位能觀念的發生與意義

姚珩 [1*] 李秉書 [2]

[1] 國立臺灣師範大學 物理系

[2] 臺北市立大理高級中學

壹、前言

位能是能量物理學裡的一個重要觀念，它與動能共同形成力學能，而力學能守恆律是描述許多自然現象的基本原理，因此位能的概念頗值得仔細探究。那麼位能的意義是什麼呢？它又是如何發生的?

許多高中及國中教科書認為：重力位能是抵抗重力的外力，將物體由低處抬至高處所作的功轉變而來，並定義此外加拉力所作的功等於重力位能的增加量(國立台灣師範大學科學教育中心，1995，頁 10-17；高涌泉，2011，頁 100；傅昭銘、陳義裕，2011，頁 104；林英智，2014，頁 73)。若將此說法用在行星與太陽上，那麼是什麼樣的拉力，可將行星自離太陽近處移至遠處？位能的介紹非要引入拉力嗎？一個下落石塊，並沒有抵抗重力的拉力作用在石塊上，為何會有位能？物理學家到底是如何來描述位能呢？它又是由那些物理學家所提出？

貳、位能概念的提出－克來若

歷史上並沒有出現物理學家主張由拉力來定義位能的想法，位能的觀念最早是由 1743 年法國數學家克來若(A. Clairaut, 1713−1765)在探討重力如何影響地球外表形狀的論述時首先提出。他認為若重力在地球表面之 x 軸與 y 軸的分量為 P 與 Q，則重力對物體沿著任意極短路徑上所作的功效(effort，也就是日後所言的功)為 $Pdx+Qdy$。他發現(Clairaut, 1743，p. 34)：

當 $Pdx+Qdy$ 滿足正合微分(*exact differential*)的條件：

$$dP/dy = dQ/dx$$

則重力所作的功 $\int Pdx+Qdy$ 與路徑無關，而是僅由位置(x, y)所決定的一個函數。

嚴格來說，克來若所寫下的正合微分條件應以偏微分符號 $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ 表示。茲進一步以現今較完整的說法，可將其主張描述為：

---

*為本文通訊作者

當且僅當 P 與 Q 滿足正合微分之條件 $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ 時，則 $Pdx+Qdy$ 必為一位置函數 $V(x,y)$之全微分(*total differential*)，即

$$dV=Pdx+Qdy.$$

因為 $dV=(\dfrac{\partial V}{\partial x})dx+(\dfrac{\partial V}{\partial y})dy$，若 $dV=Pdx+Qdy$， 則 $P=\partial V/\partial x$，$Q=\partial V/\partial y$，此時 P 與 Q 必符合正合微分條件，即

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial V}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial V}{\partial y})=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

反之亦然。

克來若認為重力對物體自第一點位置 1 到第二點位置 2，沿任意路徑所作的功皆相等，與路徑無關，且其值為

$$\int_1^2 Pdx+Qdy=\int_1^2 dV=V_2-V_1$$

也就是只由起點及終點之位置函數值 V_1 與 V_2 來決定。但他一直都還未明顯表示出 P、Q 所對應相關函數 V 的確切形式，僅指出它是由位置 (x, y) 所決定的一個函數。

參、位能函數的建立－拉格朗日

1773 年，法人拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736-1813) 於探討行星受太陽吸引的引力問題時，應用了克來若的想法。若行星與太陽距離為單一變數 r，而不以兩變數 x 與 y 來表示時，其所受的引力 $F\propto 1/r^2$，設其比例常數為 M，則引力(Lagrange, 1773, pp. 14−15)

$$F=-\frac{M}{r^2}$$

此處的負號表示方向與徑向方向相反，即指向原點。在討論引力作用在行星上的功 $\int Fdr$ 時，若 Fdr 可表示為一函數 $-V$ 的全微分，即

$$-dV=Fdr \tag{1}$$

則引力作用在行星上自第 1 點位置移動到第 2 點位置的功：

$$W_{1\to 2}=\int_1^2 Fdr=-\int_1^2 dV=V_1-V_2 \tag{2}$$

將僅由 V 在起點與終點函數值之差來決定，而與路徑無關；且引力作用在物體上的功就等於初位能減末位能。他並指出此位置函數為

$$V=-\frac{M}{r}$$

因 $-\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{d}{dr}(\dfrac{M}{r})=-\dfrac{M}{r^2}=F$ 可滿足引力表示式。

