等積四邊形的存在性

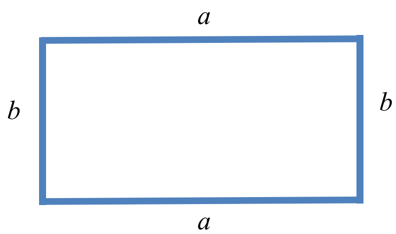
朱亭叡 [1] 朱亮儒 [2*]

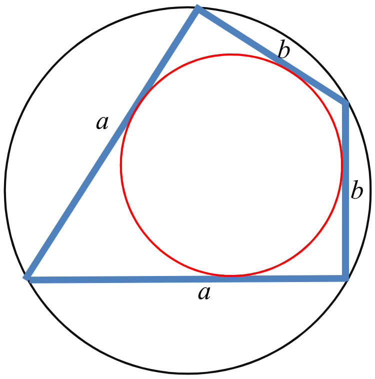
[1] 國立臺北科技大學 機電系

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

我們知道：每一個三角形都有內切圓，也會有外接圓；但是四邊形未必有內切圓或外接圓。例如：正方形有內切圓，也有外接圓；長方形及等腰梯形都有外接圓、未必有內切圓；菱形及鳶形有內切圓、未必有外接圓。內切圓與外接圓都是中學數學課程中重要的幾何概念(蔡聰明，2002；吳波，2013)。給定四邊形 $ABCD$ 的四邊長 a,b,c,d，當某四邊形有內切圓，也有外接圓，且四邊長也是 a,b,c,d (不論次序)時，我們稱此四邊形為 $ABCD$ 的一個「**等積四邊形**」。例如：左下圖是邊長依序為 a,b,a,b 的長方形，而右下圖是邊長依序為 a,b,b,a 的一個等積四邊形。





所謂〝等積〞的概念是源自於四邊形有內切圓，也有外接圓時，其面積都等於 $\sqrt{abcd}$ (蔡聰明，1993；林英哲，2016)。在本文中，我們將探討兩個有趣的存在性問題：「有內切圓的四邊形是否都存在一等積四邊形？」以及「有外接圓的四邊形是否都存在一等積四邊形？」本次研究的目的是希望讀者能熟悉內切圓與外接圓的基本性質，並能運用其等價的關係來解決一些有趣的動態幾何問題。

貳、有內切圓的四邊形之等積四邊形

利用圓周角的度數等於所對弧圓心角一半的性質，我們可以證明：「一個四邊形有外

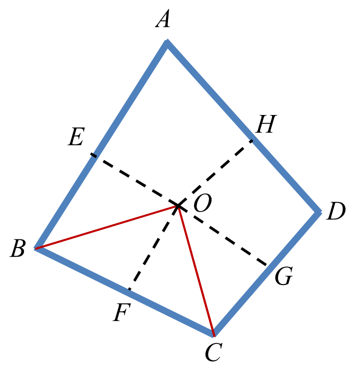
*為本文通訊作者

接圓的充要條件為每一雙對角互補」。另一方面，藉由過圓外一點到圓的兩條切線段等長的性質，我們知道：「有內切圓的四邊形其兩雙對邊長之和相等」；此一性質不僅是必要條件，它也是一個充分條件，證明如下：

【定理一】 若四邊形 $ABCD$ 的邊長分別為 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ ，則四邊形 $ABCD$ 有內切圓的充要條件為兩對邊長之和相等，即 $a+c=b+d$ 。

證：以下僅證明充分性：當 $a+c=b+d$ 時，四邊形 $ABCD$ 有內切圓。

設 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的平分線交於點 O ，由 O 作四邊 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ 的垂線，垂足分別為 E,F,G,H 。



則由 $\Delta OEB \cong \Delta OFB$ ， $\Delta OFC \cong \Delta OGC$ (RHS 全等性質)，得知：

$$\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OG} \text{，} \overline{EB}=\overline{BF} \text{，且 } \overline{FC}=\overline{CG} \text{。}$$

又 $a+c=b+d$ ，因此， $\overline{AD}=d=a+c-b=\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}=\overline{AE}+\overline{DG}$ 。

以下要證明： $\overline{AH}=\overline{AE}$ 且 $\overline{DH}=\overline{DG}$ 。

首先，由畢氏定理可得：

$$\overline{AH}^2+\overline{OH}^2=\overline{AO}^2=\overline{AE}^2+\overline{OE}^2 \text{。}$$

