結可以從數學的角度來研究嗎？

孫維民* 譚克平

國立臺灣師範大學 科學教育研究所

壹、前言

數學常給學生的印象是需要計算的，或者是需要從別人已經畫好的圖形中證明某些性質，因此對很多學生而言，數學常顯得是比較呆板的學科，而且標準答案已經掌握在教師的手中，學生僅能模仿剛學習過的方法嘗試解題，沒有實質的及趣味的探索可言。但其實數學研究的主題十分廣泛，有些研究的領域並不牽涉到煩雜的計算，學生不但可以進行探索，而且也具趣味性，在科學研究的範疇中還有很重要的應用價值。本文的目的即是嘗試從數學的角度向數學教師及學生初步介紹結的概念，希望藉此改變部分人士對數學刻板的印象，並且可以體驗略為不一樣的數學推理訓練。

貳、生活中到處可以看見結

古人結繩記事，隨著人類歷史的演進，為了處理各種生活問題，人類需要用到結的地方越來越多，結逐漸成為人類生活中的必需品，時至今日，雖然我們不再依賴結繩記事，但打結是我們既熟悉且頗為常用的技能，也是教學中不可或缺的內容。例如：水手在出海作業時需要用結來固定繩索；學生每天綁鞋帶時會打蝴蝶結；在國中綜合活動領域童軍課程裡，教師教導學生利用童軍繩打出單結、平結、8 字結等基本結。一些生活上的結可參見圖 1 和圖 2 所展示的實例。

圖 1 綁鞋帶時打的蝴蝶結

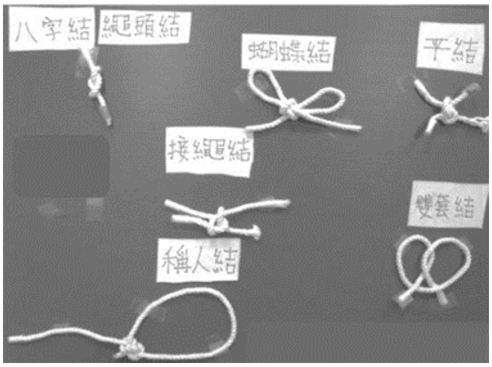

圖 2 童軍課中打的基本結

* 為本文通訊作者

觀察上述結的實例並回想打這些結的過程，可知打結通常是用一條繩子，按照一定的規則操作，且最後這條繩子的頭、尾兩端不會連結，換句話說，通常打好的結會留下頭、尾兩個端點。直觀上來看，平時隨處可見的結與數學似乎沒有很大關係，但實際上，若從基本幾何轉換的觀點來看打結的過程，則打結過程中的每個步驟，都包含許多如平移、旋轉、翻轉等幾何變換，且無論選用何種打法，所打出來的結都可以按照自身結構加以分類，故無論是好打或難打的結，從開始打到完成此結的過程與結果，實際上都隱含分類、幾何變換等核心數學概念。

雖然生活上常需要打結，但我們是否有想過生活上常見的結共有多少種？此問題早在 1953 年所出版的 The Ashley Book of Knots 一書中即有初步結果。令人驚訝的是，Ashley 依各種結的功能與打法，用文字與圖形呈現出 3854 種生活上常見的結，並以打此結的原因替這些結命名。由此可知，結在人類生活環境中可以說得上是無所不在的。有些時候，我們也常因生活實際需求，要把打好的結解開，若在不剪斷繩子等破壞結的結構的限制條件下，則解開結的方法通常有以下兩種：

1. 執行原本打這個結的相反步驟，以解開這個結。
2. 利用許多變形動作(如：扭轉、纏繞、穿越、滑動……)將繩子變形來解開結。例如：把蝴蝶結的一端輕輕一拉，即可解開此結。但請注意，我們在嘗試解開結時，通常會試著拉拉看結的各段繩子，當我們拉了許多次，但仍無法解開這個結時，並不一定代表這個結實際上就是無法解開。

