關於最少點擊次數的簡單解題

方妙如

基隆市立東光國民小學

壹、前言

去年筆者在尋找科展比賽題材中意外發現中華民國第 52 屆中小學科學展覽國中組數學科作品「萬數歸一--圖形上點邊數字和為定值之研究」(以下簡稱《歸一》)是鳳山國中(以下稱鳳中)以臺北市立建國高級中學第 90 期通訊解題 9004 的題目作為發想[註一]。

鳳中學生在此科展作品中以每個邊每個角均設未知數，並利用解聯立方程式的方式回答問題，在最後的結論中，鳳中學生提到對於奇數多邊形和偶數多邊形皆有解，但對偶數多邊形尋求最少點擊次數仍無法說明。筆者覺得這個題目非常有趣，希望尋求一個更簡單且直觀的解題方式，因此根據第 52 屆「萬數歸一」p13(五)之推論 9 的完整結果，提出除了設未知數解方程式之外的另類思考。

本文分成五節,自第三節開始,先說明如何利用基本型並配合加法結合律和交換律，來得到存在性。第四節分三項討論：(一)存在性(二)唯一性和(三)最少點擊次數。每一項又分為 a.奇數邊形 b.偶數邊形。討論時，奇數邊形以五邊形、偶數邊形以六邊形示範，盡量不失其一般性。

貳、建中 90 期通訊解題原題

程式設計師想設計一款益智遊戲,規則如下:電腦在正 n 邊形的每個頂點上隨機放一個介於 0~10 的數字，然後玩家可任意用滑鼠點選正 n 邊形的邊，當他每點選正 n 邊形的邊一次時，點選的邊其兩端點數字都加 1，直到每個頂點的數字均相等就可以過關(可不只一次點選同一邊，遊戲開始後，頂點數字可以超過 10)。

鳳中的科展作品頂點上的數字不限，探討玩家可用滑鼠任意點擊各邊並討論兩個問題：

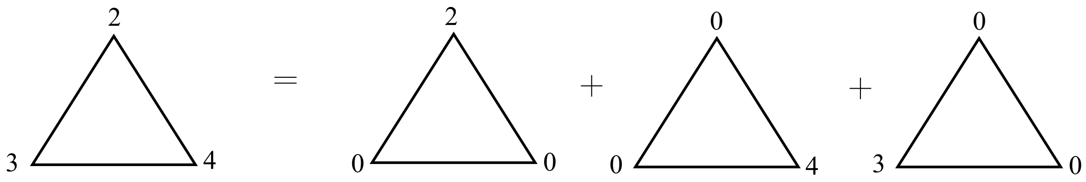
1. 是否經過點擊後，每個頂點的數字均達到相等。
2. 如何求出最少的點擊數。

鳳中對於奇數多邊形和偶數多邊形分別回答了第一個問題，至於第二個問題，原作者表示奇數多邊形的情形已有結果,但偶數多邊形的情形仍無法說明(引原作品 P29 結論與展望說明六)，我們將在本文的第四節回答最少點擊次數的問題。

參、以化繁為簡為基礎

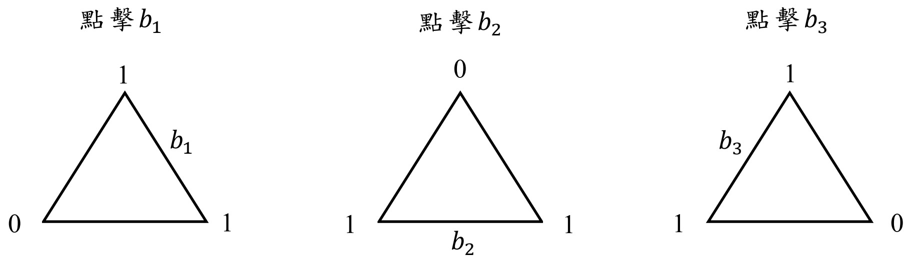
原作者是以設定未知數做為各邊點擊次數，再利用解方程式得到結論。本篇想從基本的幾何圖形出發，使用加法的結合律和交換律來處理這個問題，我們認為這樣的看法比較容易了解，並貼近問題的本質。

先以一個三邊形為例，三邊形三頂點各有一數字，稱為三數三邊形(如圖一)。如果有兩個頂點是 O，稱為一數三邊形(如圖二)。利用加法結合律，三數三邊形可以分成三個一數三邊形。

