從「摺紙算勾股」談數學素養

李政憲* 徐詩媛
新北市立林口國民中學

壹、前言

筆者從事摺紙融入數學課程研發已六年有餘，去年度並以「摺紙算勾股」試題參與新北市輔導團的數學素養徵題，與校內老師討論修正後，針對學生進行施測頗有心得，特撰此文與各位讀者共享。

「數學素養」一詞源自國際經濟合作發展組織（OECD）針對各國 15 足歲學生所進行的國際教育評量，並針對閱讀素養、科學素養、數學素養為評量目標。「數學素養」在 PISA 的定義為：「個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於了解數學在世界裡扮演的角色，也能幫助未來的公民做出有所依據且具反思性的判斷與決策。」數學素養內容兼顧數學內容領域(包含：變化與關係、空間與形狀、數量、不確定性與數據)以及數學歷程(包含：形成數學情境；應用數學概念、事實、程序以及推理；詮釋、應用以及評鑑數學結果)。(取自教育部提升國民素養實施方案_數學素養研究計畫結案報告)

因應教育需求，日前國內建置「國際學生能力評量計畫」網站介紹其評量內容並放置部份樣本試題[註1]，而國內師大數學系的許志農教授更於「數學素養評量試題工作坊」介紹數學核心素養、相關課程規劃，以及如何設計 PISA 試題，與 PISA 試題在設計時須注意到的環節等。許教授更透過國科會計畫邀集國中現職老師，配合國中三年現行單元，編寫蒐集與修改了逾 500 題類 PISA 試題建置於「非想非非想」數學網站[註2]，並可於「數學素養評量」網站上進行線上評量，參考會考非選題的方式計分，讓有興趣想了解數學素養評量試題的國內教師與同學有依循參考的方向，了解數學素養試題如何將「數學世界」與「真實世界」設計於數學情境當中，希望可以讓學生將數學知識與數學能力結合，以解決生活問題，進而提升學生數學素養之能力。(取自數學素養評量試題工作坊_許志農教授)

貳、「摺紙算勾股」試題

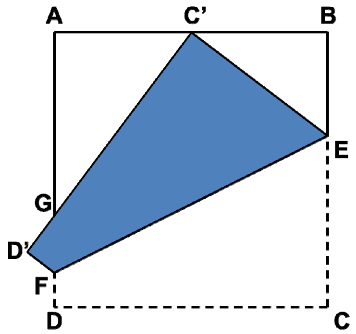
此次「摺紙算勾股」試題，考量學生的數學知識與數學能力，結合生活上可運用的「空間與形狀」情境，希望學生能藉此情境題目轉化為數學問題，運用數學工

*為本文通訊作者

具，統合數學觀念，進而提升數學素養，以八年級上學期的勾股定理為核心概念，並藉由摺紙的實作方式讓學生體會如何將正方形三等份，並進而運用在生活情境中。本次施測對象為林口國中八年級的學生，其中這班學生的數學程度在上完七年級的課程後，經由數次的測驗以及段考中顯示全班素質較為平均，無兩極化(高分群、低分群明顯)現象，在林口國中全八年級段考成績位於第六名或第七名(全八年級共十五個班)，平日在課堂上的互動較為活潑，對於不能理解的問題也能踴躍發問，班上在數學課程上具有討論風氣，施測前教師已將八年級上學期的「勾股定理」單元教授完畢，而在施測的題目上，此試題曾前後討論並修正五次內容後定稿，茲針對幾次重大修正內容以及施測的結果進行說明。

一開始筆者參考了由芳賀和夫所編寫的 ORIGAMICS：オリガミクス I（幾何図形折り紙）一書，設計了底下試題進行討論：

如下圖，將正方形 ABCD 的色紙的 C 點，摺至上方 $\overline{AB}$ 的中點 C'，產生摺痕 $\overline{EF}$ 與兩邊的交點 G 點。試回答下列問題：



