中學生通訊解題第九十二期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9201

把 1,2,3,4,5,6,7,8,9 九個數字分成三組三位數（分別為 K,L,M)，分別填入下列九個空格中，並使等式成立（即 $K+L=M$)。

□□□＋□□□＝□□□

例如　$125+739=864$

試求三位數 M 的最小值和最大值？並寫出符合上述條件的等式？

簡答：最小值為 459 、最大值為 981

參考解答：

(1) 新北市光復國中王同學的解法如下：

考慮 K 、 L 二者的數字和 A 與 M 的數字和 B 之間的關係如下：

若 $K+L=M$ 沒有進位，則 $A=B$ 。

但 $A+B=45$ ，可推得 $A=B=22.5$ (不合，因為數字和為整數值)。

故 $K+L=M$ 有進位，此時有以下幾種情形：

其中有一位進位：

$A=B+9 \Rightarrow A=27, B=18$ 。

其中有二位進位：

$A=B+18 \Rightarrow A=31.5, B=13.5$ (不合)。

其中有三位進位：

此時 M 有千位數(與已知不合)。

因為 $B=18$ ，所以 M 的最大值為 981。

令 $K=327$，$L=654$，

則 $K+L=327+654=981$ 符合最大值。

若因為 $K+L \geq 135+246=381$，

故 M 的百位數 ≥ 3。

但因為 M 的百位數為 3 時，

則 $K+L \geq 146+257=403$ (不合)

所以 M 的百位數大於等於 4。

M 的百位數等於 4 時，因為 $B=18$，

故 M 的最小值為 459。

令 $K=173$，$L=286$

則 $K+L=173+286=459$ 符合最小值。

(2) 臺北市螢橋國中汪同學的解法如下：

<u>A.最小值</u>

以十進位制令三位數 $K=\overline{abc}, L=\overline{def}$，$M=\overline{ghi}$，則 g 最小可能值為 1+2 = 3。

1. 若 g=3，令 $a=1,d=2 \Rightarrow \overline{1bc}+\overline{2ef}=\overline{3hi}$。

(1) 若 $b+e \geq 10$ ，則 $g \neq 3$ (不合)；

(2) 若 $b+e<10$，則 $c+f$ 必大於 10

$\Rightarrow g \neq 3$ (不合)。

因此 g 不為 3。

2. 若 $g=4$，令 $a=1$, $d=2$

($\because$ 必有進位，使得 $g=4$)

$\Rightarrow \overline{1bc}+\overline{2ef}=\overline{3hi}+100$

$\Rightarrow 100+200+\overline{bc}+\overline{ef}=300+\overline{hi}+100$

$\Rightarrow \overline{bc}+\overline{ef}=\overline{1hi}$

(1) $b+e<10$　$\therefore b+e=8$

但 $\overline{bc}+\overline{ef} \neq \overline{1hi}$ 故不合。

(2) $b+e=10$，$c+f>10$， $h=1$，故不合。

(3) $b+e>10$ 且 $c+f<10$，故 $c+f=8$ 或 $c+f=9$。

[1] $c+f=8 \Rightarrow b+e=7+9=16$

$\Rightarrow \overline{ghi}=468$。

[2] $c+f=9 \Rightarrow i=9$

$\Rightarrow b+e=8+7=15$

$\Rightarrow \overline{ghi}=459$。

(4) $b+e>10$ 且 $c+f>10 \Rightarrow$ 不合。

$\because 468>459$ $\therefore$ 最小值=459。

<u>B.最大值</u>

若 $M=987,986,\cdots,982$(皆不合)。

若 $M=981$, $K+L=235+746$，

故 M=981 為最大值。

<u>由 A,B 即可得</u>

M 最小值為 459，此時 183+276=459；

M 最大值為 981，此時 235+746=981。

【解答評析】

本題屬於難度較高的組合計算問題，如果能充分運用到數字運算及進位相關性質，可以適度簡化計算過程。此次共有 7 位同學參與此題徵答，多數學生均能將解答順利求出，特別是能提出許多不同的創意解法值得肯定。但是相對也有部分同學在計算過程仍顯繁雜，有待精進。

問題編號
9202

實數 a,b,c 滿足 $a\neq 0$，$(b-1)^2-4ac=0$，試證明：2012 個變數 $x_1,x_2,\cdots,x_{2012}$ 的

聯立方程組 $\begin{cases} ax_1^{\ 2}+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^{\ 2}+bx_2+c=x_3 \\ \cdots\cdots \\ ax_{2011}^{\ \ 2}+bx_{2011}+c=x_{2012} \\ ax_{2012}^{\ \ 2}+bx_{2012}+c=x_1 \end{cases}$