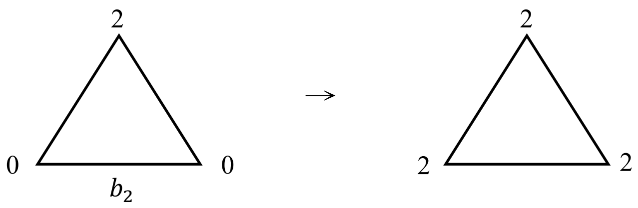


（圖一）　（圖二）

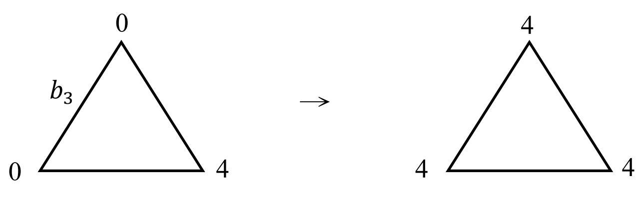
當我們點擊b_1或b_2或b_3邊一次時，相當於在此邊的兩頂點各加 1。



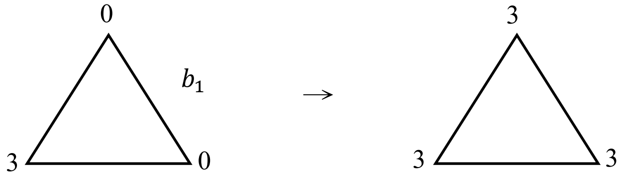
換句話說，當我們點擊b_2兩次，如下圖:



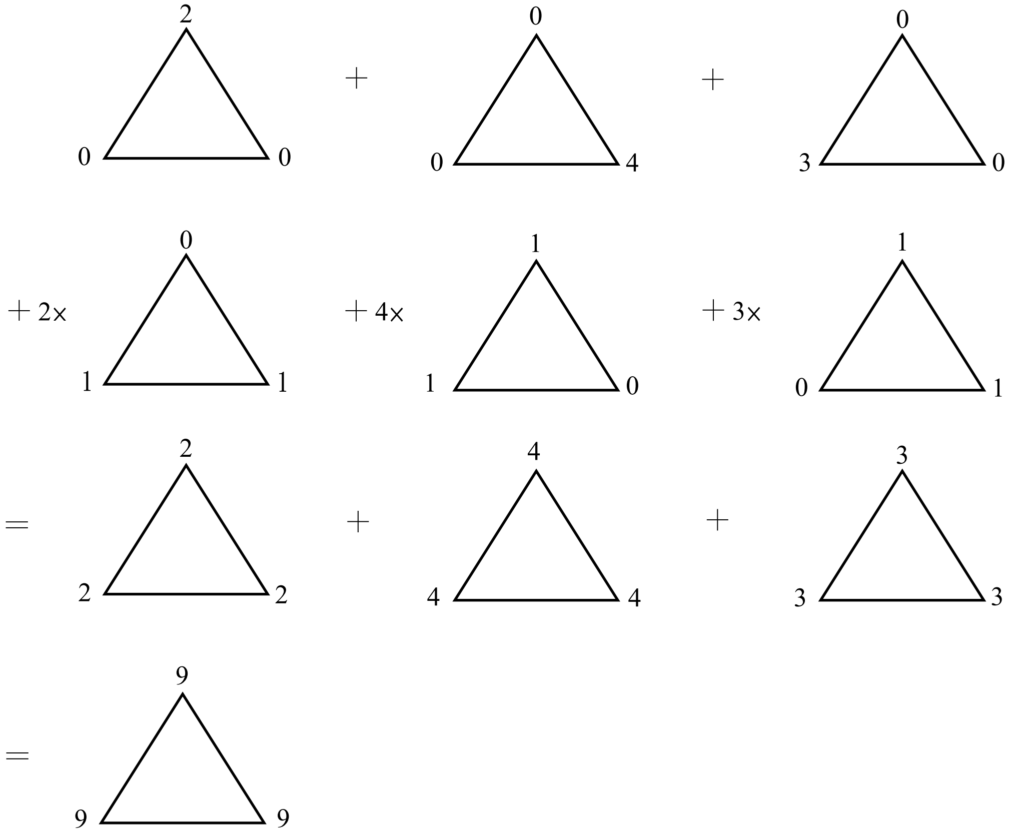
當我們點擊b_3四次時



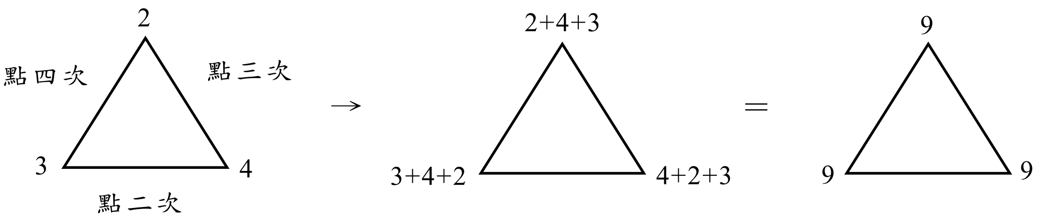
當我們點擊b_1三次時



綜上所述：

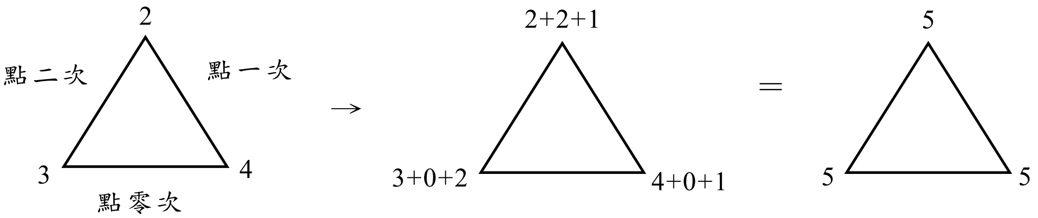


從加法交換律的觀點就是:



由此可以使點擊後每個頂點的數字為三個頂點原來數字之和。

如果將各邊點擊次數中最小者自各邊點擊次數扣去，則得下圖:



由上法，可以盡量減少點擊次數(見四，(三)，a)。

肆、問題與討論：以下試將本文問題分成三個部分討論之，即：

(一) 是否存在能使各頂點數字均相等的點擊方法?

(二) 在頂點數字已經相同情形下，達到此一數字的點擊方法是否為唯一?

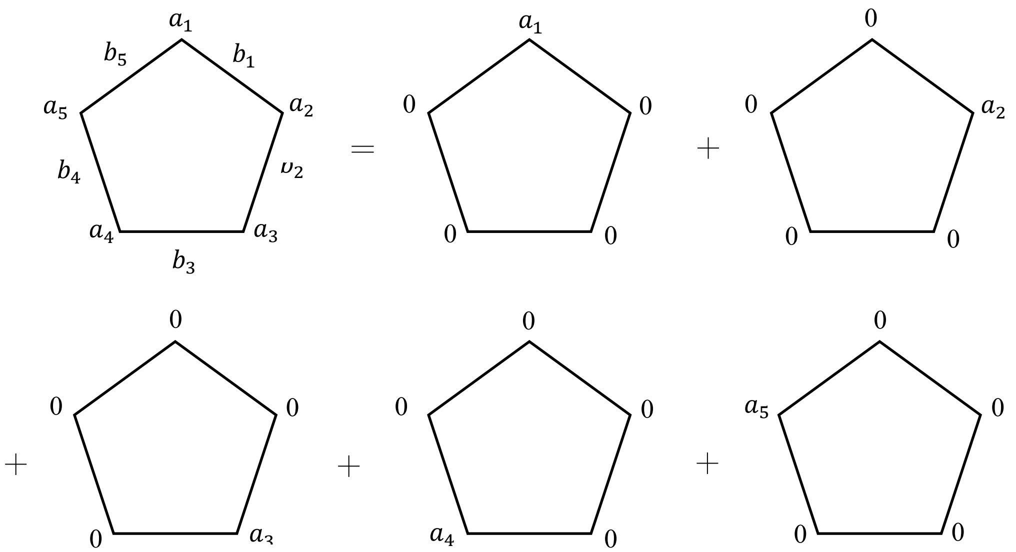
(三) 最小頂點數字，即最少點擊次數為何?