問題 1(1 分)：

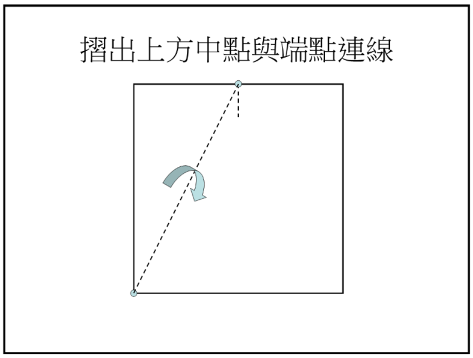
請問∆BEC'~∆AC'G 是根據哪一種相似性質？

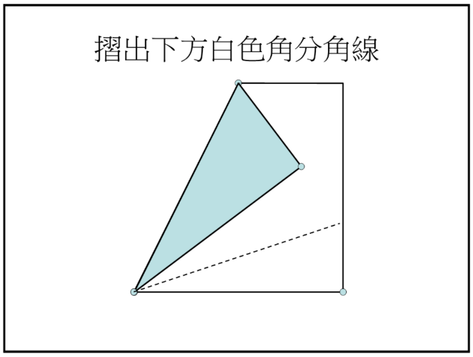
問題 2(2 分)：

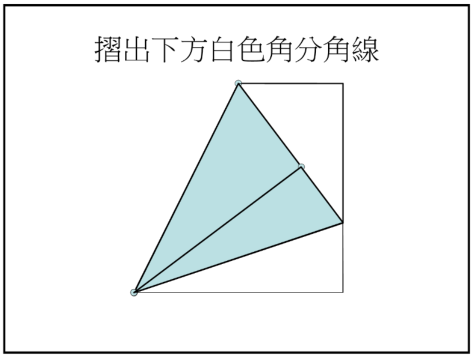
若 $\overline{BC}$ 的長度為 1，試計算 $\overline{BE}$ 的長度為多少？（提示：可假設 $\overline{BE}$ 的長度為 x）

此題問題 1 透過角度互餘與直角可說明為 AA 相似，問題 2 可透過列式 $(1-x)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$，解得 $\overline{BE} = \frac{3}{8}$，進一步還可推得 G 點所在位置為色紙邊長的三分之一。然而由於預施測的對象為國中八年級學生，問題 1 的相似性質屬於九年級上學期課程，學生尚未學習，而單問問題 2 又稍嫌單調且較傾向一般坊間數學參考書的題目[註3]，經與團隊老師討論後，決定忍痛割愛問題 1，改由團隊老師參考簡報設計了下列結合生活情境的問題：[註4]

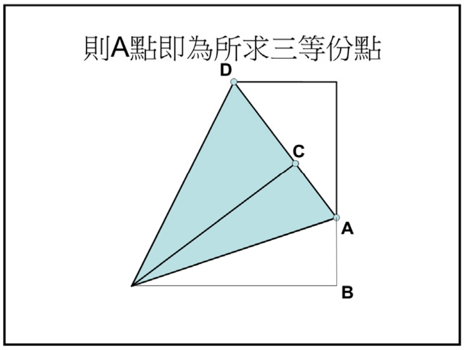
大毛家三兄弟很愛吃蜜汁肉片，阿姨帶來一盒三兄弟最愛的蜜汁肉片禮盒，三兄弟將其平均分成三份，但剩下最後一片，二毛看著正方形的肉片想了一個法子，可以將正方形的蜜汁肉片平均分成三等份。