參、如何從數學的角度研究結

雖然大家都會打結，且判斷結的類型與結的解開又是打結時常遇到的狀況，但卻很難用一些精確的語言來形容與分析，故是否可從數學角度對結進行研究，以瞭解其性質？答案是可以的，而且結作為數學的一個研究領域，斷斷續續也已有超過一百年的歷史。然而，生活上的結是透過物質所構成的，進行研究時需要考量繩子的厚度或材質等因素，若以研究結的性質而言，考量此等因素增加了不少研究的困難度，因此數學家研究結時，通常都不考慮繩子材質等因素，只將繩子厚度視為非常薄，並將繩子抽象化成一條線，以分析其拓樸性質。再者，雖然最後所打出的生活上的結都會有頭、尾兩端點，但數學家研究結時，通常會以兩端沒有端點的結為研究對象。我們可以這樣想，將一條繩子利用扭轉、纏繞、穿越、滑動等方式打出一個結後，再將此結的頭、尾兩端黏起來，並將其抽象化成一條線，即可將生活中所打的結轉換成數學上所研究的結，如圖 3 所示。扼要地說，數學上研究的結是三維空間中的一條簡單閉曲線(simple closed curve)，其中「簡單」是表示這條曲線自己不會跟自己相交，「閉」是表示這條曲線沒有端點。在此對圖 3

作一些解釋說明，必須注意的是，我們是在三維空間中研究結的，結的不同曲線段並沒有相交，只是會以不同形式纏繞或疊在一起，而在研究結的過程中，我們有需要將結投影或畫在平面的紙張上，但將三維空間的結畫在二維的紙張上，成為一個結圖，則該結纏繞的形式，必須以上、下線重疊的方式呈現在相對應的結圖上，為了要表示下線有一部分被上線遮蓋了觀察者的視線，通常會將下線畫成為斷裂的曲線段(見圖 3)，詳細的說明可參看以下第肆節畫結圖或鏈圖的方法。