每個問題皆以奇數邊形與偶數邊形分開討論。

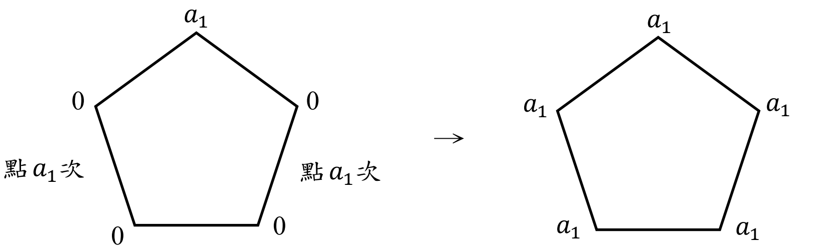
一、存在性

(a) 奇數邊形：以五邊形為例

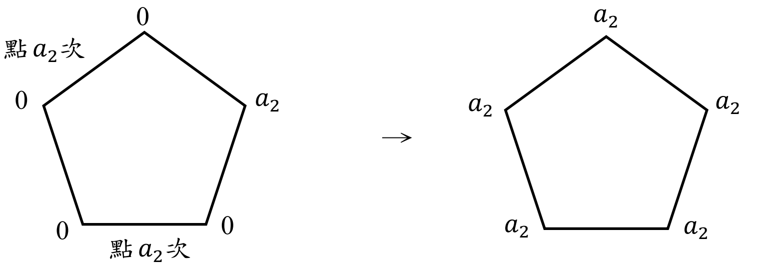
利用加法結合律，五數五邊形可以分成五個一數五邊形。

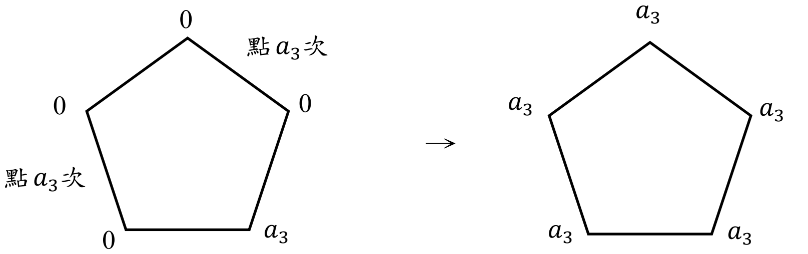


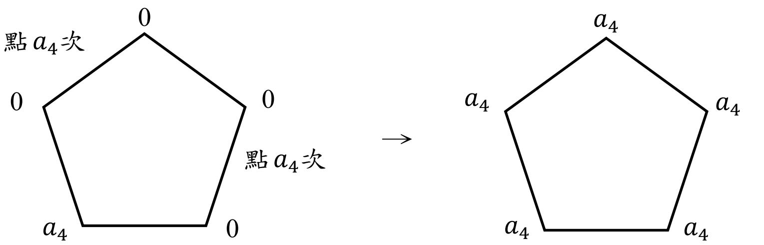
依前所述，欲使每個頂點數相等的結果必是點擊後的頂點數字為所有頂點數字之和，因此在一數五邊形中，我們需在b_2，b_4邊同時點擊a_1次，使五個頂點都會有a_1，如下所示：

