費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

定義費氏數列 $\langle F_n \rangle$：$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$，由比內(Binet)公式，知 $\langle F_n \rangle$ 的一般項公式為 $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。換個寫法，設 α 與 β 為方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 的兩根，且 $\alpha > \beta$，則 $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}$，等號的最右邊，是 α 與 β 的「二元完全齊次對稱多項式」，從這個角度來看，費氏數其實是 $\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}$ 取值 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的特殊情形。換句話說，

$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}$ 可視為費氏數的推廣。以此觀之，有可能從研究二元完全齊次對稱多項式的性質，推導出關於費氏數的結論，這就是本篇文章的主要目的。

提到「二元完全齊次對稱多項式」，各位讀者會想到什麼性質呢？以現行的高中課程而言，似乎沒提過什麼令人留下印象的性質。文章「完全齊次對稱多項式(起)(承)(轉)(合)」(參考資料[1][2][3][4])的工作，其目的在補上這一塊拼圖：首先提出所謂的「自由分解重組恆等式」，接著討論「取變數相同」的情形，再來轉而探討「偏微分」公式的規律，最後合起來得到取變數相同和偏微分是同一回事。

運用完全齊次對稱多項式的性質，本文得到了一個關於費氏數列的恆等式：

設 n 為正整數，則 $\displaystyle\sum_{i+j=n} F_i F_j = \frac{(n-1)F_{n+1} + (n+1)F_{n-1}}{5}$。

例：$\displaystyle\sum_{i+j=6} F_i F_j = F_5F_1 + F_4F_2 + F_3F_3 + F_2F_4 + F_1F_5 = 5\cdot1 + 3\cdot1 + 2\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot5 = 20$，

而 $\dfrac{(6-1)F_{6+1} + (6+1)F_{6-1}}{5} = \dfrac{5F_7 + 7F_5}{5} = 20$。

恆等式的左邊，是將正整數 n 作「整數分割」(partition!)，作為費氏數列的下標，取乘積再

加總，其結果為恆等式的右邊，可以只用 F_{n-1} 與 F_{n+1} 加以表達。各位親愛的讀者，這是怎麼一回事呢？

貳、本文

一、記號與定義

完全齊次對稱多項式 $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$：

定義： $h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$，稱為「$n$ 元 k 次完全齊次對稱多項式」。

特別地，$h_0(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，且 $h_k(a)=a^k$。

例：$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ge 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

例：$h_2(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$。

例：$h_3(a,b)=a^3+b^3+a^2b+ab^2$。

例：$h_n(\alpha,\beta)=\sum\limits_{\substack{i+j=n\\ i,j\ge 0}}(\alpha^i\beta^j)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$

二、推導恆等式

(一)四個引理

設 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha>\beta$。

<u>引理 1.</u> $F_{n+1}=h_n(\alpha,\beta)$

證明：由費氏數列的比內(Binet)公式，得

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n=h_n(\alpha,\beta)\text{。}$$

註：下標相差 1。

<u>引理 2.</u> $\sum\limits_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge 0}}h_i(a,b)\cdot h_j(a,b)=h_k(a,b,a,b)$

證明：由「自由分解重組恆等式」(參考資料[1])，有

$$\begin{aligned}&h_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)\\&=\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k\\ k_1,k_2,\cdots,k_m\ge 0}}[h_{k_1}(a_1,a_2,\cdots,a_{i_1})\cdot h_{k_2}(a_{i_1+1},a_{i_1+2},\cdots,a_{i_2})\cdots\cdots h_{k_m}(a_{i_{m-1}+1},a_{i_{m-1}+2},\cdots,a_{i_m})]\end{aligned}$$

在此恆等式中，取 $n=4$，$a_1=a$，$a_2=b$，$a_3=a$，$a_4=b$，

$m=2$ ， $k_1=i$ ， $k_2=j$ ， $i_1=2$ ， $i_2=4$ ，可得

$$h_k(a,b,a,b)=h_k(a_1,a_2,a_3,a_4)=\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge 0}}[h_i(a_1,a_2)\cdot h_j(a_3,a_4)]=\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge 0}}[h_i(a,b)\cdot h_j(a,b)]$$