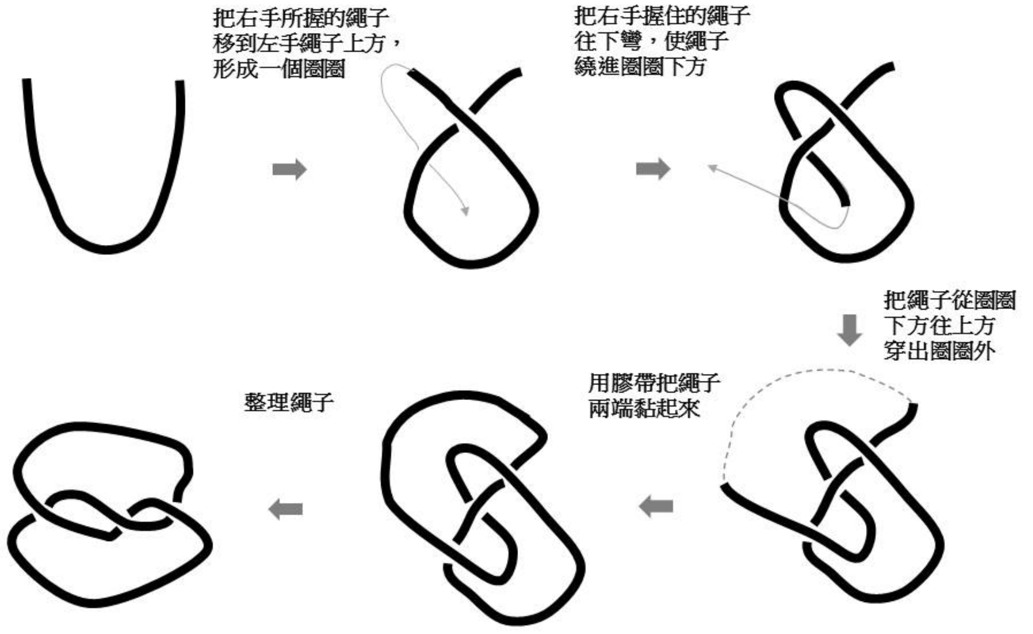

圖 3 將單結轉換成數學上研究的結的過程

無論是生活上的結或者是數學上的結，皆可用同樣的數學方法進行研究，只要在研究生活上的結時，在移動繩子的動作中，要求結的所有部分在變形時不能越過繩子的頭、尾兩端點，換言之，多了限制條件。由於探討兩者的形式非常接近，加上科學上有不少結是封閉而沒有端點的，因此數學上研究的結通常是封閉的抽象結，以增加研究的一般性，有些作者亦會稱之為數學結。因本文以下所有的討論，皆集中於數學上研究的結，為了方便起見，以下將數學上研究的結直接稱之為「結」。

如果將數個封閉的結串連起來，它就會成為一個鏈(link)。數學上定義鏈為有限個互不相交的結的集合體，其中每個結稱為這個鏈的分支(component)。將其符號化，令這個鏈為 L，每個結為 K_i，則 $L = U_i K_i$，即鏈 L 是這些不同的結的聯集，其中對任意下標 i_1、i_2，只要 $i_1 \neq i_2$，皆有 $K_{i_1} \cap K_{i_2} = \phi$，即鏈 L 中任兩個不同的分支是不相交的，在此定義下，任一個結可視為是僅有一個分支的鏈。以結 K_1、K_2 聯集成鏈 L 為例，圖 4 即為其圖形的表示方式。

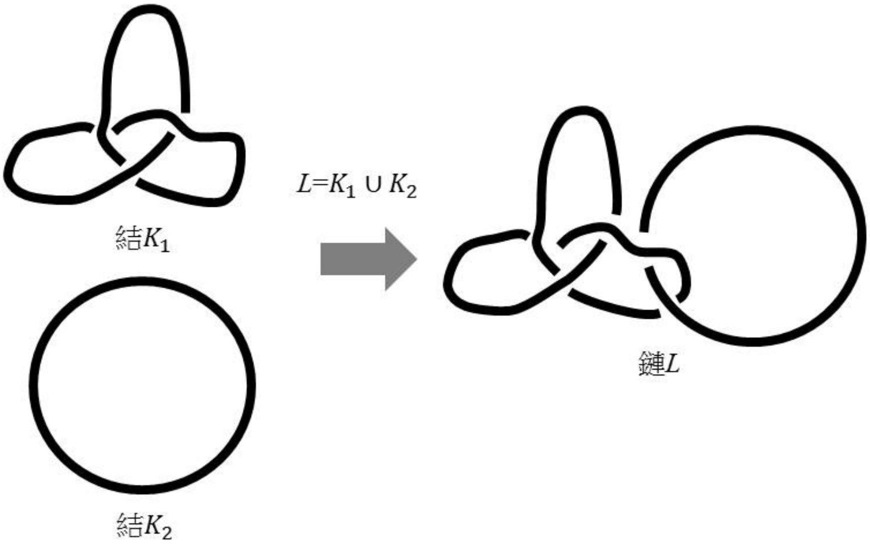

圖 4　有 2 個分支的鏈的例子

結理論(knot theory)研究的是在哪些條件下各種結或鏈可以被解開，以及用哪些方法可以有效將結或鏈分類。一般而言，將結理論應用到科學上的結時，需要賦予結或鏈一個固定方向(orientation)，但本文旨在初步介紹結的數學概念，除介紹如何用圖來表示結或鏈外，並從數學的角度探討如何判斷看起來不一樣的結是否具有相同結構，以及如何用圖記錄結變形的過程，故本文並不考慮結的賦向。