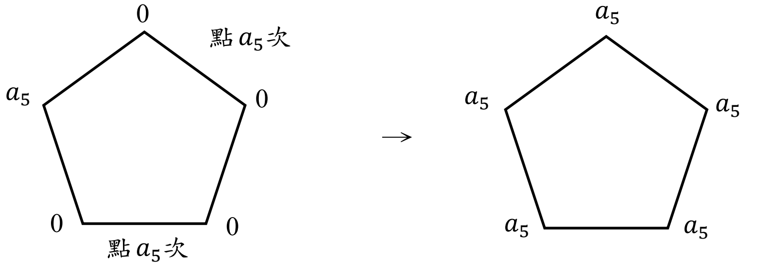

a_1
0
0
點 a_1 次
點 a_1 次
0
0
→
a_1
a_1
a_1
a_1
a_1

可依此類推到其他頂點

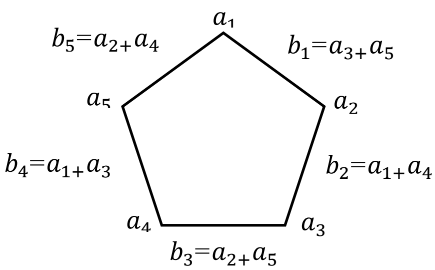

0
點 a_2 次
0
a_2
0
0
點 a_2 次
→
a_2
a_2
a_2
a_2
a_2


0
點 a_3 次
0
0
點 a_3 次
0
a_3
→
a_3
a_3
a_3
a_3
a_3


0
點 a_4 次
0
0
點 a_4 次
a_4
0
→
a_4
a_4
a_4
a_4
a_4


0
點 a_5 次
a_5
0
0
0
點 a_5 次
→
a_5
a_5
a_5
a_5
a_5

因此，對b_1邊而言，需點擊a_3加a_5次，其他各邊類推：



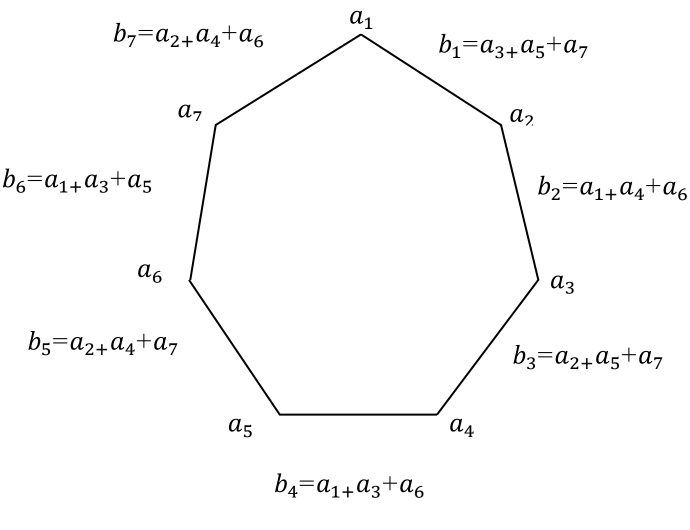
點擊完成後，就可以讓每個頂點數字均為$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$，由此可確定:雖以五邊形考量，並不失其一般性，讓奇數邊形每個頂點數相同的方法是存在的。

奇數邊形的點擊方式如上所示，我們再介紹在《歸一》文中，P13，推論 9，利用解方程式所得的演算法(algorithm)

《歸一》1. 當 n 為奇數，令b_i=$a_{i+2}+a_{i+4}$+…+a_{i+n-1}，i=1、2、…、n。若足碼超過 n，則取除以 n 之後的餘數。

在五邊形的情形中，這個演算法的內容是說: b_1=a_3+a_5，b_5=a_2+a_4，可以看出此與我們利用加法交換律、結合律得到的結果一致。

進一步我們將七邊形的結果圖示如下(證明略)：



事實上，因為要求點擊各邊後，每個頂點數字是a_1+a_2+a_3+…+a_7，所以在b_1決定後，其他邊的點擊數b_2…b_7也都會依序決定。

(b) **偶數邊形:**

偶數邊形的頂點可以分成兩類，以任一點為第一點，順時鐘編號，則依序第 1，3，5…點稱為奇點。第 2，4，6…點稱為偶點。當我們點擊一邊時，相鄰偶點的數字和奇點的數字各增加 1。因此若偶點的數字和不等於奇點的數字和時，則無論怎樣點擊，都無法使各頂點的數字變成相等。因此，此後假設在偶數邊形奇頂點的數字和需與偶頂點的數字和相等，即

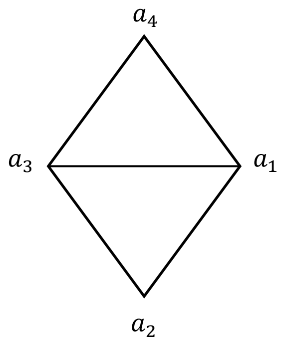
$$a_1+a_3+a_5+\cdots=a_2+a_4+a_6+\cdots$$

接下來要討論《歸一》一文 P13 推論九，對偶數邊圖形的點擊數。

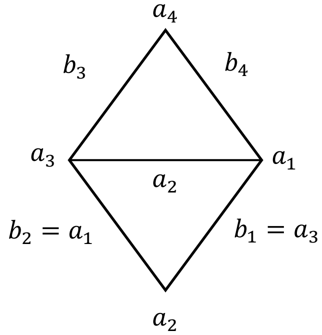
推論九 2.所給出的演算法如下(當偶數圖形奇數頂點的數字和等於偶數頂點的數字和時)：

《歸一》2. 當 n 為偶數，令$b_i=a_{i+2}+a_{i+4}+\ldots+a_{i+n-2}$，i=1、2、…、n。若足碼超過 n，則取除以 n-1 之後的餘數，其中$a_0=a_{n-1}$。

先以四邊形為例討論，四個頂點若滿足奇頂點和等於偶頂點和，即 $a_1+a_3=a_2+a_4$，則透過對奇數邊形的了解，由三邊形$a_1a_2a_3$延伸出四邊形$a_1a_2a_3a_4$，如下圖:

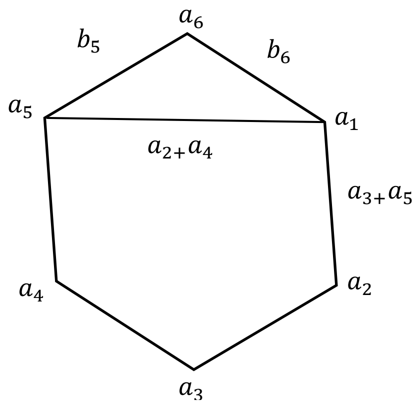


根據四、(一)奇數邊形存在性的討論，我們可以在這個三邊形$a_1a_2a_3$得到相應三邊的點擊數：



將b_3和b_4自然地令成b_3=b_4=a_2，則$b_4+b_3+a_4$=a_2+a_2+a_4=a_2+a_1+a_3，所以就滿足了頂點數都達到一致的a_1+a_2+a_3，而這就是推論九，2 關於 n＝4 的內涵。