繼克來若之後，拉格朗日為首位物理學家指出以一函數 $V(r)$之全微分 dV，來表示物體受力 F 所作功的微小量，如式(1)所示，此處位置函數 $V(r)$便是日後物理學上所言的「位能」函數。他倆均未引入除重力以外之任何其它拉力，來導出位能函數 $V(r)$。而與式(1)相對應之數學表示：

$$F=-\frac{dV}{dr} \tag{3}$$

也就成為現代教科書上作用力 F 與位能函數 V 關係式的標準寫法(Halliday, Resnick, & Walker, 2008, p. 176)。

肆、位能名詞的確立－格林

至於拉格朗日所使用的符號 V 的名稱，則是在其後 1828 年，英國科學家格林(G. Green, 1793−1841)於其著作《論數學應用於電磁學理論之分析》中提到：若帶電體與某一定點的距離為 q，且所造成的力可表示為 $-dV/dq$ 時，則 V 可命名為「位能函數」(potential function)。他說：

> $-dV/dq$ 將給出每一元素由 V 所造成的力之和，或作用在 p 點上同方向之合力。……這樣的函數以如此簡單的形式給出…在任意位置受力的數值，由於它在以後文章中將頻繁出現，我們現稱其為屬於該系統元素的位能函數。(Green, 1828, p. 1)。

伍、位能的描述不需外在拉力

不少作者所說：在高處的重力位能是為抵抗重力，將物體由水平面的參考位置抬至高處時，外力所作的功 (Benson, 2013, pp. 147-148；Serway & Jewett, 2012, p. 180)。此一說法容易讓學生誤認為：重力位能需有重力以外的拉力才會存在，位能也須藉外在拉力作功才可計算得知。但這種觀點從未出現在最初物理學家們的想法裡，克來若認為當重力對物體作的功與路徑無關時，作功之值必可以一位置函數 $V(r)$來決定，拉格朗日則進一步指出此位置函數導數之負值就是重力，即 $F=-dV/dr$，如式(3)，而 $V(r)$便是現今所言的位能。他倆均未引入除重力以外之任何其它拉力，來描述位能。底下將僅應用重力、彈力或靜電力，而不使用任何外加拉力或推力，來分別討論與計算物體的重力位能、彈性位能與電位能。

一、重力位能

以質量為 m 的石塊為例，它受重力 $\vec{F}=-mg\vec{j}$ 作用，$\vec{j}$ 為垂直向上的單位向量，代表著重力 F 方向向下。若石塊自高處 y_1 以任意方式或沿任意路徑下落至 y_2，其中微小路徑量可以 $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$ 表示，則重力對石塊作功之值為

$$W=\int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr}=-\int_{y_1}^{y_1} mg\vec{j}\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})=-mg\int_{y_1}^{y_2} dy=-mg(y_2-y_1)=mgy_1-mgy_2 \qquad (4)$$

也就是功等於在初位置 y_1 與末位置 y_2 所對應的兩個函數值 mgy_1 與 mgy_2 之差，我們稱在任意高度 y 之狀態函數 mgy 為石塊的重力位能。上式已隱含了重力所作功與路徑無關，僅與起點與終點位置相關的性質，並與式(2)內涵一致，為初位能與末位能之差。因此受地表上重力所對應的位能，並毋須引入重力以外之拉力來描述及計算。對行星在萬有引力作用下所對應的位能，其論述與結果亦同。將重力位能視為是外力抵抗重力，將物體由低處抬至高處所作的功轉變而來，並非是位能概念原創者所認為的意義。

為方便起見，若將物體運動終點設為參考原點，通常取其為水平面，即 $y_{ref}=0$，則自高處 y 下落至水平面，重力對物體所作功，由式(4)為

$$W=\int_y^{y_{ref}} Fdy=mgy-mgy_{ref}=mgy$$

此值即為物體在位置 y 處之重力位能。有些書稱其為：重力對高「位」置物體所具有的作功「能」力。

另外，由功能定理：合力對最初為靜止物體所作的功等於末動能，即 $W=mv^2/2$，因此在高處具有位能的物體，落下著地前，位能逐漸消失，但重力對其所作的功可轉換或釋放出動能，而可視為高處物體儲存有能量、或具有潛在能量。

二、彈性位能

同理，在受彈力作用下的物體，也無需引入外在拉力，即可算出在任意位置處的彈性位能。由虎克定律，物體受彈力 F 作用與其距均衡點位移 x 之關係為 $F=-kx$，其中 k 為彈性係數，方向向右為正。若物體自均衡點左邊 x_1 之受壓處，釋放後移動至均衡點左邊 x_2 處，由於作用在物體之彈力與物體位移方向相同，均指向右，彈力對物體作正功，其值為

$$W=\int_1^2 Fdx=-\int_1^2 kxdx=-(\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2)=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2 \qquad (5)$$