肆、畫結圖或鏈圖的方法

有些時候，一張圖可代表千言萬語。因研究需要，數學家在研究結或鏈的時候，常利用圖表示結或鏈及其變形過程，我們稱這些圖為結圖(knot diagram)或鏈圖(link diagram)，兩者的畫法類似。以結為例，結是三維空間的一條簡單閉曲線，我們要如何把它畫在二維的紙張上？數學家是透過投影，以及適當選擇表示上、下兩條曲線段相對位置關係的呈現方式，進而將三維空間的結畫在二維空間的紙張上，所畫出的圖形即為結圖。假設我們從某一方向觀察一個結，會因為上、下兩條曲線段相對位置的不同，導致結有一部分曲線段看起來好像在某些點相交，但實際上這些曲線段是不相交的，只是因下方曲線段位置的視線受上方曲線段阻擋而產生此錯覺。若我們將結的上方曲線段用實線表示，下方曲線段用斷裂開的曲線段表示，其中表示上、下曲線段位置關係的地方，稱之為交叉點(crossing point)，亦可稱為一個跨越(crossing)。在不失一般性的情況下，我們可以選擇適當的投影方向，使結圖中的各交叉點皆是由兩條曲線段所形成，且能表示這兩條曲線段的上、下位置關係。例如，A 是某結圖中的一個交叉點，且是由甲、乙

兩曲線段所形成，則甲、乙兩曲線段的上、下位置關係可能會有兩種情況，如圖 5 所示。為了方便閱讀，圖中已加入灰色小圓點以突顯 *A* 點的位置。請注意，初學者常會誤會結是指結圖中的交叉點，實際上整個結圖代表的是一個結。

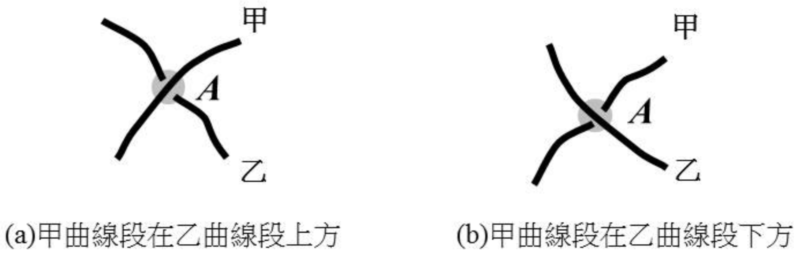

圖 5　甲、乙兩曲線段的位置關係

結圖中許多彎彎曲曲的線段，是結圖的另一個構成要素。如何定義這些曲線段？想像某人從某交叉點出發，沿此交叉點下方曲線段開始走，至另一個交叉點下方曲線段停止，途中所經過的路徑定義為弧(arc)。例如：圖 6 中的結圖共有 *A*、*B*、*C* 三個交叉點與三段弧，為了方便閱讀，分別以黑、灰、淺灰三色粗細不一的曲線段表示這三段弧。

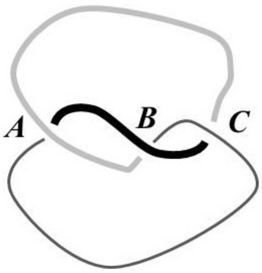

圖 6　弧與交叉點

有了上述兩個符號，我們以五星結為例子，列舉在紙上畫出五星結的結圖的步驟如下：

1. 任取適當視線方向，畫出沿此方向所看到的五星結影像，我們稱所畫出的圖為五星結的影子(shadow)，如圖 7 所示。(註：因為上、下弧的相對位置關係，所以此圖所呈現的結影像中，某些弧看起來好像是相交的)。

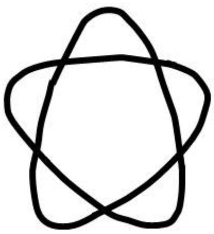

圖 7 五星結的影子

2. 依視線方向所看到五星結中各弧的相對位置，分別選擇圖 5(a)或 5(b)中的交叉點表示方式來取代圖 7 中各個交點後，可將圖 7 轉換成圖 8，我們稱圖 8 是五星結的結圖。

