圓內接六邊形的面積

李輝濱

壹、前言

三角形與圓內接四邊形的面積公式非常規律對稱，簡潔完美；三角形的面積公式就是著名的 Heron 公式，而圓內接四邊形的面積公式就是印度著名的 Brahmagupta 公式，兩者公式中皆僅含邊長的運算關係。其所以如此，是因三角形為圓內接奇數邊多邊形的最少邊數多邊形，而圓內接四邊形則是圓內接偶數邊多邊形的最少邊數多邊形。作者研究並檢視邊數大於或等於五的圓內接多邊形的面積公式中；發現除了邊長之外，還多出許多項多邊形各頂角的三角函數運算關係項，很明顯地,頂點共圓的特性，並沒有減低圓內接多邊型面積公式的複雜度！

再詳細檢驗這些面積公式時，最值得注意及欣慰的事是；圓內接五邊形與圓內接六邊形的面積公式雖然都不夠簡要，但各邊長與各頂角在公式中出現的相關位置卻很有規律性！作者已計算出圓內接五邊形面積的平方式公式(見本文內引理 5)，可以看得出公式中各邊長與各頂角出現的幾個項數很具規律性；如 $\left(V_2+V_3+V_4+V_5-V_1\right)$，$\left(V_3+V_4+V_5+V_1-V_2\right)$，$\frac{V_3V_4V_5}{2}\left(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5\right)$， $V_1V_2V_3V_4V_5\ [\frac{1}{V_1}\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})+\frac{1}{V_2}\cos^2(\frac{A_4+A_1}{2})+\frac{1}{V_3}\cos^2(\frac{A_5+A_2}{2})+\frac{1}{V_4}\cos^2(\frac{A_1+A_3}{2})+\frac{1}{V_5}\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})]$, ...等等，這規律特性亦不失為各頂點共圓所致的效果。

接下來,圓內接六邊形的面積公式會呈現出怎麼樣的面貌？有我們所期待的對稱規律性嗎?在參酌對照已知的相關完整資料，著手規劃擬定思考的策略方向，從而審慎進行論述推導的圓內接六邊形面積公式會帶給我們怎麼樣的想像與啟發呢? 請看下列本文的敘述發展。

貳、本文

Heron 公式，Brahmagupta 公式及圓內接五邊形的面積公式三者的內涵是按順序一致相容的，意指圓內接五邊形的面積公式必定涵蓋統合 Brahmagupta 及 Heron 公式，即每個後者都是前者的推廣! 我的策略方針是利用分割面積；將六邊形切開成兩個四邊形且此兩四邊形共同擁有一邊長的特徵,再經數學運算找出一個能完全涵蓋統合前三者的圓內接六邊形面積公式，使這四種不同的面積公式內涵完全一致相容。

在以下撰文推理演繹的運算過程中，須應用或對照到下列已知的數個基本數學性質；

一、數學基本性質--引理

引理 1 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}$ $=V_4$，則此凸四邊形的面積型餘弦公式為

$$V_4^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos\left(A_2+A_3\right)$$

因上列公式中各項的量綱都是邊長的平方，故稱為面積型餘弦公式。

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 1.)

引理 2 在平面上給定一個凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，令線段 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}$ $=V_4$，令此凸四邊形面積為 **S(4)**，則此凸四邊形的面積與各邊長及角度關係為

$$\mathbf{2\,S(4)=}\ V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin\left(A_2+A_3\right)$$

證明：略。 (請參閱本文末參考文獻之 1.)

引理 3 在平面上給定一個**圓內接偶數邊多邊形** $A_1A_2A_3A_4....A_{n-1}A_n$，$n$ 為偶數，則此多邊形內角總和為 $A_1+A_2+A_3+A_4+....+A_{n-1}+A_n=\left(n-2\right)\pi$

且 $A_1+A_3+A_5+....+A_{n-3}+A_{n-1}=\dfrac{\left(n-2\right)}{2}\pi=A_2+A_4+A_6+....+A_{n-2}+A_n$

證明：略。

引理 4 在平面上給定一**圓內接四邊形** $A_1A_2A_3A_4$，見下圖(1)，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，則下列方程式 (T−1)式必定恆成立。

線段 $\overline{A_1A_2}=V_1=-V_2\cos A_4+V_3\cos\left(A_3-A_4\right)-V_4\cos A_3$ (T−1)

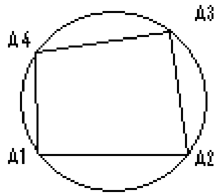


圖 (1)

證明：由圖(1)知 線段 $\overline{A_1A_2}=V_2\cos A_2+V_3\cos\left[A_2-\left(\pi-A_3\right)\right]+V_4\cos A_1$

$$=V_2\cos\left(\pi-A_4\right)+V_3\cos\left[\left(\pi-A_4\right)-\left(\pi-A_3\right)\right]+V_4\cos\left(\pi-A_3\right)$$

$$=-V_2\cos A_4+V_3\cos\left(A_3-A_4\right)-V_4\cos A_3$$

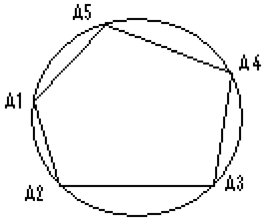
故 線段 $\overline{A_1A_2}=V_1=-V_2\cos A_4+V_3\cos\left(A_3-A_4\right)-V_4\cos A_3$ (T−1)式證明完成。