接著二毛便指著 $\overline{AB}$ 為正方形肉片邊長的三分之一



問題 1

請問 A、C、D 三點是否共線？

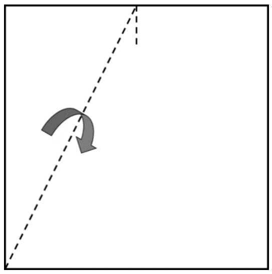
問題 2

若我們將 $\overline{AB}$ 假設為 x，肉片邊長為 1，試證明 $\overline{AB}$ 為正方形肉片邊長的三分之一。

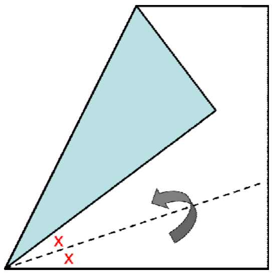
此題問題 1 藉由一直線為 180 度的數學先備知識為開端，引導學生透過 A、C、D 三點共線，試著說明右上方三角形為直角三角形，並進一步透過列式證明 $\overline{AB}$ 為正方形肉片邊長的三分之一回答問題 2 的問題。然而由於數學素養在強調生活的結合與情境的真實性，為了讓學生有更深的體悟，並與實際生活作連結，於是團隊教師將題目敘述的正方形肉片，改結合更可以在實際生活中操作的摺紙，並於施測時將色紙成為輔助工具，讓學生有實物上的操作，期能將生活情境的問題轉化為數學問題，並且逐漸嘗試調整現實狀況轉化為數學語言，接著再運用數學知識與能力將問題解決，且八年級學生上學期尚未正式學習證明，經團隊教師討論後修正為下列定稿試題與參考解答施測：

數學課李老師發給同學們一人一張正方形色紙，請同學按照指定步驟完成：

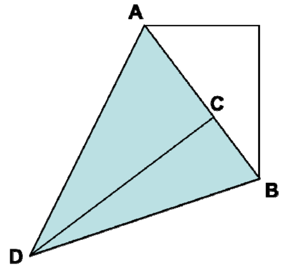
(一) 如下圖，摺出上方中點與左下方端點連線；



(二) 如下圖，摺出底下剩餘角度的角平分線



(三) 如下圖，色紙左邊與下方邊長疊合於 $\overline{CD}$ 邊上。



請按上述步驟，依序回答下列問題：

問題 1：(2 分)

請問∠ADB 為幾度？請說明你的理由。

(提示：可假設∠BDC 為 x 度，∠ADC 為 y 度計算)。

問題 2：(2 分)

請問 A、C、B 三點是否成一直線？請說明你的理由。

問題 3：(2 分)

若色紙邊長為 12 公分，試求 $\overline{BC}$ 為多少公分？

(提示：可設 $\overline{BC}$ 為 a 並將未進行摺紙前的正方形完整畫出)

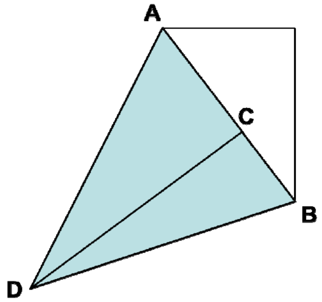
計分說明－問題 1

滿分 (2 分) 代碼 2A： 假設∠BDC 為 x 度，∠ADC 為 y 度，$2x+2y=90^o$ $\Rightarrow 2(x+y)=90^o$ $\Rightarrow x+y=45^o$ $\because \angle ADB=\angle BDC+\angle ADC$ $=x^o+y^o$ $\therefore \angle ADB=45^o$	**零分** 代碼 0A： 沒有作答 代碼 0B： 其他答案
部分分數 (1 分) 代碼 1A： 將∠BDC 及∠ADC 以代數字的方式求出， 例如：假設∠BDC 為 15º， 則∠ADC = (90º −15º×2)÷2 =30º ∴∠ADB＝15º +30º=45º 代碼 1B： 僅說明為 45º，但未說明理由，或理由說明不正確。	

計分說明－問題 2

滿分 (2 分) 代碼 2A：是， $\because \angle ACD=90^\circ$、$\angle BCD=90^\circ$ $\angle ACD+\angle BCD=180^\circ$ **部分分數** (1 分) 代碼 1A： 僅說是，但未說明理由，或理由說明不正確。	**零分** 代碼 0A： 沒有作答 代碼 0B： 其他答案

計分說明－問題 3

滿分 (2 分) 代碼 2A：設 $\overline{BC}$ 為 a 公分  	**零分** 代碼 0A： 沒有作答 代碼 0B： 其他答案

∵∠AEB＝90° 根據勾股定理： $6^2+(12-a)^2=(6+a)^2$ $36+144-24a+a^2$ $=36+12a+a^2$ 解得 $\overline{BC}=a=4$ 公分 **部分分數**（1 分） 代碼 1A： 以代入法或僅寫出 $\overline{BC}=4$，未說明正確理由或理由說明錯誤。 代碼 1B： 根據勾股定理列出方程式： $6^2+(12-a)^2=(6+a)^2$， 但解未知數過程或答案有誤。	