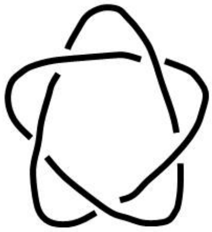

圖 8 五星結的結圖

用同樣的方法，我們也可以在紙上畫出鏈圖。必須注意的是，若給定一個看起來像結或鏈的圖時，必須藉由結或鏈的定義來判斷此圖所代表的是結還是鏈，且以結為例，若選擇不同視線方向觀察此結，可依上述步驟畫出不同的結圖，這些看起來不同的結圖實際上代表的是同一個結。但相反地，在研究實務上常需要依給定的結圖，從中探索其所代表的結的性質，故若給定兩個結圖，我們該如何判斷它們是否表示同一個結？這是結理論的一個重要研究主題。

伍、結理論中一些常用名詞及概念

按照數學上對結的定義，結是沒有端點的，即使欲研究的結是從生活上的結抽象化而來，也不能用執行打此結的相反步驟來解開這個結。數學上是以分類的觀點來解釋解開結的概念，並將解開結定義為一個結經由不破壞結構的變形動作後，能變形成沒有交叉點之簡單樣式的結，即視為解開這個結，而沒有交叉點的結通常稱之為顯然結或非結(詳見以下第 4 點)。若要給出更精確的定義，則需要運用結理論中一些進一步的概念來解釋，故以下先介紹結理論中的交叉點數(crossing number)、Reidemeister 移動(move)、同痕(isotopy)、雙向性(amphicheirality) 等名詞的定義，以及一些基本結的類型後，再說明如何運用這些概念來解釋兩個結是否相等以及解開一個結的意涵。

一、交叉點數

給定一個結，對於此結的任何一個結圖，皆可計算其交叉點個數總和。由於一個結可以畫出許多不同的結圖，而不同結圖的交叉點個數可能會不同，因此可找出這些交叉點個數總和中最小的數值，稱為此結的交叉點數。若用數學的符號表示，令此結為 K，D 為 K 的某一個結圖，若 $C(K)$為此結的交叉點數，$C(D)$為此結圖的交叉點個數，則 $C(K)=\min_{D} C(D)$。更詳細的說明，可參考 Adams(1994)書中第三章相關內容的說明。

二、三型 Reidemeister 移動

在研究結與結圖的時候，我們需要用到纏繞、旋轉、滑動等變形動作，但這些都是用直觀的語言來描述的動作，在結理論中，則是透過三型 Reidemeister 移動來探討結圖變形的過程，這三個移動可以局部改變結圖的形狀，甚至改變結圖中交叉點個數與上、下弧線位置的關係(Kauffman/謝春忠譯，2001；姜伯駒，2011)，茲進一步對此三種基本移動動作說明如下，而且為了方便閱讀，圖 9、10、11 中呈現某結圖局部移動前與移動後的情況，且與 Reidemeister 移動相關的交叉點均加入灰色小圓，以突顯結圖局部經過某類型 Reidemeister 移動後，其所改變的交叉點位置。

(1) 第一型 Reidemeister 移動針對的是將結圖中某段弧進行纏繞的動作，或者是將結圖中原本已纏繞的某段弧變形使其不纏繞的情況，如圖 9 所示。此移動動作的效果，是將原結圖增加或減少一個交叉點。

圖 9　第一型 Reidemeister 移動(R1)

(2) 第二型 Reidemeister 移動針對的是當需要將結圖中的某段弧移動到另一段弧的上方(或下方)，或者是結圖中的某段弧原本即在另一段弧的上方(或下方)，卻要將此弧移動使其與另一段弧分開的情況，如圖 10 所示。此移動動作的效果，是將原結圖增加或減少兩個交叉點。

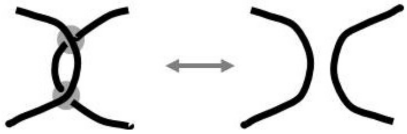

圖 10　第二型 Reidemeister 移動(R2)

(3) 第三型 Reidemeister 移動針對的是將結圖中的某段弧跨越一個交叉點、並滑動至另外兩段弧上方(或下方)的情況，如圖 11 所示。此移動動作的效果，是將原結圖的兩個交叉點移位。