同理，還可證明出　線段 $\overline{A_2A_3}=V_2=-V_3\cos A_1+V_4\cos\left(A_4-A_1\right)-V_1\cos A_4$　　(T−2)

線段 $\overline{A_3A_4}=V_3=-V_4\cos A_2+V_1\cos\left(A_1-A_2\right)-V_2\cos A_1$　　(T−3)

線段 $\overline{A_4A_1}=V_4=-V_1\cos A_3+V_2\cos\left(A_2-A_3\right)-V_3\cos A_2$　　(T−4)

引理 5　在平面上給定一**圓內接五邊形** $A_1A_2A_3A_4A_5$，見下圖(2)，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_1}=V_5$。



圖(2)

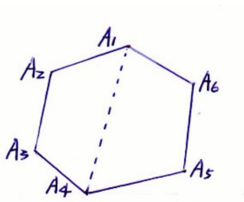
再令此圓內接五邊形的面積為 S_p，則此圓內接五邊形面積的平方 $(S_p)^2$ 與各邊長及各頂角之運算關係為

$$
\begin{aligned}
(S_p)^2=&\frac{1}{16}\left(V_2+V_3+V_4+V_5-V_1\right)\left(V_3+V_4+V_5+V_1-V_2\right)\times\\
&[(V_1+V_2)^2-(V_3-V_4)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_3)^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2]+\\
&\frac{V_3V_4V_5}{2}\left(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5\right)-V_1V_2V_3V_4V_5\,[\frac{1}{V_1}\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})+\frac{1}{V_2}\cos^2(\frac{A_4+A_1}{2})+\\
&\frac{1}{V_3}\cos^2(\frac{A_5+A_2}{2})+\frac{1}{V_4}\cos^2(\frac{A_1+A_3}{2})+\frac{1}{V_5}\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})]
\end{aligned}
$$

證明：略。(請參閱本文末參考文獻之 2.)

二、平面凸六邊形的面積

在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，



圖(3)

$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，並且連接一對角線 $\overline{A_1A_4}$，如圖(3)，將圖形分割成兩個四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $A_1A_4A_5A_6$，這兩圖形共同擁有邊長 $\overline{A_1A_4}$，則由 **引理 1.** 平面凸四邊形的面積型餘弦公式可得

$$V_1^2+V_2^2+V_3^2-2V_1V_2\cos A_2-2V_2V_3\cos A_3+2V_1V_3\cos(A_2+A_3)$$
$$=V_4^2+V_5^2+V_6^2-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_4V_6\cos(A_5+A_6)$$ 移項後，得
$$V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2$$
$$=2V_1V_2\cos A_2+2V_2V_3\cos A_3-2V_1V_3\cos(A_2+A_3)-2V_4V_5\cos A_5-2V_5V_6\cos A_6+2V_4V_6\cos(A_5+A_6)$$
$$\frac{1}{2}(V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2)$$
$$=V_1V_2\cos A_2+V_2V_3\cos A_3-V_1V_3\cos(A_2+A_3)-V_4V_5\cos A_5-V_5V_6\cos A_6+V_4V_6\cos(A_5+A_6) \quad (1)$$

現在，令凸六邊形面積為 **S(6)**，則此 **S(6)**等於兩個四邊形面積之和，由 **引理 2.** 得

$$2\,\mathbf{S(6)}=V_1V_2\sin A_2+V_2V_3\sin A_3-V_1V_3\sin(A_2+A_3)+V_4V_5\sin A_5+V_5V_6\sin A_6-V_4V_6\sin(A_5+A_6) \quad (2)$$

觀察此兩式中的 sin 項及 cos 項的文字係數完全相似，只需利用此特徵即可縮減計算的流程；聯立解 (1)、(2) 兩關係式 ；先將 (1)式 的平方 加上 (2)式的平方，經化簡可得