<u>引理 3.</u> $h_k(a,b,a,b)=\dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)$

證明：由「完全齊次對稱多項式(合)」(參考資料[4])一文的結論，有

$$h_k(\underbrace{a_1,\cdots,a_1}_{p_1+1\text{個}},\underbrace{a_2,\cdots,a_2}_{p_2+1\text{個}},\cdots,\underbrace{a_m,\cdots,a_m}_{p_m+1\text{個}})$$

$$=\frac{1}{p_1!\,p_2!\cdots p_m!}\cdot\frac{\partial^{p_m}}{\partial {a_m}^{p_m}}\cdots\frac{\partial^{p_2}}{\partial {a_2}^{p_2}}\frac{\partial^{p_1}}{\partial {a_1}^{p_1}}\;h_{k+(p_1+p_2+\cdots+p_m)}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$$

在此等式中，取 $m=2$ ， $p_1=1$ ， $p_2=1$ ， $a_1=a$ ， $a_2=b$ ，可得

$$h_k(a,a,b,b)=\frac{1}{1!1!}\cdot\frac{\partial}{\partial a_2}\frac{\partial}{\partial a_1}\;h_{k+1+1}(a_1,a_2)=\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)\ ，$$

$$\Rightarrow h_k(a,b,a,b)=h_k(a,a,b,b)=\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)$$

<u>引理 4.</u> $\dfrac{\partial}{\partial b}\dfrac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)=\dfrac{(k+1)\cdot\dfrac{(a^{k+3}-b^{k+3})}{a-b}-ab\cdot(k+3)\cdot\dfrac{(a^{k+1}-b^{k+1})}{a-b}}{(a-b)^2}$

證明： $\dfrac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)=\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}\right)$

$$=\frac{(k+3)a^{k+2}(a-b)-(a^{k+3}-b^{k+3})}{(a-b)^2}=\frac{(k+3)a^{k+2}}{a-b}-\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{(a-b)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)=\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{(k+3)a^{k+2}}{a-b}-\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{(a-b)^2}\right]$$

$$=\frac{-(-1)\cdot(k+3)a^{k+2}}{(a-b)^2}-\frac{-(k+3)b^{k+2}(a-b)^2-2(b-a)(a^{k+3}-b^{k+3})}{(a-b)^4}$$

$$=\frac{(k+3)a^{k+2}}{(a-b)^2}+\frac{(k+3)b^{k+2}}{(a-b)^2}-2\cdot\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{(a-b)^3}$$

$$=\frac{(k+3)(a^{k+2}+b^{k+2})(a-b)-2(a^{k+3}-b^{k+3})}{(a-b)^3}$$

$$=\frac{(k+1)(a^{k+3}-b^{k+3})+(k+3)(ab^{k+2}-a^{k+2}b)}{(a-b)^3}$$

$$=\frac{(k+1)\cdot\dfrac{(a^{k+3}-b^{k+3})}{a-b}-ab\cdot(k+3)\cdot\dfrac{(a^{k+1}-b^{k+1})}{a-b}}{(a-b)^2}$$

(二)主要定理：$\sum_{i+j=n} F_i F_j = \frac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}$，其中 $n \in \mathbb{N}$

證明：設 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，且 $\alpha > \beta$

$\Rightarrow \alpha+\beta=1$， $\alpha\beta=-1$， $\alpha-\beta=\sqrt{5}$

(1) 一方面，由引理 1，得

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(\alpha,\beta) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} F_{i+1}\cdot F_{j+1} = \sum_{\substack{(i+1)+(j+1)=k+2 \\ i,j\ge 0}} (F_{i+1}\cdot F_{j+1})$$

令 $p=i+1\ge 1$， $q=j+1\ge 1$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{(i+1)+(j+1)=k+2 \\ i,j\ge 0}} (F_{i+1}\cdot F_{j+1}) = \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\ge 1}} (F_p\cdot F_q) = \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\ge 0}} (F_p\cdot F_q) = \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i,j\ge 0}} (F_i\cdot F_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(\alpha,\beta) = \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i,j\ge 0}} (F_i\cdot F_j)$$