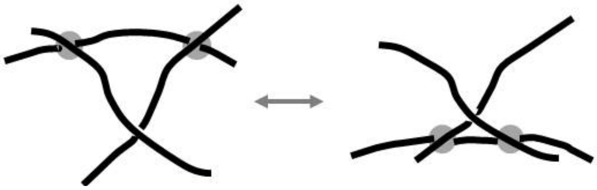

圖 11　第三型 Reidemeister 移動(R3)

前述三型移動通常簡稱為三個 R 移動。

三、同痕

在不能破壞結的結構的限制條件下，將某個結的部分弧線段經由前述的變形動作後，若能變形成另一個結，則稱這兩個結同痕，也可說這兩個結相等(或等價)。數學上定義兩個結相等，是指這兩個結之間存在一個保賦向同胚變換(orientation-preserving homeomorphism)，但此定義對於初步接觸結卻沒有拓樸學背景的讀者而言，會過於抽象，故本文選擇以非正式但較為直觀的方式，直接以一個結經由連續變形(例如:經過一連串但有限次的 R 移動)後，能變形成另一個結之非正式定義，來說明這兩個結相等(Murasugi, 1996)。但即使在此非正式定義下，仍然很難具體判斷兩個結是否相等，故在結理論中，通常會利用這兩個結的結圖是否相等來判斷其所代表的結是否相等，之所以可以如此判斷是根據 Reidemeister 定理的結果而得，該定理的要旨是說：若 K_1、K_2 是兩個結，D_1、D_2 分別為它們的結圖，則 K_1、K_2 相等的充分必要條件是 D_1 可經由一連串有限次的移動組合變形成 D_2 (Reidemeister, 1927; 引自 Manturov, 2004)，且在變形過程中，D_1 的各個交叉點的類型與數量可能會改變，如圖 12 所示。

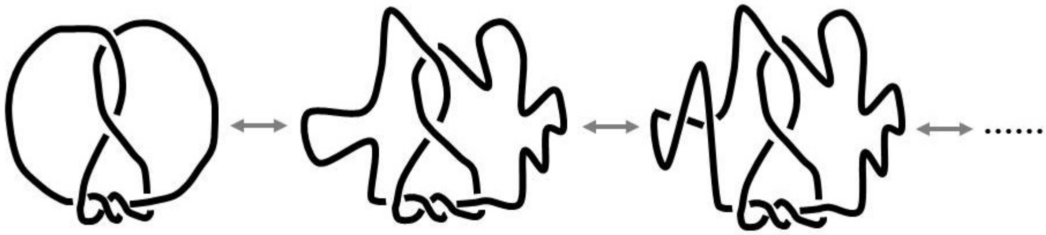

圖 12　D_1 結圖的部分變形過程

若 D_1、D_2 兩結圖間存在有限次移動組合的變形關係，且利用此變形關係，可將 D_1 變形成 D_2，則稱 D_1與D_2 相等。我們可以根據 Reidemeister 定理，藉由判斷 D_1、D_2 兩結圖是否相等來判斷它們所代表的結是否相等。

四、雙向性

結的雙向性是探討結與其鏡中影像兩者之間的關係。今將一個平面鏡垂直置放在桌面上，並將一個結 K 放到平面鏡前，若有一位觀察者站在鏡前，並以水平方向觀察此結，會看到鏡後呈現另一個結 K^*，它是結 K 在鏡中的影像，亦稱為結 K 的鏡像(mirror image)。結 K^*與結 K 具有對稱的關係，由於站在鏡前的觀察者所看到結 K 與結 K^*的各交叉點，皆是由兩條弧線段的前後相對位置所形成，但結 K^*中形成各交叉點的兩弧線段前後相對位置，會與結 K 中相對應的兩弧線段位置前後顛倒，如果結 K 與結 K^* 相等，則稱結 K 為雙向結。該如何判斷一個結是雙向結?我們通常是利用結 K 與結 K^*的結圖進