$$4[S(6)]^2+\frac{1}{4}(V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_4^2-V_5^2-V_6^2)^2=(V_1V_2)^2+(V_2V_3)^2+(V_1V_3)^2+(V_4V_5)^2+(V_5V_6)^2+(V_4V_6)^2+$$
$$2\,[V_1V_2^2V_3\cos(A_2-A_3)-V_1^2V_2V_3\cos A_3-V_1V_2V_4V_5\cos(A_2+A_5)-V_1V_2V_5V_6\cos(A_2+A_6)+$$
$$V_1V_2V_4V_6\cos(A_2+A_6+A_5)-V_1V_2V_3^2\cos A_2-V_2V_3V_4V_5\cos(A_3+A_5)-V_2V_3V_5V_6\cos(A_3+A_6)+$$
$$V_2V_3V_4V_6\cos(A_3+A_5+A_6)+V_1V_3V_4V_5\cos(A_2+A_3+A_5)+V_1V_3V_5V_6\cos(A_2+A_3+A_6)-$$
$$V_1V_3V_4V_6\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)+V_4V_5^2V_6\cos(A_5-A_6)-V_4^2V_5V_6\cos A_6-V_4V_5V_6^2\cos A_5]$$
$$=(V_1V_2+V_2V_3+V_1V_3+V_4V_5+V_5V_6+V_4V_6)^2+2\,\{V_1V_2^2V_3[\cos(A_2-A_3)-1]-V_1^2V_2V_3[\cos A_3+1]-$$
$$V_1V_2V_4V_5[\cos(A_2+A_5)+1]-V_1V_2V_5V_6[\cos(A_2+A_6)+1]+V_1V_2V_4V_6[\cos(A_2+A_6+A_5)-1]-$$
$$V_1V_2V_3^2[\cos A_2+1]-V_2V_3V_4V_5[\cos(A_3+A_5)+1]-V_2V_3V_5V_6[\cos(A_3+A_6)+1]+$$
$$V_2V_3V_4V_6[\cos(A_3+A_5+A_6)-1]+V_1V_3V_4V_5[\cos(A_2+A_3+A_5)-1]+V_1V_3V_5V_6[\cos(A_2+A_3+A_6)-1]-$$
$$V_1V_3V_4V_6[\cos(A_2+A_3+A_5+A_6)+1]+V_4V_5^2V_6[\cos(A_5-A_6)-1]-V_4^2V_5V_6[\cos A_6+1]-$$
$$V_4V_5V_6^2[\cos A_5+1]\}$$
$$=(V_1V_2+V_2V_3+V_1V_3+V_4V_5+V_5V_6+V_4V_6)^2-4\,[V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})+V_1^2V_2V_3\cos^2(\frac{A_3}{2})+$$
$$V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})+V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_2+A_6}{2})+V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_2+A_5+A_6}{2})+$$
$$V_1V_2V_3^2\cos^2(\frac{A_2}{2})+V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})+V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})+$$
$$V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})+V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_2+A_3+A_5}{2})+V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_2+A_3+A_6}{2})+$$
$$V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_2+A_3+A_5+A_6}{2})+V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})+V_4^2V_5V_6\cos^2(\frac{A_6}{2})+V_4V_5V_6^2\cos^2(\frac{A_5}{2})]$$

再移項並整理，得平面凸六邊形面積的平方式

$$[S(6)]^2 = \frac{1}{4}(V_1V_2 + V_2V_3 + V_1V_3 + V_4V_5 + V_5V_6 + V_4V_6)^2 - \frac{1}{16}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2)^2 -$$

$$[V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2 - A_3}{2}) + V_1^2V_2V_3\cos^2(\frac{A_3}{2}) + V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2 + A_5}{2}) + V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_2 + A_6}{2}) +$$

$$V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_2 + A_5 + A_6}{2}) + V_1V_2V_3^2\cos^2(\frac{A_2}{2}) + V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3 + A_5}{2}) +$$

$$V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3 + A_6}{2}) + V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_3 + A_5 + A_6}{2}) + V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_2 + A_3 + A_5}{2}) +$$

$$V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_2 + A_3 + A_6}{2}) + V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_2 + A_3 + A_5 + A_6}{2}) +$$

$$V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5 - A_6}{2}) + V_4^2V_5V_6\cos^2(\frac{A_6}{2}) + V_4V_5V_6^2\cos^2(\frac{A_5}{2})]$$

$$= \frac{1}{16}[\ (2V_1V_2 + 2V_2V_3 + 2V_1V_3 + 2V_4V_5 + 2V_5V_6 + 2V_4V_6)^2 - (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2)^2] -$$

$$[V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2 - A_3}{2}) + V_1^2V_2V_3\cos^2(\frac{A_3}{2}) + V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2 + A_5}{2}) + V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_2 + A_6}{2}) +$$

$$V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_2 + A_5 + A_6}{2}) + V_1V_2V_3^2\cos^2(\frac{A_2}{2}) + V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3 + A_5}{2}) +$$

$$V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3 + A_6}{2}) + V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_3 + A_5 + A_6}{2}) + V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_2 + A_3 + A_5}{2}) +$$

$$V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_2 + A_3 + A_6}{2}) + V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_2 + A_3 + A_5 + A_6}{2}) +$$

$$V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5 - A_6}{2}) + V_4^2V_5V_6\cos^2(\frac{A_6}{2}) + V_4V_5V_6^2\cos^2(\frac{A_5}{2})] \tag{3}$$