有唯一解。

參考解答：

$$\begin{cases} ax_1^{\ 2}+bx_1+c=x_2 \\ ax_2^{\ 2}+bx_2+c=x_3 \\ \cdots\cdots \\ ax_{2011}^{\ \ 2}+bx_{2011}+c=x_{2012} \\ ax_{2012}^{\ \ 2}+bx_{2012}+c=x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax_1^{\ 2}+(b-1)x_1+c=x_2-x_1 \\ ax_2^{\ 2}+(b-1)x_2+c=x_3-x_2 \\ \cdots\cdots \\ ax_{2011}^{\ \ 2}+(b-1)x_{2011}+c=x_{2012}-x_{2011} \\ ax_{2012}^{\ \ 2}+(b-1)x_{2012}+c=x_1-x_{2012} \end{cases}$$

又 $(b-1)^2-4ac=0$，則

$$\begin{cases} a(x_1-\alpha)^2=x_2-x_1 \\ a(x_2-\alpha)^2=x_3-x_2 \\ \cdots\cdots \\ a(x_{2011}-\alpha)^2=x_{2012}-x_{2011} \\ a(x_{2012}-\alpha)^2=x_1-x_{2012} \end{cases}$$

其中 $\alpha=-\dfrac{b-1}{2a}$，把所有式子相加，則

$a[(x_1-\alpha)^2+(x_2-\alpha)^2+\cdots+(x_{2012}-\alpha)^2]=0$，

則 $x_1=x_2=\cdots=x_{2012}=\alpha=-\dfrac{b-1}{2a}$ 為唯一的一組解。

【解答評析】

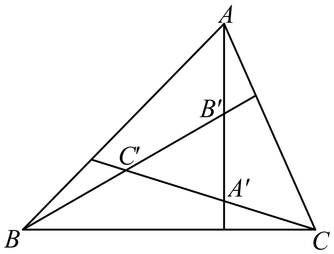
本題的出題的重點是，二次函數的判別式為 0 可以知道此二次函數可化為領導係數乘上完全平方式，再利用數個完全平方數

的和為 0，可知每個項都為 0。參與的同學大都誤用了二次方程式根的公式，且對於有關含未知數的代數之操作似乎有點生疏，建議國中數學教育可加強這一塊。

問題編號
9203

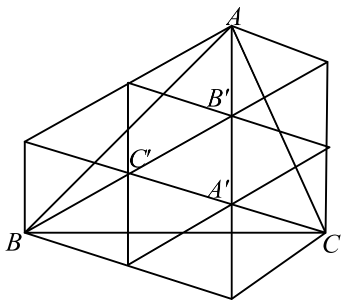
任意給定一個三角形 ABC，已知 P、Q、R 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 三邊上的三點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{BQ}:\overline{QC}=\overline{CR}:\overline{RA}=2:1$，若 $\overline{CP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ 兩兩交於點 A',B',C'。

求 $\Delta A'B'C'$ 與 ΔABC 的面積比。



簡答：1：7

參考解答：



$\Rightarrow$ 1：7

【解題評析】

題目給定的條件為三角形三邊上的線段比例，因此很容易讓人聯想到孟氏定理，但過程會有些繁複。若換個角度，從平行線圍成平行四邊形來思考，便可輕鬆地算出正中央的 Δ 面積與原正 Δ 的面積比=1∶7。而投稿的同學們也都是利用孟氏定理求得三角形內部各個線段的比例，再利用三角形底邊的比例分別求得 $\Delta ABB'$， $\Delta BCC'$， $\Delta CAA'$ 佔 ΔABC 的比例皆為 $\dfrac{2}{7}$，所以得到 $\Delta A'B'C'$ ： $\Delta ABC = 1$ ： 7。

問題編號
9204

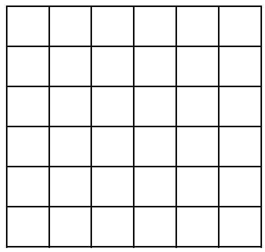
用數塊大小 4×1 的矩形磁磚和一塊大小 2×2 的矩形磁磚，鋪蓋正方形地面，要求：

(1) 鋪蓋正方形地面時不能有空隙，磁磚不能重疊

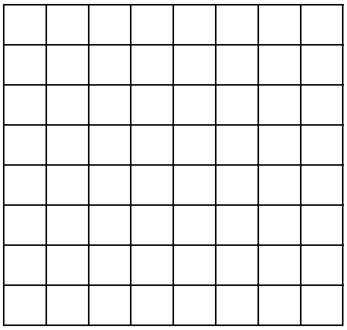
(2) 磁磚不能鋪蓋到正方形地面之外。

請回答以下問題：

(一) 能不能用 8 塊大小 4×1 的矩形磁磚和 1 塊大小 2×2 的正方形磁磚，鋪蓋 6×6 的正方形地面？如果能，請畫出其中的一種鋪蓋方法；如果不能，請加以說明理由。

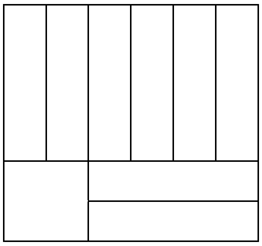


(二) 能不能用 15 塊大小 4×1 的矩形磁磚和 1 塊大小 2×2 的正方形磁磚，鋪蓋 8×8 的正方形地面？如果能，請畫出其中的一種鋪蓋方法；如果不能，請加以說明理由。