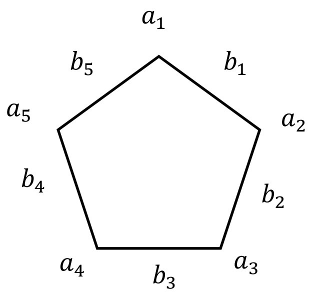
再以六邊形為例:先對下面這個五邊形$a_1a_2a_3a_4a_5$記下點擊數，並且令b_5=b_6=a_2+a_4，則$b_6+b_5+a_6$=$a_{2+}a_{4+}a_{2+}a_{4+}a_6$=$a_{2+}a_{4+}a_{1+}a_{3+}a_5$，符合頂點數均到達$a_1$+$a_2$+$a_{3+}a_{4+}a_5$。



而這就是推論九、2，n 等於 6 的內涵(請參考下面四、(二) 唯一性的討論)。

二、唯一性

(a) 奇數邊形：以五邊形為例



頂點數字a_1，a_2，a_3，a_4，a_5點擊次數b_1，b_2，b_3，b_4，b_5

若點擊b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 可以將頂點數字均變成”A”

即 $a_1+b_1+b_5$ =A，$a_2+b_1+b_2$ =A，$a_3+b_2+b_3$ =A

$a_4+b_3+b_4$ =A，$a_5+b_4+b_5$ =A

得到 A 之後，b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 的解是唯一的，才能得到同樣的 A

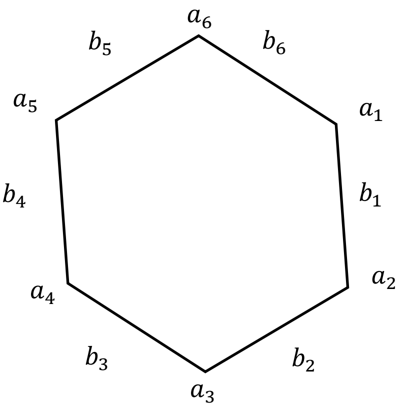
原因：因為如果b_1減 1，b_2就要加 1，b_3就要減 1，b_4就要加 1，b_5就要減 1

則 $a_1+(b_1-1)+(b_5-1)\neq$A （矛盾）

(b) 偶數邊形：

當我們確定偶數邊形奇頂點的數字和等於偶頂點的數字和時，可以求出每邊點擊次數，使頂點數字均相等。

以六邊形為例:



1. 如果偶頂點的和=奇頂點的和，則可點擊使各頂點數字均變成 A(見四、(一)，b)。
2. 顯然b_1+1，b_2-1，b_3+1，b_4-1，b_5+1，b_6-1，是另一組亦可得到 A 之解，因此通常不是唯一解(此點性質與奇數邊形不同)。
3. 如果頂點數字均為 A,並且奇數邊中有一邊點擊數=0,偶數邊中也有一邊點擊數=0，則得到 A 的點擊次數為唯一解。因為若令某一點擊數=0 的邊為b_2，b_2不能降 1，因為b_2等於 0，b_2-1為負數(矛盾)，同理，若b_3等於 0，則b_3也不能降 1，這就說明了此種情形下解的唯一性。

三、最少點擊次數

(a) 奇數邊形：以五邊形為例

在(一)存在性中,我們已經確定有一個方法可以讓每個頂點數字均為$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

在(二)唯一性中，固定 A，我們也確定達到每個頂點數字為 A 的點擊次數是唯一可能，

即 $a_1+b_1+b_5=$A，$a_2+b_1+b_2=$A，$a_3+b_2+b_3=$A

$a_4+b_3+b_4=$A，$a_5+b_4+b_5=$A

A 確定時，b_1，b_2，b_3，b_4，b_5唯一，而有下式：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+2(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)=5\text{A}$$

若有另一種點擊方式，而使頂點數字均為 A’，則有

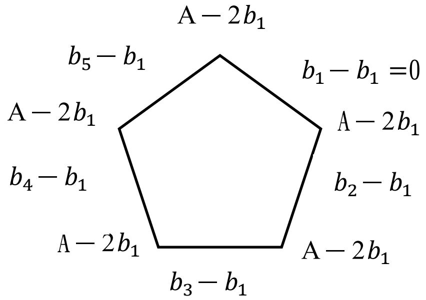
$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+2(b_1'+b_2'+b_3'+b_4'+b_5')=5\text{A}'$$