現在將(3)式裡第一個中括弧[ ]內的所有項作因式分解，再經移項,組合及化簡，計算過程如下;

$$\begin{aligned}
&(2V_1V_2 + 2V_2V_3 + 2V_1V_3 + 2V_4V_5 + 2V_5V_6 + 2V_4V_6)^2 - (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2)^2 \\
&= (2V_1V_2 + 2V_2V_3 + 2V_1V_3 + 2V_4V_5 + 2V_5V_6 + 2V_4V_6 + V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 - V_4^2 - V_5^2 - V_6^2) \times \\
&\quad (2V_1V_2 + 2V_2V_3 + 2V_1V_3 + 2V_4V_5 + 2V_5V_6 + 2V_4V_6 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2) \\
&= [(V_1 + V_2 + V_3)^2 - (V_4^2 - 2V_4V_5 + V_5^2) - (V_5^2 - 2V_5V_6 + V_6^2) - (V_6^2 - 2V_6V_4 + V_4^2) + V_4^2 + V_5^2 + V_6^2] \times \\
&\quad [(V_4 + V_5 + V_6)^2 - (V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2) - (V_2^2 - 2V_2V_3 + V_3^2) - (V_3^2 - 2V_3V_1 + V_1^2) + V_1^2 + V_2^2 + V_3^2]
\end{aligned}$$

$$= [(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times$$
$$[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2] \tag{4}$$

將此(4)式 代回入 (3)式裡第一個中括弧[ ]內，最後整理得

$$\begin{aligned}[S(6)]^2 = \frac{1}{16}\,& [(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times \\ & [(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2]- \\ & V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_2+A_3+A_5+A_6}{2})-V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_2+A_5+A_6}{2})-V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})- \\ & V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_2+A_3+A_5}{2})-V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_2+A_3+A_6}{2})-V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})- \\ & V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_2+A_6}{2})-V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})-V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})-V_1V_2V_3^2\cos^2\frac{A_2}{2}- \\ & V_1^2V_2V_3\cos^2\frac{A_3}{2}-V_4V_5V_6^2\cos^2\frac{A_5}{2}-V_4^2V_5V_6\cos^2\frac{A_6}{2}-V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})-V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})\end{aligned} \tag{5}$$

這方程式(5)就是一般平面凸六邊形面積的平方式公式。因為這公式的內文項數很多很長，故採用列出面積的平方式公式敘述要比原本面積公式的平方根表示更適當明確！於是得下列定理；

定理 1 在平面上給定一個凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，如上圖(3)，則此一般平面凸六邊形面積的平方式公式與其各邊長及各頂角的運算關係為上述方程式(5)。

詳細檢視方程式(5)，發現此定理 1.的美妙之處在於它涵蓋下列三個特例；

特例 1. 若令 $\overline{A_1A_2}=V_1=0$ 且 $\overline{A_6A_2}=V_6$，則平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式將退化成平面凸五邊形 $A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式，令平面凸五邊形 $A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積為 **S(5)**，則

$$\begin{aligned}[S(5)]^2 = \frac{1}{16}\,& (V_3+V_4+V_5+V_6-V_2)\times(V_4+V_5+V_6+V_2-V_3)\times \\ & [(V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2] \\ & -V_2V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})-V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})-V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2}) \\ & -V_4V_5V_6^2\cos^2\frac{A_5}{2}-V_4^2V_5V_6\cos^2\frac{A_6}{2}-V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})\end{aligned} \tag{6}$$

上述 (6)式 是經 (5)式轉換而來，請對照本文末參考文獻之 1。

特例 2. 若令 $\overline{A_1A_2}=V_1=0$ 且 $\overline{A_6A_1}=V_6=0$，$\overline{A_5A_2}=V_5$，則平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式將退化成平面凸四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積的平方式公式，令此平面凸四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積為 **S(4)**，這類一般平面凸四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積就是德國數學家 Bretschneider 在 1842 年所計算發表出當年著名的平面凸四邊形面積的平方式公式，則

$$\left[S(4)\right]^2=\frac{1}{16}\left[(V_2+V_3+V_4-V_5)\,(V_3+V_4+V_5-V_2)\,(V_4+V_5+V_2-V_3)\,(V_5+V_2+V_3-V_4)\right]-V_2V_3V_4V_5\cos^2\left(\frac{A_3+A_5}{2}\right) \tag{7}$$

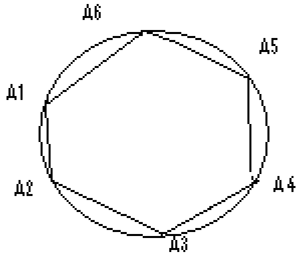
特例 3. 若令 $\overline{A_1A_2}=V_1=0$ 且 $\overline{A_6A_1}=V_6=0$，$\overline{A_5A_6}=V_5=0$，$\overline{A_4A_2}=V_4$，則平面凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式將退化成平面三角形 $A_2A_3A_4$ 面積的平方式公式，令此三角形面積為 **S(3)**，則

$$\left[S(3)\right]^2=\frac{1}{16}\left[(V_2+V_3+V_4)\,(V_3+V_4-V_2)\,(V_4+V_2-V_3)\,(V_2+V_3-V_4)\right] \tag{8}$$

此公式 (8) 即為希臘著名的三角形 Heron 面積平方式公式。

三、圓內接六邊形的面積

定理 2 在平面上給定一個圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_5}=V_4$，$\overline{A_5A_6}=V_5$，$\overline{A_6A_1}=V_6$，如下圖(4)，