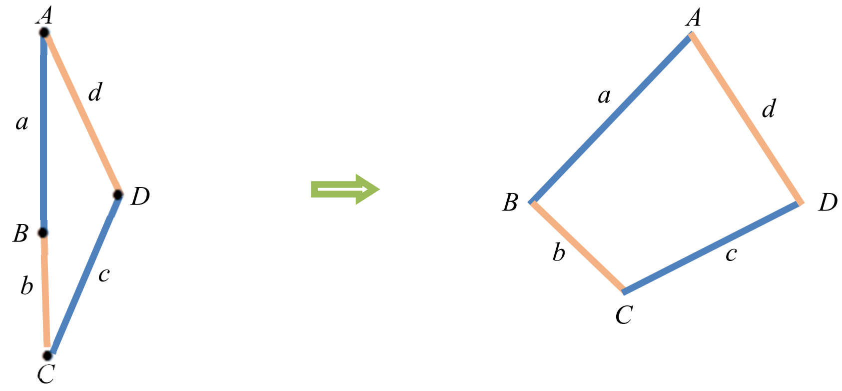
若 $\overline{AH}\neq\overline{AE}$ ，依對稱性可設 $\overline{AH}<\overline{AE}$ ，則有 $\overline{OH}>\overline{OE}=\overline{OG}$ 。再由畢氏定理，得知： $\overline{OG}^2+\overline{DG}^2=\overline{OD}^2=\overline{OH}^2+\overline{DH}^2$ ，於是可得 $\overline{DG}>\overline{DH}$ 。如此，可以推導出以下的矛盾式： $\overline{AD}=\overline{AH}+\overline{DH}<\overline{AE}+\overline{DG}=\overline{AD}$ 。因此， $\overline{AH}=\overline{AE}$ ，同理， $\overline{DH}=\overline{DG}$ 。

由此可知： $\Delta OEA \cong \Delta OHA$ ， $\Delta OHD \cong \Delta OGD$ ；故 $\overline{OE}=\overline{OH}=\overline{OG}=\overline{OF}$ ；亦即點 O 為四邊形 $ABCD$ 的內切圓圓心；因此，四邊形 $ABCD$ 有內切圓。

【定理二】 若四邊形 $ABCD$ 有內切圓，則必存在一等積四邊形。

證：由定理一，當四邊形 $ABCD$ 有內切圓時，兩雙對邊長之和相等，即 $a+c=b+d$ 。

不失一般性，我們可設 $a+b\leq c+d$ ，並將四邊形 $ABCD$ 由 A,C 兩端點拉直使得 $\angle ABC=180°$ (如左下圖)；再固定頂點 B ，並逐步將頂點 D 向右拉開至某一個角度 $\theta=\angle ABC$ ，使得 $\angle ADC=180°-\theta$ (如右下圖)。



其中，$\angle B$ 的角度由左圖的 $180°$ 開始，隨著頂點 D 向右拉動遞減至接近 $0°$ 的過程中，四邊形的兩雙對邊長之和始終保持相等，因此，移動過程中的每一個四邊形都有內切圓(由定理一)。於是，只要拉到某一角度 $\theta = \angle B$ 使 $\angle D = 180° - \theta$，則此時的四邊形也就同時會有外接圓。事實上，由中間值定理，此種角度 θ 是存在的，而且可以計算如下：

四邊形 $ABCD$ 有外接圓的充要條件為 $\angle B + \angle D = 180°$ ，此時，

$$\cos D = -\cos B = -\cos\theta \text{ 。}$$

又由餘弦定理，$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos\theta$，因此，四邊形 $ABCD$ 有外接圓等價於 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\theta$ 。於是，可推得：

$\cos\theta = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$ ，此時，角度 $\theta = \cos^{-1}\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$ 就可以確定了，而對應的四邊形即為四邊形 $ABCD$ 的一個等積四邊形。

參、有外接圓的四邊形之等積四邊形

給定三角形的三個邊長，三角形的形狀就確定(SSS 全等性質)，其面積可以透過著名的海龍公式(Heron formula)來計算。然而，邊長給定的四邊形之形狀不是唯一的，其面積不能只用四邊的長來表示，還需要各頂角的角度。儘管如此，四邊形的面積也有類似的海龍公式，稱為 Bretschneider 公式(蔡聰明，1993；張海潮，2003)，敘述如下：

【定理三】 若四邊形 $ABCD$ 的四邊長為 a,b,c,d ，半周長 $S = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ，則其面積為

$$f(a,b,c,d) = \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}} \text{ 。}$$

更進一步的，$f(a,b,c,d) \le \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$；且等號成立的充要條件為 A,B,C,D 四點共圓，即四邊形 $ABCD$ 有一外接圓。

【推論】 若四邊形 $ABCD$ 的邊長分別為 a,b,c,d ，且有一外接圓及一內切圓，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 $f(a,b,c,d)=\sqrt{abcd}$ 。

證： 當四邊形 $ABCD$ 有一外接圓時，其面積 $f(a,b,c,d)=\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$ 。又當四邊形 $ABCD$ 有內切圓時，兩雙對邊長之和相等，即 $a+c=b+d$ ，此時，$S-a,S-b,S-c,S-d$ 恰為 a,b,c,d 的重排；故

$$f(a,b,c,d)=\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}=\sqrt{abcd}\text{ 。}$$