資料來源: How to Divide the Side of Square Paper, http://www.origami.gr.jp/Archives/People/CAGE_/divide/02-e.html

參、施測結果與感想

此問題 1 到問題 3，將原來的生活情境，運用色紙作為學生的輔助工具，讓學生將生活情境問題轉化為可操作的實物，並且新增問題 1 計算∠ADB 的度數，再加上說明問題 2 的理由，問題 3 也由原來的證明改為計算說明。且問題 1、3 加上了提示，希望可以給作答的學生多一點參考的方向。

為求答題時的真確性並提供學生參考的方向，也於答題時由教師提供色紙供學生操作，經施測後學生在問題 1 及問題 2 上花費時間較久，問題 1 須利用到摺紙的摺痕以及角平分線的觀念，多數學生因為第一次操作摺紙，未能將對摺後展開所表示的摺痕聯想至將角度一分為二的概念，然而再加上當時學生尚未學習八年級下學期的平面幾何圖形單元，因此較不易應用於解題策略上，但在八下上完 2−2 垂直、平分與線對稱的單元後，授課教師再次將問題 1 呈現給同班學生，補充摺紙的幾何觀念於數學問題情境中，再次引導學生將對摺展開所示的摺痕，聯想至將角度一分為二的概念，學生在八年級下學期在幾何的理解程度有顯著提昇。

至於「問題 2：請問 A、C、B 三點是否成一直線？請說明你的理由。」由於學生於施測時要表達陳述三點成一直線且說明理由較為困難，探究其因，雖然小學學生已有一直線（或平角）為 180 度的數學知識，然而在八年級上學期學生初施測時，多數學生均無法直接使用相加為 180 度（互補）的觀念論證，顯示出多數教師雖透過大量的題目讓學生將所學的數學知識運用在相關的題型上，但若在不熟悉的題型出現時，許多學生卻還是無法運用，甚至於答題時不知所云；此狀況讓筆者深感數學教學在平時傳授數學知識時，除了透過大量的題目作數學能力的運用，應該還要搭配其他更多元的方式提升學生的數學能力，進而讓學生將生活周遭的問題與數學做連結，以形成其數學素養。其實在教學的同時，也讓教師反思自己的數學素養是否也需不斷的進步與提升，才能逐步帶領學生，並非如傳統般單向傳授數學知識，所以數學教師在數學專業能力上的持

續進修也是很重要的；值得一提的是，在八年級下學期上完平面圖形單元後，學生於課堂上自發性的再次提出問題 2 的疑問，讓授課教師驚喜之餘，也了解摺紙對於學生是新的一種教學方式；也證明教師可採用摺紙為教學媒介，引起學生在幾何的學習動機。而教師除了與學生討論，也結合生活中一直線為 180 度的觀念，將兩個 90 度的直角並排,直觀看出 180 度的平角，可見摺紙除了加深學生在數學知識及能力的運用，使學生確實理解及接受，也在無形中提升相關的數學素養。

而問題 3 在學生作答時，有少數學生直接以直尺測量並寫上答案，顯見忽略了此題於下行的提示：可設 $\overline{BC}$ 為 a 並將原正方形邊長完整畫出，不過因為大部分的學生在七年級時已學過假設未知數，並能利用八年級已學過的「勾股定理」列出方程式，將情境中的問題與數學做連結，並且算出其結果。透過事後教師的補充說明，得知正方形邊長的三等份點可以透過此方式找到，此種說明方式除了應用學生已學過的數學知識外，此數學素養的情境脈絡設計可以讓學生有不同的體驗，而不是將數學思考只侷限於特定的類型題目，多數學生的反應良好。

本次施測對象為八年級上學期的學生，原本設定前兩題的解法，學生只需學習過七年級的課程並應用國小曾經習得幾何的先備知識，透過簡易的數字運算與式子的化簡，對於情境的問題便可進行解題；令人始料未及的是，學生在回答問題時，原本以為較困難的問題 3 反而比前兩題有較多的學生會作答。由於平角為 180 度的概念，在國小端已曾經學習，但此題明顯發現多數學生無法連結應用，可見我們學生的數學知識應用能力尚待加強，數學素養的訓練有其存在的必要性。至於另一想法則是學生容易受到目前學習的單元影響，在熟悉的章節中尋找既有的數學知識作應用；是以在九年級另一班級的學生進行施測時，學生在三題的答對率均較八年級學生的答對率為高，因此我們可以理解除了九年級的學生的先備知識較為充足，另外其綜合應用能力也較八年級學生為佳。