圖(4)

令此圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積為 S_H，則其面積的平方式公式為

$$[S_H]^2=\frac{1}{16}\left[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2\right]\times$$
$$\left[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}(V_4V_5V_6-V_1V_2V_3)\cdot(V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)-$$
$$V_1V_2V_3V_4V_5V_6\cdot\left\{\left[\frac{1}{V_2V_5}\cos^2\left(\frac{A_1+A_4}{2}\right)+\frac{1}{V_3V_6}\cos^2\left(\frac{A_2+A_5}{2}\right)+\frac{1}{V_4V_1}\cos^2\left(\frac{A_3+A_6}{2}\right)\right]+\right.$$

$$[\frac{1}{V_6V_2}\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})+\frac{1}{V_1V_3}\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})+\frac{1}{V_2V_4}\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})+\frac{1}{V_3V_5}\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})+$$

$$\frac{1}{V_4V_6}\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})+\frac{1}{V_5V_1}\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})]+[\frac{1}{V_6V_1}\cos^2(\frac{A_1}{2})+\frac{1}{V_1V_2}\cos^2(\frac{A_2}{2})+$$

$$\frac{1}{V_2V_3}\cos^2(\frac{A_3}{2})+\frac{1}{V_3V_4}\cos^2(\frac{A_4}{2})+\frac{1}{V_4V_5}\cos^2(\frac{A_5}{2})+\frac{1}{V_5V_6}\cos^2(\frac{A_6}{2})]\} \quad (9)$$

證明：

(1). 因為是圓內接六邊形，所以利用 引理 3.性質將方程式(5)中 7 個 cos 與 sin 項作角度的變換，再化簡，按序整理排列，得下列方程式 (10)：

$$[S_H]^2 = \frac{1}{16}[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times$$

$$[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2]$$

$$-V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_1+A_4}{2})-V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})-V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})$$

$$-V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})-V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})-V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})$$

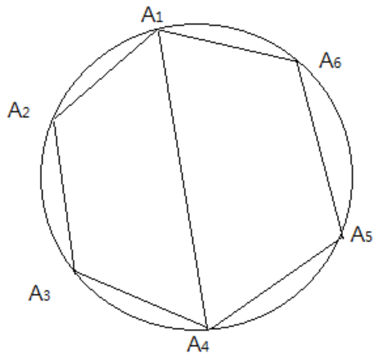
$$-V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})-V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})-V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})$$

$$-V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_1}{2})-V_1V_2V_3^2\cos^2(\frac{A_2}{2})-V_1^2V_2V_3\cos^2(\frac{A_3}{2})-V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_4}{2})$$

$$-V_4V_5V_6^2\cos^2(\frac{A_5}{2})-V_4^2V_5V_6\cos^2(\frac{A_6}{2}) \quad (10)$$

(2). 觀察檢視方程式 (10)，在所有 cos 與 sin 項中看到 6 個項的係數有出現邊長的平方，這與其他項係數不同，造成係數出現不規律性，需要變換這 6 個項的係數讓每一項邊長都是一次方。因對照之下，再回頭審閱圓內接五邊形的面積平方式公式，公式裡顯示出所有 cos 項的係數都僅出現邊長一次方，符合係數出現的規律性，請參考本文末參考文獻之 2.及引理 5. 。故要找到適當解決方法將上述出現邊長平方之 6 個項的係數轉換成邊長都是一次方，使方程式 (10)中各項係數都能完全趨於一致性，不致有差異。

現在連接一對角線 $\overline{A_1A_4}$ ，如下圖(5)，



圖(5)

並定焦看圖(5)中的圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 及圓內接四邊形 $A_4A_5A_6A_1$，由引理 4. 知線段 $\overline{A_4A_1}=-V_1\cos A_3+V_2\cos\left(A_2-A_3\right)-V_3\cos A_2$　　(T−4) 必成立。且

線段 $\overline{A_4A_1}=-V_1\cos A_3+V_2\cos\left(A_2-A_3\right)-V_3\cos A_2=-V_4\cos A_6+V_5\cos\left(A_5-A_6\right)-V_6\cos A_5$

在方程式(10)中，令

$$F=-V_1V_2^2V_3\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})-V_1V_2V_3^2\cos^2(\frac{A_2}{2})-V_1^2V_2V_3\cos^2(\frac{A_3}{2})$$

$$=-V_1V_2V_3\cdot[V_2\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})+V_3\cos^2(\frac{A_2}{2})+V_1\cos^2(\frac{A_3}{2})]$$

$$=-V_1V_2V_3\cdot[V_2\cdot\frac{1-\cos(A_2-A_3)}{2}+V_3\cdot\frac{1+\cos A_2}{2}+V_1\cdot\frac{1+\cos A_3}{2}]$$

$$=-\frac{V_1V_2V_3}{2}(V_1+V_2+V_3)+\frac{V_1V_2V_3}{2}[-V_1\cos A_3+V_2\cos\left(A_2-A_3\right)-V_3\cos A_2]$$