參考解答：

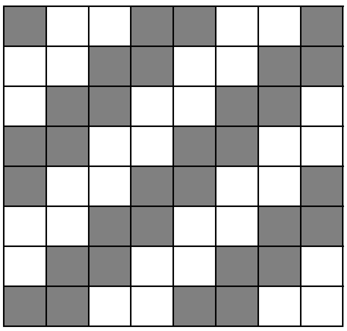
(一)、能。



(二)、不能。

方法一

以黑白兩色將整個地面染色，黑白格各有 32 個。如圖



每一塊 4×1 磁磚不論是橫蓋還是豎蓋，也不論蓋在何處，總是蓋住二黑二白，1 塊 2×2 的正方形磁磚總是蓋住三黑一白或三白一黑，於是 15 塊 4×1 磁磚鋪蓋後還剩下二黑二白，它不可能用 1 塊 2×2 磁磚蓋住。得證。

方法二

以 1,2,3,4 四色將整個地面染色，每種顏色各有 16 格。如圖

1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1

不論如何放置 4×1 磁磚，總是蓋住四種顏色的格子各一格；而 1 塊 2×2 的磁磚所蓋住的主對角線上總是同色，不論如何放置，不能同時蓋住四種顏色的格子各一格。15 塊 4×1 的矩形磁磚鋪蓋後，剩下顏色 1,2,3,4 各一格，無法用 1 塊 2×2 的磁磚蓋住。得證。

【解題評析】

1. 對於(一)小題，依照鋪蓋原則去嘗試，不難找出鋪蓋方法。方法並不是唯一。
2. 對於(二)小題，兩種解法是鋪蓋問題常用的方法，適當的塗色或編號來分類，以說明最後會有無法蓋住。
3. 所謂不能鋪蓋，是指在鋪蓋原則下**所有方法均不能**鋪蓋。(二)小題，大部分同學未解決這一題。

問題編號
9205

已知 $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$，$a_n$是自然數，且〈$a_n$〉為等差數列，$n \geqq 3$。
若 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$，
回答下列二題：
問題(1)：$S_n = 2223$ 時，n 之最大值為何？
問題(2)：滿足 $S_n = 110$ 之等差數列〈a_n〉共有幾組？

簡答：(1) 57　(2) 21組

參考解答：

(1) $\because\ S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 2223$，
$\therefore\ n \mid 4446$。
又 $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \geqq \dfrac{n}{2}[2 + (n-1)]$
$\Rightarrow n(n+1) \leqq 4446$，即 $3 \leqq n \leqq 66$。
而 $4446 = 2\times 3^2 \times 13 \times 19$
$\Rightarrow n = 3$ 或 6 或 9 或 13 或 18 或 19 或 26 或 38 或 39 或 57，得 n 之最大值為 57。

(2) $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = 110 \Rightarrow n \mid 220$。
又 $n(n+1) \leqq 220$，$n \geqq 3$，得 $n = 4$ 或 5 或 10 或 11。
因為 a_1、d 都是自然數，所以
(A) 若 $n = 4$ 時，$2a_1 + 3d = 55$
$\Rightarrow (a_1, d) = (2+3t, 17-2t)$，
$t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$，共有 9 組解。
(B) 若 $n = 5$ 時，$a_1 + 2d = 22$
$\Rightarrow (a_1, d) = (2+2t, 10-t)$，
$t = 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$，共有 10 組解。
(C) 若 $n = 10$ 時，$2a_1 + 9d = 22$
$\Rightarrow (a_1, d) = (2, 2)$，共有 1 組解。
(D) 若 $n = 11$ 時，$a_1 + 5d = 10$
$\Rightarrow (a_1, d) = (5, 1)$，共有 1 組解。
總之，可得 $S_n = 110$ 之嚴格遞增自然數等差數列〈a_n〉共有 21 組。

【解題評析】

這是一則開放性的等差數列與等差級數問題。同學常見的數學題目，在一些條件下尋求解答，一般來說，那些給定的條件不會過多，也不會太少，總是剛好足夠據以找到答案；而且條件在兩個或兩個以上時，總是兩兩獨立，不矛盾也不相依。以等差級數求和而言，常用的公式是

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

其中首項(a_1)、公差(d)、項數(n)、和(S_n)，此四者給定其三，則可求得另一，是常見的命題，這類問題除了對等差數列性質的理解外，實是單純的計算演習。

本題之問題(1)與(2)，都只給定等差級數的和，又另有首項、公差都是自然數的條件，而以找到這樣的等差數列為標的。如此，滿足條件者眾，有關的數列並不唯一，是為開放性的數學問題。開放性的問題往往可增加探究性，強化概念本質的掌握，使解題的過程有較大的彈性與空間。

本題條件雖然有變，但是等差級數求和本質無異，可一樣利用等差級數求和公式，問題(1)在算得 $n(n+1) \leqq 4446$ 後，若引用整數概念，探試因數關係，即可求得全部 n 值；問題(2)同理闡釋，後半部轉而成為求解簡易不定方程式，只要簡單計算，滿足所定條件的等差數列即可全部找出。