也就是功等於在初位置 x_1 與末位置 x_2 所對應的兩個函數值 $kx_1^2/2$ 與 $kx_2^2/2$ 之差，我們稱任意位置 x 之狀態函數 $kx^2/2$ 為物體的彈性位能。彈力所作的功仍與路徑無關，並與式(2)一致，為初彈性位能與末彈性位能之差。

若將物體運動終點設為參考原點，通常取其為物體不受彈力作用時的均衡點，即 $x_{ref}=0$，則自壓縮處 x 恢復至均衡點，彈力對物體所作功，由式(5)為

$$W=\int_x^{x_{ref}} dx=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}kx_{ref}^2=\frac{1}{2}kx^2$$

此值即為物體在位置 x 處之彈性位能，也可稱為物體所儲存的潛在能量。

三、電位能

(一)兩個點電荷

位能的概念在電學與原子物理的領域中依然相當重要，對於兩攜帶電荷為 Q 與 q 之帶電粒子，設電荷 Q 固定於原點上，另一電荷 q 距原點 r 處，受到庫侖力 $\vec{F}=(kQq/r^2)\vec{e}_r$ 作用，此處 k 為庫侖常數，$\vec{e}_r$ 為徑向單位向量。若兩電荷均為正電，q 受靜電力作用，自 r 處沿任意路徑運動到無限遠處，其中路徑的微小量可以 $d\vec{r}=dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta+r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$ 表示，而 $\vec{e}_\theta$ 與 $\vec{e}_\varphi$ 為球面坐標中的另外兩個單位向量，則靜電力對 q 所作的功為

$$W_{r\to ref}=\int_r^{ref}\vec{F}\cdot d\vec{r}=kQq\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=kQq(0+\frac{1}{r})=\frac{kQq}{r} \tag{6}$$

上式利用了對任意路徑 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=Fdr=kQqdr/r^2$，故式(6)也表示了靜電力所作的功與路徑無關，僅由徑向之起點與終點位置決定，並符合式(2)所示的性質，等於初位能 U_r 與末位能 U_∞ 之差。即

$$W_{r\to ref}=U_r-U_\infty \tag{7}$$

若選定無限遠處為參考位置，並取其對應位能為零位能，或 $U_\infty=0$，則比較上二式(6)與(7)，可得

$$U_r=\frac{kQq}{r} \tag{8}$$

此值即稱為兩電荷 q 與 Q 相距 r 之電位能，同時電位能為靜電力作用在電荷 q，將它自 r 處移動到無限遠處所作的功，即 $U_r=W_{r\to\infty}$。

若兩帶電粒子均攜帶負電荷，其情形完全相同，負電荷 Q 對負電荷 q 自相距 r 處，排斥到無限遠處，所作之正功依然為 kQq/r，兩電荷所形成的電位能仍可以式(8)代表。此電位能也可稱為兩帶電荷所儲存的潛在能量，因它們可將此能量釋放出來，推動電荷 q 至無窮遠處。

假如兩帶電體攜帶異性電荷，設 Q 帶負電，固定於原點，另一電荷 q 帶正電，彼此為吸引力。在此情況下，則考慮負電荷 Q 對正電荷 q，自無限遠處受靜電力吸引至 r 處所作的功。此時因力與位移方向相同，故仍作正功，且其值為

$$W_{ref\to r}=\int_{ref}^{r}Fdr=kQq\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr=kQq(\frac{-1}{r}) \tag{9}$$

並與路徑無關，如式(6)所示；另外由式(2) 與路徑無關的靜電力所作的功等於初位能 U_∞ 與末位能 U_r 之差，即

$$U_r=W_{ref\to r}=U_\infty-U_r=-U_r \tag{10}$$

比較上二式(9)與(10)，可得負電荷 Q 與正電荷 q 相距 r 時的電位能 $U_r = kQq/r$，仍可以式(8)表示，只是此時電位能為負值。

若將正電荷 q 視為測試電荷，電荷 q 的運動方向總是受帶正電的源電荷 Q 排斥而離開，並會朝向無限遠處，或朝帶負電的另一源電荷靠近，也就是自高(或正)電位能處移動至低(或負)電位能處。另一方面，由以上討論可知，無論是同性或異性的兩電荷系統，皆不需要藉著抵抗靜電力的外力所作的功，來求得電位能的形式。

(二)三個點電荷

明白上述僅以靜電力建立起兩個點電荷之電位能的意涵，底下可進一步清楚描述出三個點電荷 q_1、q_2 與 q_3 的電位能之形式。為方便起見設此三電荷均帶正電，彼此相距為 r_{12}、r_{13} 與 r_{23}，如圖一。