【定理四】 若四邊形 $ABCD$ 有外接圓，且四邊形的面積 $f(a,b,c,d)=\sqrt{abcd}$ ，其中 a,b,c,d 為四邊的邊長，則必存在一等積四邊形。

證： 依對稱性，可設 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ 。利用面積公式，得知：

$$f(a,b,c,d)=\Delta ABC+\Delta CDA=\frac{1}{2}\cdot ab\sin B+\frac{1}{2}\cdot cd\sin D\text{ 。} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

另由餘弦定理，可得：

$$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D\text{ 。} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

當四邊形 $ABCD$ 有外接圓時，即 A,B,C,D 四點共圓，則 $\angle B+\angle D=180°$ ，於是可得： $\sin D=\sin B$ 且 $\cos D=-\cos B$ 。因此，由(1)及(2)式，分別可得：

$$\sin B=\frac{2f(a,b,c,d)}{ab+cd}=\frac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}\text{ ，}\quad \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\text{ 。}$$

由此可得：

$$1=\sin^2 B+\cos^2 B=\frac{16abcd+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}\text{ ，}$$

即 $16abcd+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4(ab+cd)^2$ ，此式可整理成

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-4(ab-cd)^2=0\text{ 。}$$

因此，

$$\left((a^2+b^2-c^2-d^2)+2(ab-cd)\right)\left((a^2+b^2-c^2-d^2)-2(ab-cd)\right)=0\text{ ，}$$

化簡可得 $\left((a+b)^2-(c+d)^2\right)\left((a-b)^2-(c-d)^2\right)=0$ ，亦即

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)=0\text{ 。}$$

其中 $a+b+c+d>0$ ，故 $a+b=c+d$ 或 $a+c=b+d$ 或 $a+d=b+c$ 。

以上證明了四邊形 $ABCD$ 中必有某兩邊長之和等於另兩邊長之和。於是，將四邊重新排序拼成另一四邊形，使其對邊長之和等於另一對邊長之和；由定理一可知：如此所得到的四邊形就有內切圓，再由定理二得知：它有一個等積四邊形，而此等積四邊形亦為四邊形 $ABCD$ 的一個等積四邊形。

由定理二及定理四的證明過程，我們可以發現四邊形 $ABCD$ 有一等積四邊形的充要條件是「四邊長中某兩邊長之和等於另兩邊長之和」。最後，我們提出一個可繼續探討的問題，留給讀者自行研究：「在定理四中，當四邊形 $ABCD$ 有外接圓時，其面積 $f(a,b,c,d)=\sqrt{abcd}$ 是存在一等積四邊形的充分條件，試問：它是否也是必要的條件呢？」

肆、結語

四邊形不一定有內切圓，也不一定有外接圓；在四邊長固定的條件下，當它有內切圓或外接圓時，我們透過拉移或重新組合的方式，分別證明了等積四邊形的存在。同時，我們也發現其存在性與四邊形的面積產生微妙的關係。當四邊形 $ABCD$ 的四邊長 a,b,c,d 固定，且當中某兩邊長之和等於另兩邊長之和時，即

$$a+b=c+d \text{ 或 } a+c=b+d \text{ 或 } a+d=b+c \text{ ，}$$

則不論哪一種情況都可推得 $S-a,S-b,S-c,S-d$ 四數恰為 a,b,c,d 的重排。因此，四邊形 $ABCD$ 的面積 $f(a,b,c,d)\le\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}=\sqrt{abcd}$。又此式等號成立的充要條件為 A,B,C,D 四點共圓。於是，我們可以推導出以下的三個性質中，任兩個性質成立時，等積四邊形就會存在，同時另一個性質也會成立：

(a) 四邊形 $ABCD$ 的面積 $f(a,b,c,d)=\sqrt{abcd}$ ；

(b) A,B,C,D 四點共圓；

(c) 某兩邊長之和等於另兩邊長之和。

其中，(a)表示四邊形 $ABCD$ 的面積達到最大值 $\sqrt{abcd}$ ，(b)表示四邊形 $ABCD$ 有外接圓，亦即 Ptolemy 定理成立(蔡聰明，2000)，而(c)是四邊形 $ABCD$ 有內切圓的一個必要條件(定理一)；詳細的證明可參考(林英哲，2016)。

參考文獻

蔡聰明 (1993)，四邊形的面積，數學傳播第 17 卷第 3 期，1-12。
蔡聰明 (2000)，星空燦爛的數學(II)−−托勒密定理，數學傳播第24卷第1期，43-55。
蔡聰明 (2002)，數學的發現趣談，三民書局。
張海潮 (2003)，以微積分的方法求四邊形面積公式，數學傳播第 27 卷第 4 期，59-63。
吳　波 (2013)，圓內接四邊形的一個有趣性質，數學傳播第 37 卷第 3 期，68-70。
林英哲 (2016)，105 學年度普通型高中數學能力競賽決賽總報告，教育部主辦，國立高雄師範大學數學系承辦。