勞倫茲力的相對論性之解釋

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

當一帶電粒子相對於觀察者 O' 為靜止時，在觀察者 O' 的眼中，它只會產生靜電場。今另有一觀察者 O 相對於觀察者 O' 作等速度運動，該帶電粒子在觀察者 O 的眼中係作等速度運動，它不僅會產生電場也會產生磁場。這不禁讓人聯想到磁場亦可由電場經相對論性轉換得出。又若在觀察者 O 坐標系中有另一帶電粒子在此磁場中以速度 $\vec{u}$ 運動，則此粒子所受的磁力 $\overrightarrow{F_B}=q\vec{u}\times\vec{B}$，也可看成是電力經相對論性轉換所得出來的。

貳、狹義相對論中力的變換式

如圖 1 所示，若坐標系 S' ($O'x'y'z'$)以速度 $\vec{v}$ 相對於坐標系 S ($O\ x\ y\ z$)沿著 Ox 軸正方向作等速直線運動，三對坐標軸分別平行，且 $t' = t = 0$ 時，原點 O' 與 O 重合。

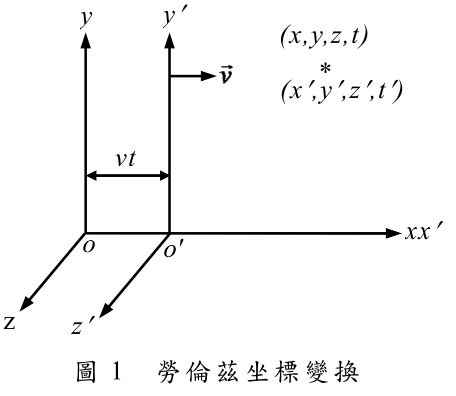

圖 1　勞倫茲坐標變換

設物體 P 在系 S 中的速度為 $\vec{u}$，在系 S' 中的速度為 $\vec{u}'$，則根據光速不變原理和相對性原理可導出坐標系 S 和 S' 間坐標、速度與力的變換式如下(Griffiths, 1999, pp. 516-518)：

$$x' = \gamma(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2} \\ u'_y &= \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - vu_x / c^2} \\ u'_z &= \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - vu_x / c^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= \frac{F_x - \frac{v}{c^2}\vec{F}\bullet\vec{u}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ F'_y &= \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} \\ F'_z &= \frac{F_z}{\gamma(1 - \frac{vu_x}{c^2})} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3)式的逆變換為

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}\vec{F}'\bullet\vec{u}'}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ F_y &= \frac{F'_y}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})} \\ F_z &= \frac{F'_z}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

其中

$\beta = v/c\ ,\ \gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2} = (1-\beta^2)^{-1/2}$ 。

參、在系 S 上兩運動電荷 Q 與 q 之間的作用力

如圖 2 所示，設電荷 Q 固定於系 S' 之坐標原點 O' 處，系 S' 相對於系 S 以速度 $\vec{v}$ 向右運動，在時間 $t=t'=0$ 時，兩坐標系的原點 O' 與 O 重合。另一電荷 q(有如上節中所言之物體 P)在系 S' 中以速度 $\vec{u}'$ 運動，q 在系 S 和系 S' 中的時空坐標分別為 (x,y,z,t) 和 (x',y',z',t')。在系 S' 中 Q 對 q 的電力是

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r'^3}\vec{r}'$$

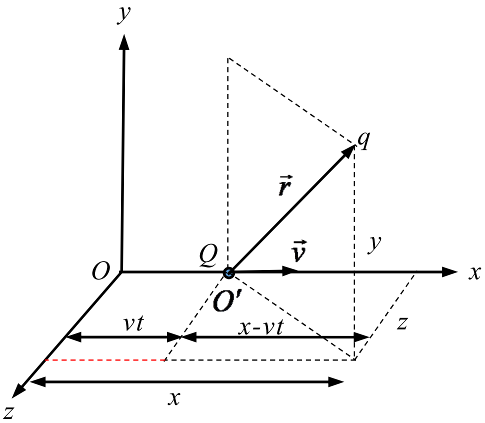

圖 2　系 S 中的運動電荷

其中 $\vec{r}'$ 為在系 S' 裡，電荷 Q(或坐標原點 O')至 q 的位置向量。$\vec{F}'$ 之分量形式則為：

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqx'}{r'^3} \\ F'_y &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqy'}{r'^3} \\ F'_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqz'}{r'^3} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