兩式相減得　$2[(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)$-$(b_1'+b_2'+b_3'+b_4'+b_5')]$ =5(A-A')

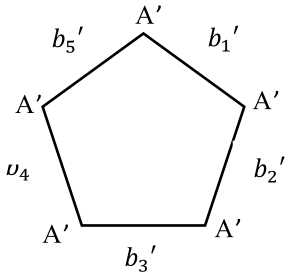
所以(A-A')一定是 2 的倍數。

注意到，達到最少點擊次數相當於得到最小頂點數字 A。

假設b_1是邊上點擊次數之最小值，我們將各邊都減去b_1，頂點數字由原來的 A 變成 A－$2b_1$



頂點數字由原來的 A 變成 A－$2b_1$ 則 A－$2b_1$必是最小頂點數字，理由如下:



若有另一種點擊方式，使頂點數字均為 A′， A′ < A－$2b_1$ ，b_1'，b_2'，b_3'，b_4'，b_5'是相關點擊次數，則必可在每邊各再點擊相同次數使頂點數字變成 A－$2b_1$。

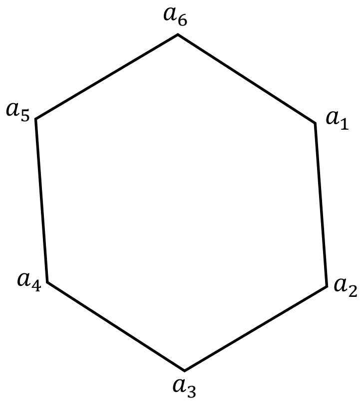
因為若在 b_1' ....b_5' 各加 1，則頂點數字變成 A′+2，但因為已知(A－$2b_1$)－A'是 2 的倍數，因此可以透過同時增加b_1' ....b_5'而達到頂點數字 A－$2b_1$。但 A－$2b_1$的點擊次數中有一邊為 0，由唯一性，A－$2b_1$不可能藉同時增加b_1' ....b_5'而得到。由此可知 A－$2b_1$ 是最小頂點數字。

任一次點擊完成後，可以選擇b_1、b_2、b_3、b_4、b_5中的最小值(假設此處的最小值為b_1)，將各邊點擊次數均扣掉b_1，變成b_1-b_1=0，b_2-b_1，b_3-b_1，b_4-b_1，b_5-b_1。這就是奇數邊形的最小點擊次數。

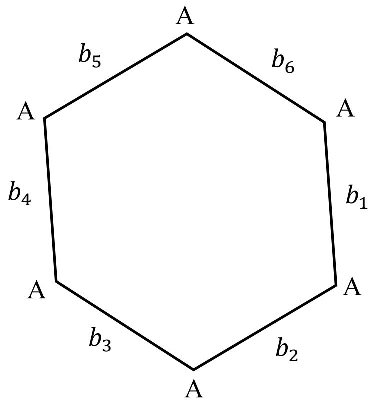
(b) 偶數邊形

在假設偶數邊形中，偶頂點和奇頂點數字和相等的情形下，得到了存在性(四、(一))

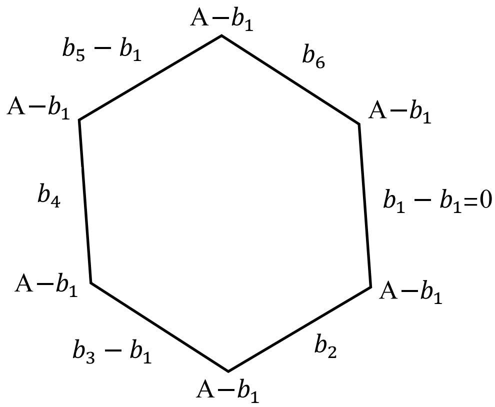
以六邊形為例，如下圖，已知a_1+a_3+a_5=a_2+a_4+a_6



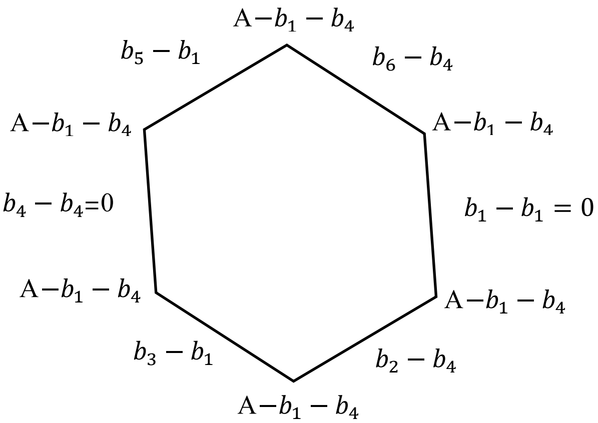
假設在各邊點擊b_1，b_2，b_3，b_4，b_5，b_6後，各頂點的數字均變成 A