$$=-\frac{V_1V_2V_3}{2}(V_1+V_2+V_3)+\frac{V_1V_2V_3}{2}[-V_4\cos A_6+V_5\cos\left(A_5-A_6\right)-V_6\cos A_5]$$

$$=-\frac{V_1V_2V_3}{2}(V_1+V_2+V_3)+$$

$$\frac{V_1V_2V_3}{2}\{-V_4\cdot[2\cos^2(\frac{A_6}{2})-1]+V_5\cdot[1-2\sin^2\left(\frac{A_5-A_6}{2}\right)]-V_6\cdot[2\cos^2(\frac{A_5}{2})-1]\}$$

$$=-\frac{V_1V_2V_3}{2}(V_1+V_2+V_3)+$$

$$\frac{V_1V_2V_3}{2}[-V_4\cdot 2\cos^2(\frac{A_6}{2})+V_4+V_5-V_5\cdot 2\sin^2\left(\frac{A_5-A_6}{2}\right)-V_6\cdot 2\cos^2(\frac{A_5}{2})+V_6]$$

$$=\frac{V_1V_2V_3}{2}(V_4+V_5+V_6-V_1-V_2-V_3)-V_1V_2V_3V_6\cos^2(\frac{A_5}{2})-V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_6}{2})$$

$$-V_1V_2V_3V_5\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2}) \tag{11}$$

同理，再選取 $G=-V_4V_5^2V_6\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})-V_4V_5V_6^2\cos^2(\frac{A_5}{2})-V_4^2V_5V_6\cos^2(\frac{A_6}{2})$

參考圖(5)，並仿效前述獲得 (11)式的方法，可得

$$G=\frac{V_4V_5V_6}{2}(V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)-V_3V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_2}{2})-V_1V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_3}{2})$$

$$-V_2V_4V_5V_6\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2}) \tag{12}$$

(11)式與(12)式已成功地將邊長平方項轉換成邊長的一次方。

(3). 現在將(11)式與(12)式同時一併代入 (10)式中，移項，化簡，再整理，即得

$$[S_H]^2=\frac{1}{16}[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times$$
$$[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2]$$
$$+\frac{1}{2}(V_4V_5V_6-V_1V_2V_3)(V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)-V_1V_3V_4V_6\cos^2(\frac{A_1+A_4}{2})$$
$$-V_1V_2V_4V_5\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})-V_2V_3V_5V_6\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})-V_1V_3V_4V_5\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})$$
$$-V_2V_4V_5V_6\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})-V_1V_3V_5V_6\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})-V_1V_2V_4V_6\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})$$
$$-V_1V_2V_3V_5\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})-V_2V_3V_4V_6\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})-V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_1}{2})$$
$$-V_3V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_2}{2})-V_1V_4V_5V_6\cos^2(\frac{A_3}{2})-V_1V_2V_5V_6\cos^2(\frac{A_4}{2})$$
$$-V_1V_2V_3V_6\cos^2(\frac{A_5}{2})-V_1V_2V_3V_4\cos^2(\frac{A_6}{2}) \tag{13}$$

再將(13)式內所有 cos 與 sin 項的係數共同提出 $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$，再整理，最後得

$$[S_H]^2=\frac{1}{16}[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times$$
$$[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2]$$

$$+\frac{1}{2}(V_4V_5V_6-V_1V_2V_3)\ (V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)\ -$$

$$V_1V_2V_3V_4V_5V_6\cdot\{[\frac{1}{V_2V_5}\cos^2(\frac{A_1+A_4}{2})+\frac{1}{V_3V_6}\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})+\frac{1}{V_4V_1}\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})]+$$

$$[\frac{1}{V_6V_2}\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})+\frac{1}{V_1V_3}\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})+\frac{1}{V_2V_4}\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})+\frac{1}{V_3V_5}\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})+$$

$$\frac{1}{V_4V_6}\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})+\frac{1}{V_5V_1}\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})]+[\frac{1}{V_6V_1}\cos^2(\frac{A_1}{2})+\frac{1}{V_1V_2}\cos^2(\frac{A_2}{2})+$$

$$\frac{1}{V_2V_3}\cos^2(\frac{A_3}{2})+\frac{1}{V_3V_4}\cos^2(\frac{A_4}{2})+\frac{1}{V_4V_5}\cos^2(\frac{A_5}{2})+\frac{1}{V_5V_6}\cos^2(\frac{A_6}{2})]\} \tag{9}$$

以上定理 2. 證明完成，方程式(9)即為圓內接六邊形面積平方式公式。從方程式(9)可察驗出大括弧{ }內有 3 組中括弧[ ]，而每一組中括弧[ ]內之邊長與角度都在各項的位置內出現規律性分佈，與前言中想像的期望與推測不謀而合。

