{1256}\cos A_{26}+V_{2367}\cos A_{37}+V_{3478}\cos A_{48}+V_{4581}\cos A_{51}]$$

$$+\frac{1}{2}[V_{1257}\cos A_{267}+V_{2368}\cos A_{378}+V_{3471}\cos A_{481}+V_{4582}\cos A_{512}+V_{5613}\cos A_{623}$$

$$+V_{6724}\cos A_{734}+V_{7835}\cos A_{845}+V_{8146}\cos A_{156}]-\frac{1}{2}[V_{1357}\cos A_{2367}+V_{2468}\cos A_{3478}] \quad \textbf{(8−1)}$$

方程式 (8−1)式即為原型平面凸八邊形面積平方式公式！公式中第三部份的 cos 項共出現 70 個完全相異的項，符合 C(8,4)=70 的關係。在排列這些項數時，發覺第 8 循環組僅出現前 4 項 (後 4 項重複了)，及第 10 循環組僅出現前 2 項 (後 6 項都兩兩重複)，而其餘 8 組各組都出現 8 個 cos 項。

b. **驗證 (略)。驗證過程與平面凸七邊形之[(四)−b].的過程完全相同。**

（六）平面凸 N 邊形

1. 定義各循環組的組成表示式符號

若已知任一循環組領頭項的邊長乘積為 V_{axby}，則這整個循環組的組成內容表示式被定義成 C(V_{axby}) 的符號。

例 4. 對原型平面凸 n 邊形面積平方式公式言；

$$\mathrm{C}(V_{1234}) = V_{1234}\cos A_{24}+V_{2345}\cos A_{35}+V_{3456}\cos A_{46}+V_{4567}\cos A_{57}+V_{5678}\cos A_{68}+\ldots\ldots$$
$$+V_{(n-2)(n-1)n1}\cos A_{(n-1)1}+V_{(n-1)n12}\cos A_{n2}+V_{n123}\cos A_{13}$$

2. N = 9，平面凸九邊形

令此凸九邊形面積為 **S(9)**，n = 9，則 m = 5，因 C(9,4) = 126，由綜合規則排出的原型平面凸九邊形面積平方式公式被大大地縮減為

$$[S(9)]^2 = \frac{1}{4}[V_{12}{}^2+V_{13}{}^2+V_{14}{}^2+V_{23}{}^2+V_{24}{}^2+V_{34}{}^2+V_{56}{}^2+V_{57}{}^2+V_{58}{}^2+V_{59}{}^2+V_{67}{}^2+V_{68}{}^2$$

$$+V_{69}{}^2+V_{78}{}^2+V_{79}{}^2+V_{89}{}^2]-\frac{1}{16}(V_1^2+V_2^2+V_3^2+V_4^2-V_5^2-V_6^2-V_7{}^2-V_8{}^2-V_9{}^2)^2$$

$$+\frac{1}{2}[-\mathrm{C}(V_{1234})+\mathrm{C}(V_{1235})-\mathrm{C}(V_{1236})+\mathrm{C}(V_{1237})-\mathrm{C}(V_{1238})-\mathrm{C}(V_{1245})+\mathrm{C}(V_{1246})$$

$$-\mathrm{C}(V_{1247})+\mathrm{C}(V_{1248})-\mathrm{C}(V_{1256})+\mathrm{C}(V_{1257})-\mathrm{C}(V_{1258})+\mathrm{C}(V_{1268})-\mathrm{C}(V_{1357})]$$

上列公式中，第三部份 cos 項數恰呈現 14 個循環組，每一循環組有 9 個 cos 項。

證明: 略。

3. N = 10，平面凸十邊形

因 C(10,4) = 210，由綜合規則排出的原型平面凸十邊形面積平方式公式中，第三部

份 cos 項數計有 22 個循環組, 第 16 組及第 22 組各只有 5 個 cos 項，而其餘每一循環組都各有 10 個完整 cos 項。以下簡要表明這 22 個循環組領頭項；

$-V_{1234}$， V_{1235}，$-V_{1236}$， V_{1237}，$-V_{1238}$， V_{1239}，$-V_{1245}$， V_{1246}，$-V_{1247}$， V_{1248}，$-V_{1249}$，$-V_{1256}$， V_{1257}，

$-V_{1258}$， V_{1259}，$-V_{1267}$ (5 項), V_{1268}，$-V_{1269}$， V_{1279}，$-V_{1357}$， V_{1358}，$-V_{1368}$ (5 項)

4. 自 N = 10 , 11 ,12, ... 之後，公式中第三部份的 cos 項數都超過 210 項，愈來愈多，但僅需應用 5 個綜合規則的操作細則都能正確完整的排列出來。而驗證公式時，任一多邊形都要應用到角度修正參數法。

參、結論

公元 1842 年，德國數學家 Bretschneider 首次獨自發現半角型的平面凸四邊形面積公式。此後，更見五邊形，六邊形的面積公式愈趨繁複，令人望之卻步！現在只要應用作者研究歸納出的 5 個綜合規則細則即能正確又快速地排列出原型的平面凸多邊形面積平方式公式。仔細衡量，推演比對，顯然這樣的原型公式已涵蓋了 Bretschneider、Brahmagupta、Heron 、Archimedes 的各家面積公式。原型與半角型公式之最大差異在於前者內容是具有共同規律秩序特質的，而後者較凌亂,由比對五邊形的(5−8)式與六邊形的(6−3)式即可得知！選擇原型公式來作為多邊形面積平方式公式的表示式較有意義。原型公式的三大部份內容必都是有跡可尋的而且此等公式也扮演著承先啟後的作用！

角度修正參數法的意義在於透過選取適當的內角組合,將凸多邊形各邊長與各內角之間的組合關係作重新轉換，以獲得演算中所需要的新關係方程式。奇數邊多邊形面積平方式公式中第三部份 cos 項的每一循環組都有相同多的項，而偶數邊者大部份循環組都有相同多的項，其餘會有幾個循環組出現重複的項,這些重複的項數必為邊數的因數。若對平面凸多邊形的分割法採取與本文 5 個綜合規則的方法不同，則經計算出的面積平方式公式在第一及第三部份內容裡將同步增加更多項數，愈趨複雜！

參考文獻

李輝濱，平面凸五邊形面積的研究 數學傳播季刊 36 卷 1 期(141 期) 2012 年 3 月。
李輝濱，圓內接五邊形面積的研究 數學傳播季刊 36 卷 4 期(144 期) 2012 年 12 月。
蔡聰明，數學拾貝--星空燦爛的數學，三民書局。
黃武雄，中西數學簡史，1980，人間文化事業公司。
世部貞市郎，幾何學辭典，1988，九章出版社。
林聰源，數學史--古典篇，1995，凡異出版社。
項武義，基礎幾何學，五南圖書出版公司。
項武義，基礎分析學，五南圖書出版公司。
E.W. Hobson, A treatise on plane and Advanced trigonometry, Dover , 1957.
Z.A. Melzek, Invitation to geometry, John Wiley and Sons , 1983.

(完)