根據電荷的相對論不變性，並將(5)式代入(4)式得

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left(x' + \frac{\frac{v}{c^2}u'_y y'}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} + \frac{\frac{v}{c^2}u'_z z'}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \right) \\ F_y &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left(\frac{y'}{\gamma(1+\frac{vu'_x}{c^2})} \right) \\ F_z &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left(\frac{z'}{\gamma(1+\frac{vu'_x}{c^2})} \right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由(1)、(2)式知

$$\frac{\frac{v}{c^2}u'_y y'}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{vu'_y y'}{c^2+vu'_x} = \frac{v\left[\frac{u_y}{\gamma(1-\frac{vu_x}{c^2})}\right]y}{c^2+v\left[\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}\right]}$$

$$= \frac{\frac{vu_y y}{\gamma}}{\frac{c^2}{\gamma^2}} = \gamma\frac{v}{c^2}u_y y \tag{7}$$

同理可得

$$\frac{\frac{v}{c^2}u'_z z'}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} = \gamma\frac{v}{c^2}u_z z \tag{8}$$

又

$$\frac{1}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{1+\frac{v}{c^2}\left(\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}\right)} = \gamma^2(1-\frac{vu_x}{c^2}) \tag{9}$$

將(1)、(7)、(8)和(9)式代入(6)式得

$$\left.\begin{aligned}F_x &= \frac{Qq\gamma}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left((x-vt)+\frac{v}{c^2}u_y y+\frac{v}{c^2}u_z z\right)\\ F_y &= \frac{Qq\gamma}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left(y(1-\frac{vu_x}{c^2})\right)\\ F_z &= \frac{Qq\gamma}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\left(z(1-\frac{vu_x}{c^2})\right)\end{aligned}\right\}$$

將上式寫成向量的形式得

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq\gamma}{r'^3}\left[\vec{r}+\frac{1}{c^2}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})\right] \qquad (10)$$

其中

$$\vec{r}=(x-vt)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

代表在系 S 裡，電荷 Q 至 q 的位置向量(如圖 2)。又在系 S' 中，電荷 Q 至 q 之距離 r'：

$$\begin{aligned}r'^2 &= x'^2+y'^2+z'^2=[\gamma(x-vt)]^2+y^2+z^2\\ &=\frac{(x-vt)^2+(1-\beta^2)(y^2+z^2)}{(1-\beta^2)}\\ &=\frac{r^2-\beta^2[r^2-(x-vt)^2]}{(1-\beta^2)}\\ &=r^2\left[1+\frac{\beta^2\frac{(x-vt)^2}{r^2}}{(1-\beta^2)}\right]\\ &=r^2\left[1+\frac{\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2)}\right]\\ &=r^2\left[\frac{1-\beta^2\sin^2\theta}{(1-\beta^2)}\right] \qquad (11)\end{aligned}$$

其中 θ 為 $\vec{r}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角。

將(11)式代入(10)式得

$$\vec{F}=\frac{Qq(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}[\vec{r}+\frac{1}{c^2}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})] \qquad (12)$$

(12)式即表示對系 S 而言，以速度 $\vec{v}$ 運動的電荷 Q 對以速度 $\vec{u}$ 運動的電荷 q 的作用力。

以速度 $\vec{v}$ 運動的電荷 Q 對以速度 $\vec{u}$ 運動的電荷 q 的作用力可分為兩部分或兩類：

一、第一類的作用力是與電荷 q 的速度 $\vec{u}$ 無關的電力，即

$$\vec{F_E}=\frac{Qq(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\vec{r}=q\vec{E}$$