審視方程式 (9)，又察覺此定理 2.的美妙之處在於它涵蓋下列三個特例；

特例 1. 在方程式 (9)中包含所有 cos 與 sin 的項數共有 15 項，找到這些項中係數沒有出現 V_1 的，只有 5 個，將其中 4 個作角度變換；

(a) 將 $\sin^2(\frac{A_2-A_3}{2})$ 轉換成 $\sin^2(\frac{A_1+A_2+A_5}{2})=\sin^2(\frac{A_3+A_4+A_6}{2})$

(b) 將 $\sin^2(\frac{A_6-A_1}{2})$ 轉換成 $\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})$

(c) 將 $\cos^2(\frac{A_1}{2})$ 轉換成 $\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})$

(d) 將 $\cos^2(\frac{A_2}{2})$ 轉換成 $\cos^2(\frac{A_4+A_6}{2})$ ，

現在再將這 4 個變換項代入方程式 (9)中，形成

$$[S_H]^2=\frac{1}{16}[(V_1+V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^2+V_5^2+V_6^2]\times$$

$$[(V_4+V_5+V_6)^2-(V_1-V_2)^2-(V_2-V_3)^2-(V_3-V_1)^2+V_1^2+V_2^2+V_3^2]+$$

$$\frac{1}{2}(V_4V_5V_6-V_1V_2V_3)\ (V_1+V_2+V_3-V_4-V_5-V_6)\ -$$

$$V_1V_2V_3V_4V_5V_6\cdot\{[\frac{1}{V_2V_5}\cos^2(\frac{A_1+A_4}{2})+\frac{1}{V_3V_6}\cos^2(\frac{A_2+A_5}{2})+\frac{1}{V_4V_1}\cos^2(\frac{A_3+A_6}{2})]+$$

$$[\frac{1}{V_6V_2}\sin^2(\frac{A_1-A_2}{2})+\frac{1}{V_1V_3}\sin^2(\frac{A_3+A_4+A_6}{2})+\frac{1}{V_2V_4}\sin^2(\frac{A_3-A_4}{2})+$$

$$\frac{1}{V_3V_5}\sin^2(\frac{A_4-A_5}{2})+\frac{1}{V_4V_6}\sin^2(\frac{A_5-A_6}{2})+\frac{1}{V_5V_1}\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})]+$$

$$[\frac{1}{V_6V_1}\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})+\frac{1}{V_1V_2}\cos^2(\frac{A_4+A_6}{2})+\frac{1}{V_2V_3}\cos^2(\frac{A_3}{2})+\frac{1}{V_3V_4}\cos^2(\frac{A_4}{2})+$$

$$\frac{1}{V_4V_5}\cos^2(\frac{A_5}{2})+\frac{1}{V_5V_6}\cos^2(\frac{A_6}{2})]\} \tag{14}$$

然後對此方程式 (14) 令 $V_1=0$，$A_1=0$ 且 $\overline{A_6A_2}=V_6$，則圓內接六邊形面積平方式公式退化成圓內接五邊形 $A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積平方式公式，整理即得

$$(S_p)^2=\frac{1}{16}\left(V_3+V_4+V_5+V_6-V_2\right)\left(V_4+V_5+V_6+V_2-V_3\right)\times$$

$$[(V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^{\,2}+V_5^{\,2}+V_6^{\,2}]+$$

$$\frac{V_4V_5V_6}{2}\left(V_2+V_3-V_4-V_5-V_6\right)-V_2V_3V_4V_5V_6\,[\frac{1}{V_2}\cos^2(\frac{A_4+A_6}{2})+\frac{1}{V_3}\sin^2(\frac{A_3+A_4+A_6}{2})+$$

$$\frac{1}{V_4}\cos^2(\frac{A_6+A_3}{2})+\frac{1}{V_5}\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})+\frac{1}{V_6}\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})] \tag{15}$$

方程式(15)式中有兩項是 sin 的項數需要將它們變換成 cos 的項，再利用五邊形內角和等於 3π 的性質，將 $\sin^2(\frac{A_3+A_4+A_6}{2})$ 轉化成 $\cos^2(\frac{A_5+A_2}{2})$，又將 $\sin^2(\frac{A_3+A_5+A_6}{2})$ 轉化成 $\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})$，一起代入 (15)式而得到下列 (16)式圓內接五邊形面積平方式公式，

$$(S_p)^2=\frac{1}{16}\left(V_3+V_4+V_5+V_6-V_2\right)\left(V_4+V_5+V_6+V_2-V_3\right)\times$$

$$[(V_2+V_3)^2-(V_4-V_5)^2-(V_5-V_6)^2-(V_6-V_4)^2+V_4^{\,2}+V_5^{\,2}+V_6^{\,2}]+$$

$$\frac{V_4V_5V_6}{2}\left(V_2+V_3-V_4-V_5-V_6\right)-V_2V_3V_4V_5V_6\,[\frac{1}{V_2}\cos^2(\frac{A_4+A_6}{2})+\frac{1}{V_3}\cos^2(\frac{A_5+A_2}{2})+$$

$$\frac{1}{V_4}\cos^2(\frac{A_6+A_3}{2})+\frac{1}{V_5}\cos^2(\frac{A_2+A_4}{2})+\frac{1}{V_6}\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})] \tag{16}$$

請將此方程式(16)式與 **引理 5**.相互對照，兩者完全一致!