此次為這些學生第一次使用摺紙作勾股定理的應用，學生往常在摺紙的操作上，多數只會將注意力集中至摺紙的步驟以及成品外觀的展現，除了操作上較為生疏之外，也不易理解摺痕或摺紙與幾何連結所提示的意義，因此教師必須試著引導學生，理解摺紙摺痕在數學幾何上的意義，比如：這條摺痕代表的是幾何中的甚麼意義？是點、線、還是面？對摺攤開除了所看到的摺痕，其角度因為對摺變為原來角度的幾倍？與尺規作圖可以產生何種關聯？引導學生可將能力移轉至解決生活情境上的數學問題。而在經過紙張的發放實作與教師的示範說明後，學生多數可理解題意（如圖 1～圖 4），由此也得知國中生若在試題或教材的使用上牽涉到實作，仍需要具體物以輔助理解。而此批學生於九年級上完相似形的數學觀念後再次實作

時，授課教師使用了相似形的三等份摺紙作知識應用，也在課程上延續摺紙與幾何的相關運用【附錄一】、【附錄二】[註 5]。

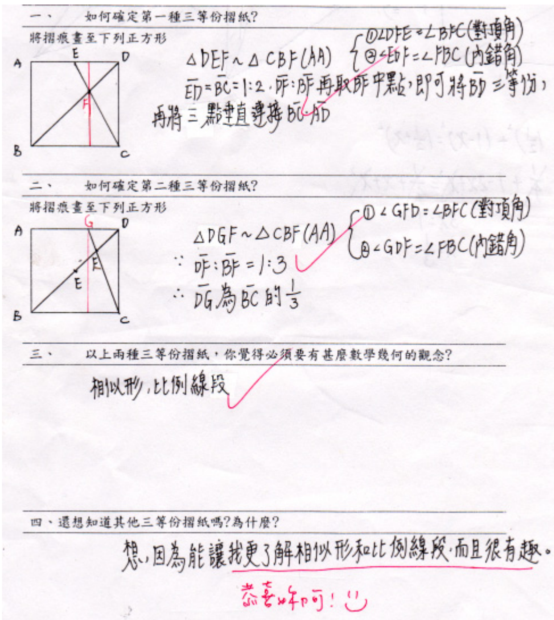
圖 1　教師以色紙示範講解情境

圖 2　個人嘗試解題

圖 3　分組討論解題

圖 4　教師提示學生作答

於課程實作時此批九年級學生明顯比八年級上學期操作摺紙時較為熟捻，在數學觀念的理解上也更為深刻，除了擁有的幾何概念，也同時將摺紙相關概念作連結，且學生多數反應使用這種方式進行解題，以及數學應用於摺紙均有濃厚的興趣，希望再進行相關的課程（圖 5～圖 8）。



一、　如何確定第一種三等份摺紙?

將摺痕畫至下列正方形

$\triangle DEF \sim \triangle CBF$(AA) ① $\angle DFE=\angle BFC$(對頂角) ② $\angle EDF=\angle FBC$(內錯角)

$\overline{ED}:\overline{BC}=1:2$，$\overline{EF}:\overline{BF}$ 再取 $\overline{BF}$ 中點，即可將 $\overline{BD}$ 三等份，再將三點連直連接 $\overline{BC}$、$\overline{AD}$

二、　如何確定第二種三等份摺紙?

將摺痕畫至下列正方形

$\triangle DGF \sim \triangle CBF$(AA) ① $\angle GFD=\angle BFC$(對頂角) ② $\angle GDF=\angle FBC$(內錯角)

$\because \overline{DF}:\overline{BF}=1:3$

$\therefore \overline{DG}$ 為 $\overline{BC}$ 的 $\frac{1}{3}$

三、　以上兩種三等份摺紙，你覺得必須要有甚麼數學幾何的觀念?

相似形，比例線段

四、還想知道其他三等份摺紙嗎?為什麼?