現假設b_1是奇邊中的最小值，$b_1 \le b_3$，$b_1 \le b_5$，我們可將奇邊數上的b_i均降b_1，而得



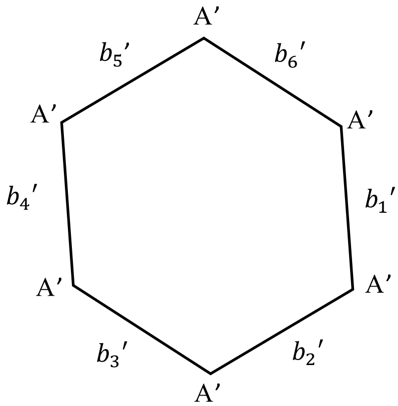
此時，頂點數字從 A 降至 A$-b_1$。不妨再設b_4是偶邊數b_2，b_4，b_6中之最小值，則可將偶邊數上的b_i均降b_4而得頂點數字 A$-b_1 - b_4$



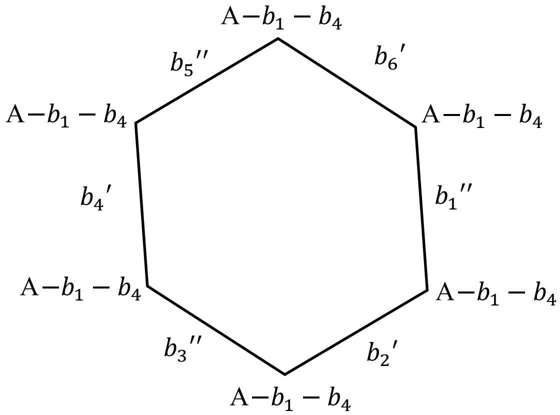
（圖三）

上圖在奇邊及偶邊中均各有一為 0，根據(四，(二)，b，3 偶數邊形唯一性的討論)，可知上圖達到頂點數字 A$-b_1-b_4$的點擊數唯一。

接下來，證明 A$-b_1-b_4$是最小可能之頂點數字，亦即相關的點擊次數為最少。



上圖為點擊次數$b_1{}'\dots b_6{}'$所得頂點數字 A′,並設 A′< A$-b_1-b_4$,則可將奇邊之$b_1{}'$,$b_3{}'$，$b_5{}'$同時增加點擊次數(A$-b_1-b_4$ $-$A′)次而將上圖變成



但b_1''，b_3''，b_5'' 均不為 0，此與圖(三)頂點數為 A$-b_1-b_4$之點擊數之唯一性違背。

伍、結論

1. 數學解題應該要注意到問題的本質，例如:在奇數邊形的時候，如果要回答存在性，應該要先想想最基本的奇數邊形(即一數多邊形)如何求解，以及一般型與基本型的關係。現在因為加法結合律和交換律，使我們運用一般奇數邊形可以分解成基本型的和，而讓問題變得清楚易懂。
2. 偶數多邊形的問題比較複雜，但是在偶頂點數字和等於奇頂點數字和的假設下，可以利用奇數多邊形過渡到偶數多邊形來找到存在性(見四，(一)，b)，另一方面當然也可以利用偶數邊形時的基本型來得到存在性，因為篇幅關係，我們省略了偶數邊形利用基本型得到存在性的討論。
3. 至於如何決定最少點擊次數，這相當於決定最小頂點數字。在奇數邊形的時候，我們要求某一邊上的點擊次數為 0 來得到最少點擊次數，在偶數邊形的時候，我們要求在奇數邊上要有某一邊的點擊次數為 0，並在偶數邊上也要求某一邊的點擊次數為 0，進而利用唯一性來說明這是最少點擊次數(詳本文四，(三))a 及 b)
4. 本文希望拋磚引玉，提供一個有別於傳統設未知數來解方程式的作法。

參考文獻

建中通訊解題第 90 期。

中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中組數學科作品「萬數歸一−圖形上點邊數字和為定值之研究」。

中華民國第 54 屆中小學科學展覽會國小組數學科作品「一擊兩得～頂點全等最小值之探討」。