特例 2. 在方程式 (9)中包含所有 cos 與 sin 的項數共有 15 項，找到這些項中係數沒有出現 V_1 或 V_6 的，只有 1 個為 $\cos^2(\frac{A_1}{2})$，將其轉換成 $\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})$，代入(9)式中，再令 $\overline{A_1A_2}=V_1=0$ 且 $\overline{A_6A_1}=V_6=0$，$\overline{A_5A_2}=V_5$，則圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式將退化成圓內接四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積的平方式公式，令此未化簡的圓內接四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積為 S_4，則

$$[S_4]^2=\frac{1}{16}[(V_2+V_3+V_4-V_5)(V_3+V_4+V_5-V_2)(V_4+V_5+V_2-V_3)(V_5+V_2+V_3-V_4)]$$

$$-V_2V_3V_4V_5\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2}) \tag{17}$$

而因 $A_3+A_5=\pi$，使得 $\cos^2(\frac{A_3+A_5}{2})=0$，令化簡後圓內接四邊形 $A_2A_3A_4A_5$ 面積為 S_B，則(17)式變換成下列 (18)式；

$$[S_B]^2=\frac{1}{16}[(V_2+V_3+V_4-V_5)(V_3+V_4+V_5-V_2)(V_4+V_5+V_2-V_3)(V_5+V_2+V_3-V_4)] \tag{18}$$

方程式 (18)式即為印度著名 Brahmagupta 面積的平方式公式。

特例 3. 若再令 $\overline{A_1A_2}=V_1=0$ 且 $\overline{A_6A_1}=V_6=0$，$\overline{A_5A_6}=V_5=0$，$\overline{A_4A_2}=V_4$，則圓內接六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 面積的平方式公式將退化成平面三角形 $A_2A_3A_4$ 面積的平方式公式，令此三角形面積為 **S(3)**，則

$$[S(3)]^2=\frac{1}{16}[(V_2+V_3+V_4)(V_3+V_4-V_2)(V_4+V_2-V_3)(V_2+V_3-V_4)] \tag{8}$$

此公式 (8) 即為希臘著名的三角形 Heron 面積平方式公式。

至此，平面凸六邊形面積的平方式公式(5)與圓內接六邊形面積平方式公式 (9)都完全涵蓋統合五邊形與四邊形及三角形等各個面積的平方。

參、結論

本文最主要概念是提供一套適當，精準,快速的方法來論證出一般平面凸多邊形面積平方式公式。由內文敘述可知自三角形,四邊形,五邊形到六邊形等都能看到公式內容的複雜度愈來愈增高,但亦同時見到期望的規律性公式特質依循著由小而大順序呈現出推廣樣貌。

計算六邊形面積公式時，作者嘗試不同的分割法；將平面凸六邊形分割成：(一) 一個三角形與一個凸五邊形、(二) 兩個凸四邊形、(三) 完全不分割 等三種情形，在演算過程

中發現三種分割法所得到的公式完全不同。比較這三者公式的結構內容；只見分割成兩個凸四邊形所得的公式內涵最簡要，規律，而計算過程也最快速。相對地選取另兩種方法所得的公式則更加複雜！而特別的是，當此兩種不同公式也要化成圓內接六邊形面積平方式公式時，更是要費盡苦心，傾注全力，始能化成具有完全相同規律對稱性的內涵。故最佳要領就是：(甲)要將偶數邊多邊形分割成兩個相等邊數的小多邊形；(乙)要將奇數邊多邊形分割成兩個邊數僅相差一個邊的小多邊形；如分割五邊形時，將其分割成三角形 $A_1A_2A_3$ 與凸四邊形 $A_1A_3A_4A_5$ 。

研究論證圓內接六邊形面積平方式公式時，如何能知悉要演繹到方程式(9)的規律對稱性特質？當然就是因為在推證運算時，一直都是以圓內接五邊形面積平方式公式內容為標竿來作為演算推廣的依據。而遵循此同樣思考模式時，已不難想像圓內接七邊形面積平方式公式的內涵了！

參考文獻

李輝濱(2012)，平面凸五邊形面積的研究，數學傳播季刊 36 卷 1 期(141 期)2012 年 3 月。
李輝濱(2012)，圓內接五邊形面積的研究，數學傳播季刊 36 卷 4 期(144 期)2012 年 12 月。
蔡聰明，數學拾貝−星空燦爛的數學，三民書局。
黃武雄(1980)，中西數學簡史，人間文化事業公司。
世部貞市郎(1988)，幾何學辭典，九章出版社。
林聰源(1995)，數學史−古典篇，凡異出版社。
項武義，基礎幾何學，五南圖書出版公司。
項武義，基礎分析學，五南圖書出版公司。
E.W. Hobson(1957), A treatise on plane and Advanced trigonometry, Dover.
Z.A. Melzek(1983), Invitation to geometry, John Wiley and Sons.