其中電場

$$\vec{E}=\frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\vec{r} \qquad (13)$$

從上式的結果可以看出，運動點電荷的電場不再具有球對稱性，在某一時刻 t，其電場所對應的電力線可描繪成如下圖 3：

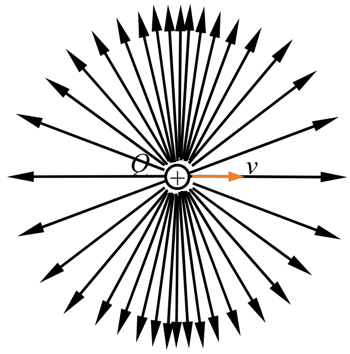

圖 3 運動的點電荷在時刻 t 的電力線圖(在點電荷運動軌跡所在的平面內)

此電場具有以點電荷 Q 之運動軌跡為軸的軸對稱性。電力線在垂直於運動方向附近較密集，而且點電荷的速率愈大，密集情形愈厲害。但根據高斯定律，總電力線數和點電荷靜止時一樣，仍為 $\frac{Q}{\varepsilon_0}$。隨著時間的推移，整個圖形以速度 $\vec{v}$ 向前平移。

在運動電荷的前方或後方($\theta=0^{o}$ 或 $\theta=180^{o}$)的電場強度之量值為

$$E=\frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (14)$$

這比 Q 靜止時要小。

在運動電荷所在的垂直於速度的平面內($\theta=90^{o}$)的電場強度之量值為

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2(1-\beta^2)^{1/2}} \qquad (15)$$

這比 Q 靜止時要大。

當 $v\ll c$ 時，

$$\vec{E}\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad (16)$$

這正是靜止點電荷的電場分布關係式。

二、第二類的作用力是與電荷 q 的速度 $\vec{u}$ 有關的電力，由(12)及(13)式，為

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_B}&=\frac{Qq(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}[\frac{1}{c^2}\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{r})]\\&=q\vec{u}\times\frac{1}{c^2}\left[\vec{v}\times\left(\frac{Q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\vec{r}\right)\right]\\&=q\vec{u}\times\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})\end{aligned} \qquad (17)$$

底下將對 $\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$ 之物理意義加以探討，並可明白為何第二部分之電力可以符號 $\overrightarrow{F_B}$ 表示。

肆、電場和磁場的相對論性變換

設電荷 Q 固定於系 S' 坐標原點 O' 處，系 S' 相對於系 S 以速度 $\vec{v}$ 向右運動，在時間 $t=t'=0$ 時，兩坐標系的原點 O' 與 O 重合，則在距源電荷 Q 為 $\vec{r}'$ 處，兩坐標系間的電場和磁場的相對論變換為 (Griffiths, 1999, pp.525-532；Purcell, 1985, pp.235-241)：

$$\left.\begin{aligned}&E'_x=E_x, E'_y=\gamma(E_y-vB_z), E'_z=\gamma(E_z+vB_y)\\&B'_x=B_x, B'_y=\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z), B'_z=\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

其逆變換為

$$\left.\begin{aligned}&E_x=E'_x, E_y=\gamma(E'_y+vB'_z), E_z=\gamma(E'_z-vB'_y)\\&B_x=B'_x, B_y=\gamma(B'_y-\frac{v}{c^2}E'_z), B_z=\gamma(B'_z+\frac{v}{c^2}E'_y)\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

在系 S' 中，源電荷 Q 靜止，無其它磁場源，因此

$$B'_x=0, B'_y=0, B'_z=0 \text{ 。}$$

代入(19)式，得

$$B_x=0, B_y=-\gamma\frac{v}{c^2}E'_z, B_z=\gamma\frac{v}{c^2}E'_y \text{ 。}$$

又

$$E'_z=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz'}{r'^3}\text{ ；}\ E'_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qy'}{r'^3}$$