(2) 另一方面，$\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(\alpha,\beta) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} h_i(a,b)\cdot h_j(a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha \\ b=\beta}}$

$$= h_k(a,b,a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha \\ b=\beta}} \qquad \text{(由引理 2)}$$

$$= h_k(a,a,b,b)\Big|_{\substack{a=\alpha \\ b=\beta}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a} h_{k+2}(a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha \\ b=\beta}} \qquad \text{(由引理 3)}$$

$$= \left.\frac{(k+1)\cdot\frac{(a^{k+3}-b^{k+3})}{a-b} - ab\cdot(k+3)\cdot\frac{(a^{k+1}-b^{k+1})}{a-b}}{(a-b)^2}\right|_{\substack{a=\alpha \\ b=\beta}} \qquad \text{(由引理 4)}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot\frac{(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})}{\alpha-\beta} - \alpha\beta\cdot(k+3)\cdot\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(k+1)F_{k+3}+(k+3)F_{k+1}}{5}$$

(3) 綜合(1)(2)，得 $\sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i,j\ge 0}} (F_i\cdot F_j) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\ge 0}} h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(\alpha,\beta) = \frac{(k+1)F_{k+3}+(k+3)F_{k+1}}{5}$

令 $k+2=n \Rightarrow \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\ge 0}} (F_i\cdot F_j) = \frac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}$，得證。

參、結語

回顧整個過程，也可以「壓縮」成「一頁證明」：

$$\sum_{\substack{i+j=k+2\\ i,j\ge 0}}(F_i\cdot F_j)\overset{\text{引理1}}{=}\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge 0}}h_i(\alpha,\beta)\cdot h_j(\alpha,\beta)=\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\ge 0}}h_i(a,b)\cdot h_j(a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}\overset{\text{引理2}}{=}h_k(a,b,a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}$$

$$=h_k(a,a,b,b)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}\overset{\text{引理3}}{=}\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}h_{k+2}(a,b)\Big|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}\overset{\text{引理4}}{=}\frac{(k+1)\cdot\dfrac{(a^{k+3}-b^{k+3})}{a-b}-ab\cdot(k+3)\cdot\dfrac{(a^{k+1}-b^{k+1})}{a-b}}{(a-b)^2}\Bigg|_{\substack{a=\alpha\\ b=\beta}}$$

$$=\frac{(k+1)\cdot\dfrac{(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\cdot(k+3)\cdot\dfrac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})}{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{(k+1)F_{k+3}+(k+3)F_{k+1}}{5}\text{ 。}$$

對於已經掌握「完全齊次對稱多項式」性質的讀者，上途的推導過程是一氣呵成的。

當然，條條大路通羅馬，不免有讀者質疑，費氏數的性質，居然動用到「偏微分」，是否真有此必要？筆者的回答是這樣的：基本上，正是憑藉著完全齊次對稱多項式的性質，以及偏微分的計算，而自然地得到此一「費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式」，有興趣的讀者，不妨試試用數學歸納法或其他證法，筆者樂觀其成。

其實應該這麼說，一個又一個的恆等式，對於我們的數學人生，到底價值何在？許許多多的等式令人目不暇給，但是在我們的心中到底留下什麼？筆者以為，我們看到的等式是表象，是樹上的花、葉子、果實，研究者的工作，是探求其根，找出背後的理論與本質，從而推演出新的結論。在這篇文章中，想呈現出費氏數列的一種較為少見的面向--完全齊次對稱多項式，可以想見，這棵樹能結出的果子，應該還有不少。筆者最感神奇的是，一個歸類於組合數學的題目，居然可以透過偏微分來處理，在離散與連續的交界處，仍有不為人知的奧秘，有待我們去探索。

參考文獻

陳建燁，完全齊次對稱多項式(起)：自由分解重組恆等式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
陳建燁，完全齊次對稱多項式(承)：取相同變數之公式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
陳建燁，完全齊次對稱多項式(轉):偏微分公式，高中數學學科中心電子報第 113 期。
陳建燁，完全齊次對稱多項式(合)：取相同變數與偏微分，高中數學學科中心電子報第 113 期。