行討論。我們可把平面鏡想像成一張紙，並將結 K 沿水平方向投影的結圖畫在這張紙上，將所畫出的結圖稱為 D，然後再將 D 中的每個交叉點的前、後弧線段的位置互作交換後，形成一個新的結圖 D^*。基於對稱的原理，結圖 D^* 可視為是結 K^* 的結圖；接著，我們再由判斷 D 與 D^* 是否相等來判斷此結是否是雙向結。建議讀者可參考以下第 5 點對三葉結的說明後，再判斷圖 14 中的兩個結圖是否相等，換句話說，即是判斷三葉結是否為雙向結。

五、一些基本結的類型

為了幫助讀者進一步了解前述的概念，以及方便閱讀下文其他討論的內容，我們在此先介紹一些基本結和它們部分的性質。正如同生活上常見到的結一般，數學上的結其種類亦成千上萬，茲僅以交叉點數為 0、3、4 的基本結為例，分別介紹如下。

(1) 顯然結或非結(trivial knot or unknot)－交叉點數為 0

顯然結是外型如同圓圈，且結構最簡單的一種結。一個結經過連續變形後，若能變形成如同圓圈般的簡單圖形，則這個結與顯然結相等。我們可以用不同結圖來表示許多與顯然結相等的結，例如：圖 13 中有甲、乙、丙、丁、戊、己六個結圖，其中甲結圖代表顯然結，乙、丙、丁、戊、己五個結圖所代表的結皆與顯然結相等。

也許有部分讀者一開始看到圖 13 時會產生疑惑，這些結圖明明看起來並不相同，為什麼乙至己結圖所代表的結都與顯然結相等？於此，建議讀者直接找一條橡皮筋或封閉的線圈，分別做出乙至己結圖所代表的結後，再進行一些弧線段的移動及扭轉等動作，應可明瞭其中奧妙。

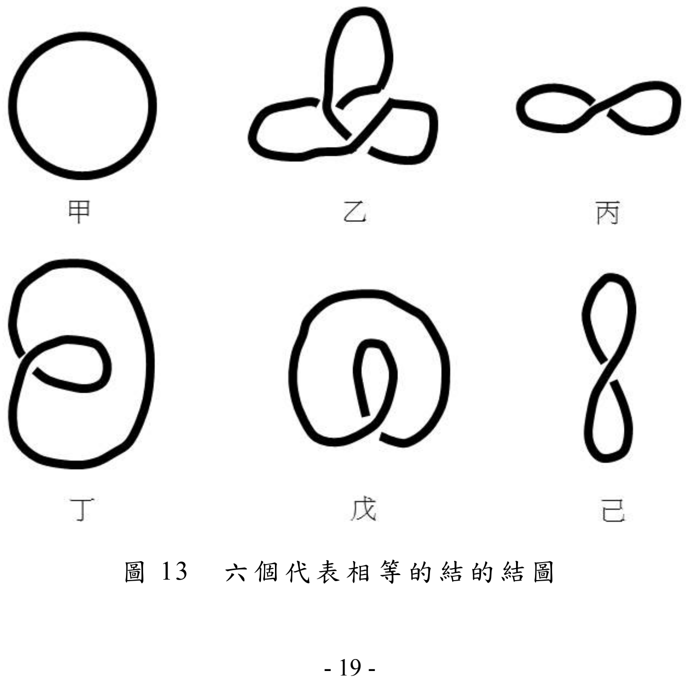

圖 13　六個代表相等的結的結圖

(2)　三葉結(trefoil knot)－交叉點數為 3

三葉結是結中除了顯然結外，交叉點數最少的一種結，且學者 Max Dehn 在 1914 年已證明出三葉結與其鏡像並不相同，由此可知三葉結不是雙向結，兩個結的結圖如圖 14 所示。讀者可以試著探索看看，是否可以透過旋轉、移動等變形動作，將圖中左邊的結圖變形成右邊的結圖？