所以

$$\vec{B}=B_y\vec{j}+B_z\vec{k}=\frac{\gamma}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}(-vz'\vec{j}+vy'\vec{k}) \qquad (20)$$

且

$$\begin{aligned}\vec{v}\times\vec{r}&=v\vec{i}\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\\&=-vz\vec{j}+vy\vec{k}=-vz'\vec{j}+vy'\vec{k}\end{aligned}$$

故

$$\vec{B}=B_y\vec{j}+B_z\vec{k}=\frac{\gamma}{c^2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}(\vec{v}\times\vec{r}) \qquad (21)$$

將(11)式代入上式，得

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{c^2r^3}\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}(\vec{v}\times\vec{r}) \qquad (22)$$

再將(13)式代入(22)式，可得

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}) \qquad (23)$$

因此 $\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$ 可定義為磁場，而在此遂可將磁場視為由電場經相對論性轉換得出，且 $q\vec{u}\times\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})=q\vec{u}\times\vec{B}$，可定義為磁力，並以 $\overrightarrow{F_B}$ 表示。綜言之，以速度 $\vec{v}$ 運動的源電荷 Q 對以速度 $\vec{u}$ 運動的電荷 q 的作用力，可寫成下列形式

$$\boxed{\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{u}\times\vec{B}} \qquad (24)$$

其中 $q\vec{E}=\overrightarrow{F_E}$ 為電力；$q\vec{u}\times\vec{B}=\overrightarrow{F_B}$ 為磁力，這也是我們所主張磁力可視為電力經相對論性轉換出來的。式(24)所代表的即為大家沿用所稱的勞倫茲力。

伍、關係式 $\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$ 另一種簡單的推導

如圖 2 所示，由(16)式知：當 $v\ll c$ 時，源電荷 Q 在 $\vec{r}$ 處產生的電場為

$$\vec{E}\approx\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

我們知道在靜磁學中，以速度 $\vec{v}$ 運動的點電荷 Q，在距離 Q 點 $\vec{r}$ 處所產生的磁場，根據 Biot-Savart 定律為

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (25)$$

又真空介電係數 ε_0、磁導率 μ_0 和光速 c，有 $\varepsilon_0\mu_0c^2=1$ 的關係存在。因此，我們可以重新改寫(25)式的磁場 $\vec{B}$ 為

$$\vec{B}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\vec{v}\times\frac{Q}{r^3}\vec{r}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{r}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$$

此結果即為(23)式。

陸、結論

本篇論文的主旨是在說明磁力 $\overrightarrow{F_B}=q\vec{u}\times\vec{B}$ 可以看作是電力的相對論性效應。文中分別使用了力的相對論性變換以及電場和磁場的相對論性變換之原理，對在一慣性坐標系中兩運動電荷 Q 與 q 之間的作用力進行了深入的研究。由力的相對論性變換我們得出了以速度 $\vec{v}$ 運動的電荷 Q 對以速度 $\vec{u}$ 運動的電荷 q 的作用力可分為兩部分或兩類：第一類的作用力是與電荷 q 的速度 $\vec{u}$ 無關的電力；第二類的作用力是與電荷 q 的速度 $\vec{u}$ 有關的電力，即 $\overrightarrow{F_B}=q\vec{u}\times\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$。另從電場和磁場的相對論性變換中，電場經轉換後得出磁場 $\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$。因此 $\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})$ 可定義為磁場，從而 $q\vec{u}\times\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})=q\vec{u}\times\vec{B}$，可定義 $q\vec{u}\times\vec{B}$ 為磁力，並以 $\overrightarrow{F_B}$ 表示。

參考文獻

Griffiths, D. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. (3rd ed.) New Jersey: Prentice-Hall,Inc.

Purcell, E.(1985). *Electricity and Magnetism*. (2nd ed.). New York: McGraw-Hill.