想，因為能讓我更了解相似形和比例線段，而且很有趣。

恭喜妳可！:)

圖 5　學生反應可加深數學學習印象

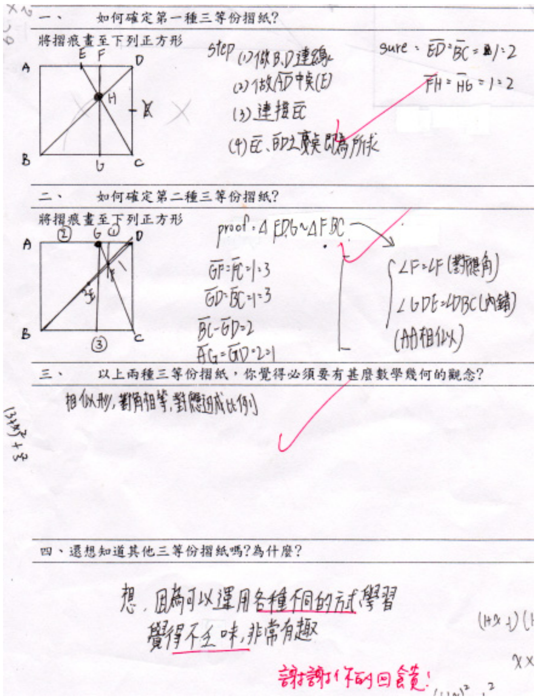


圖 6　學生樂於運用不同方式學習

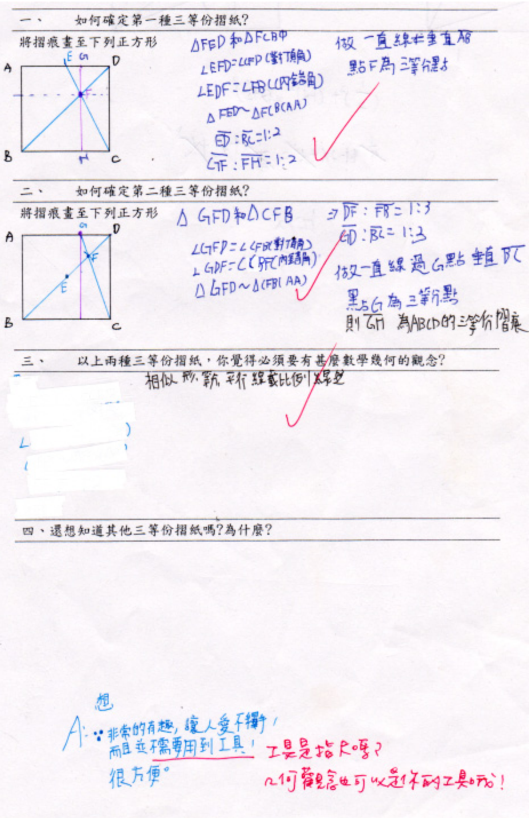


圖 7　學生回饋透過摺紙學習數學有趣且喜愛

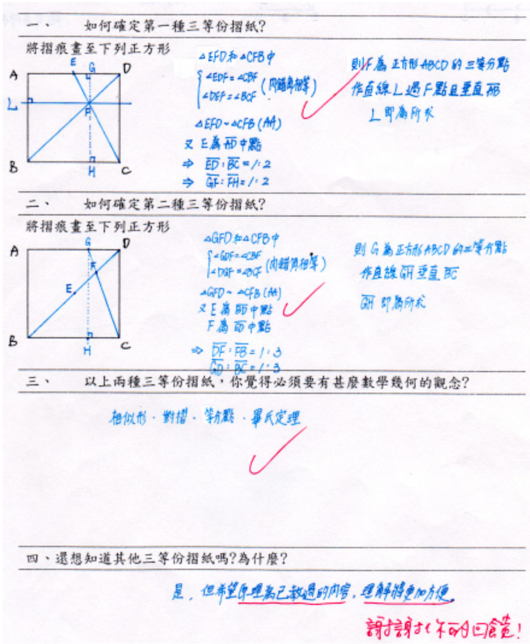


圖 8　透過摺紙學習數學方便學生理解，並有意願深入學習

由此我們可得知透過之前的實作，已經使得學生對於具體物轉為圖像化有所幫助。除了再一次驗證了摺紙應用於數學教學上，是有趣且有效的一種方式；更顯見多數的國中生於幾何推理時，若需要實體物輔助，建議數學教師不妨可以試試使用摺紙方式，相信對其幾何思考層次的提昇將有顯著效果，進一步可內化為其本身的數學素養。