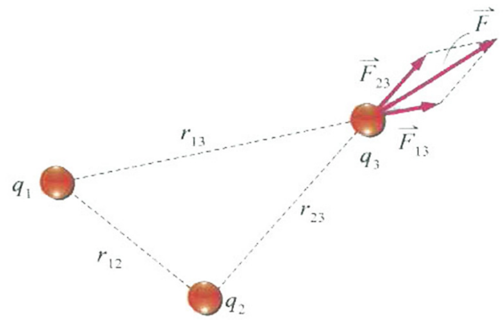

圖 1.　三個正電荷 q_1、q_2 與 q_3，彼此相距為 r_{12}、r_{13} 與 r_{23}，q_1 與 q_2 作用在 q_3 之總靜電力為 $\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$。此力將 q_3 自原處移動至無限遠處所作的功，等於 $\vec{F}_{13}$ 將 q_3 自 r_{13}，與 $\vec{F}_{23}$ 將 q_3 自 r_{23} 處，移動至無限遠處所作功之和。

先假設 q_1、q_2 固定，它倆對 q_3 之總靜電力 $\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$，將 q_3 自原處移動至無限遠處所作的功，等於 $\vec{F}_{13}$ 將 q_3 自 r_{13} 與 $\vec{F}_{23}$ 將 q_3 自 r_{23} 處，移動至無限遠處所作功之和，即

$$W = \int^{r_{ref}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{r_{13}}^{\infty} \vec{F}_{13} \cdot dr + \int_{r_{23}}^{\infty} \vec{F}_{23} \cdot dr = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} = U_{13} + U_{23}$$

上式第三個等式使用到式(6)。而整式則代表：此兩電荷對單一電荷所作的功就等於兩組電位能 U_{13} 與 U_{23} 之和。再考慮只剩下 q_1 與 q_2 時，它倆之間的電位能，由式(8)為 U_{12}。則三個點電荷的總電位能 U 為，彼此間的靜電力使 q_3 與 q_2 分別移至無限遠處所作功之和，最後只剩下孤立的 q_1，即總電位能

$$U = U_{13} + U_{23} + U_{12} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_1q_2}{r_{12}}$$

也就是兩兩電荷間的電位能之和。

陸、 結 論

位能概念最早是由克來若於 1743 年發現，他認為當力為一位置狀態函數的導數，則此力所作的功與路徑無關，並可稱此位置函數為該物體之「位能」。也因為此性質，而可由力所作的功等於兩狀態函數的差，來計算出任意位置的位能值。克來若並未引入抵抗此力的其他外力，來描述位能。

在中學物理教科書裡最常見的作用力為重力、彈力與庫侖靜電力，物體受此三種力作用下，分別有其對應的位能。一如馬克士威(J. Maxwell, 1831-1879)所說：「一點上的電位能就是靜電力對某正電荷，從該點被帶到無限遠處所作的功。」(Maxwell, 1992, p. 86)。同樣馬克士威也僅單純就靜電力來討論電位能，而沒引入抵抗靜電力的推力對電荷所作的功，來形成位能概念。且在某位置的位能即為單一的力—如重力、彈力或靜電力—作用在物體上，讓物體自該位置移動到參考點處—通常為零位能面，如水平面、均衡點或無限遠處—所作的功，其意義清楚不模糊。且如此的定義，在配合功能定律後，對日後建立此三種力所對應的力學能守恆律，將顯得格外簡單清晰。

參考文獻

國立台灣師範大學科學教育中心 (1995)。**高級中學物理第二冊** (吳大猷主編)。台北市：國立編譯館。

高涌泉 (2011)。**高級中學基礎物理二 B 下冊**。新北市：龍騰文化。

傅昭銘、陳義裕 (2011)。**高級中學基礎物理二 B 下冊**。台南市：南一書局。

林英智 (2014) 。**國中自然與生活科技二下**。新北市：康軒文教。

Maxwell, J. (1992)。**電磁通論** (戈革譯)。武漢市：武漢出版社。(原著出版於 1873 年)

Benson, H. (2013). Physics (2nd revised ed.). New York: Wiley.

Clairaut, A. C. (1743). *Theorie de la figure de la terre: tirée des principes de l'hydrostratique.* Paris: Durand.

Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Nottingham: Printed for the author, by T. Wheelhouse.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2008). *Fundamentals of Physics* (8th ed.). New York: John Wiley & Sons.

Lagrange, J. L. (1773). Sur l'équation séculaire de la lune. l'Académie Royale des Sciences (Ed.), *Mémoires de mathématique et de physique, Année* (pp. 1-61). Paris: de l'imprimerie Royale.

Serway, R., & Jewett, J. (2012). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (8th ed.). New York: Brooks/Cole.