肆、備註

註一：「國際學生能力評量計畫」網站：http://pisa.nutn.edu.tw/pisa_tw.htm

註二：「非想非非想」數學網：http://www.math.ntnu.edu.tw/museum/

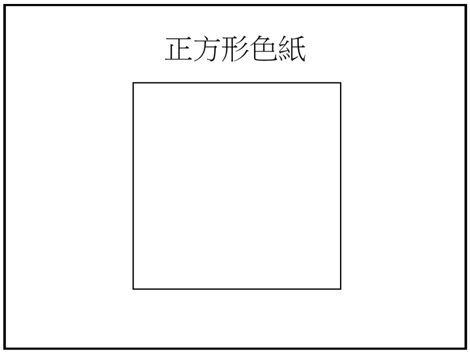
註三：關於此問題的延伸討論，尚可參考「科學研習」月刊 54 卷第 4 期:「從

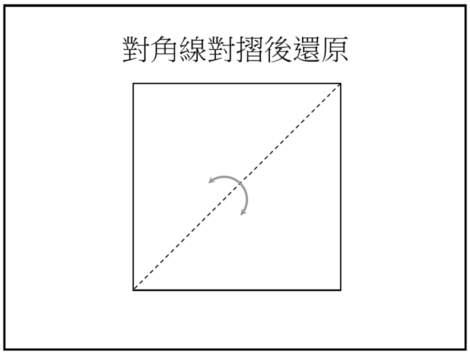
摺紙學數學—從有理數到畢氏數」一文。

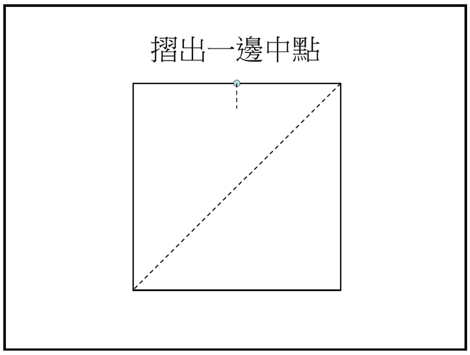
註四：本文全文與參考簡報下載處「林中生命藝數殿堂」網站：http://163.20.9.7/dyna/menu/index.php?account=math

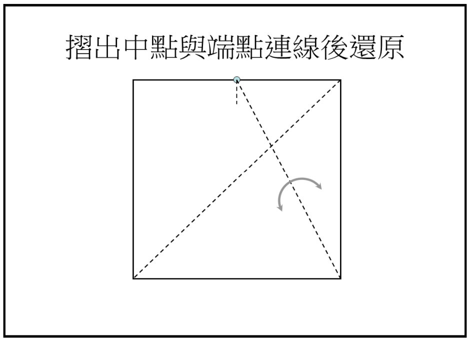
註五：教師於九年級進行教學時，可考慮比較本文所提的兩種方式，連同相似形的三等份摺紙方式，作為將色紙三等份的不同操作應用。細部操作說明可再參考「科學教育月刊」第 378 期：「摺出無理數(一)−1」部份內容。

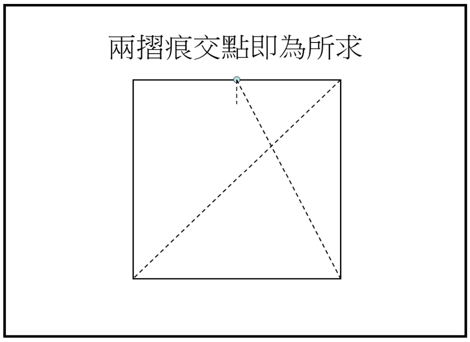
【附錄一】三等份摺紙之相似形操作簡報−1











【附錄二】三等份摺紙之相似形操作簡報−2