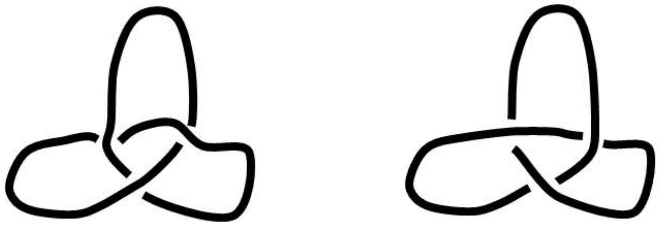

圖 14　三葉結與其鏡像的結圖

(3)　8 字結(figure-eight knot)－交叉點數為 4

8 字結是一個雙向結，而在所有雙向結中，8 字結是交叉點數最少的雙向結，其結圖如圖 15 所示。讀者可以試著探索一下，看看 8 字結與其鏡像是否相等？

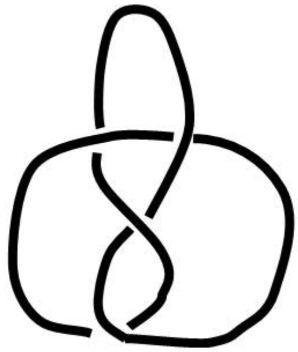

圖 15　8 字結的結圖

陸、應用

本節我們將集中討論如何應用三型 R 移動將一結圖變形成另一結圖，藉以判斷這兩個結圖是否相等。以某結圖為例，當我們將此結圖變形時，其過程是經由一連串 R1、R2、R3 的移動組合而成，如何用圖表示此過程?我們可依序依此移動組合，在結圖之間的粗箭頭上方，寫下前一個結圖是經由哪種移動而變形成後一個結圖，並分別畫出所有經過 Reidemeister 移動後的結圖，以呈現出結圖間的變形過程，如圖 16 所示。

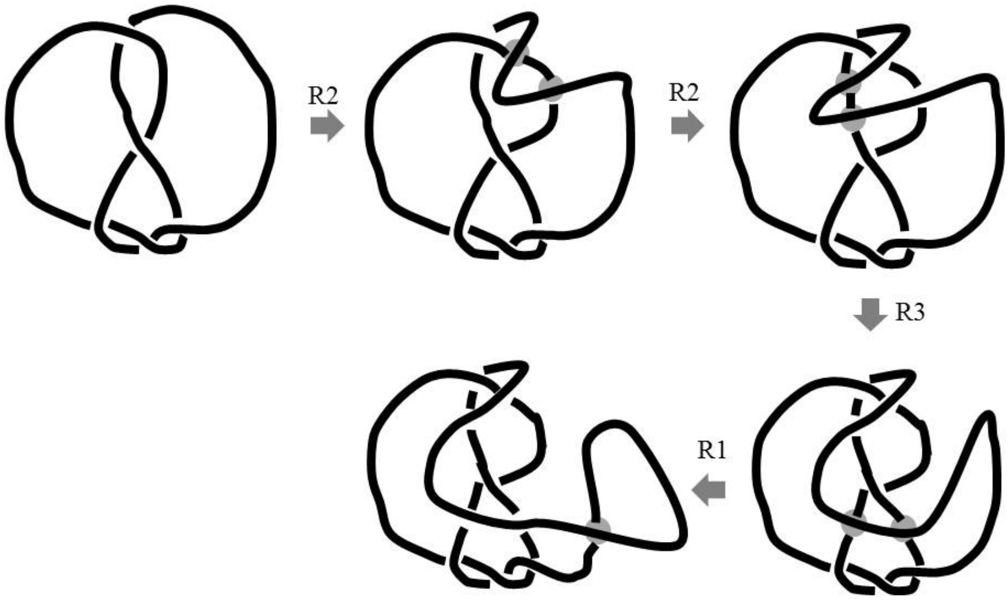

圖 16　以一連串 Reidemeister 移動組合表示某結圖的變形過程

以下示範如何運用一連串的 Reidemeister 移動組合來判斷兩個結圖是否相等，問題如下：

問題：圖 17 中有兩個結圖，試判斷它們是否相等?

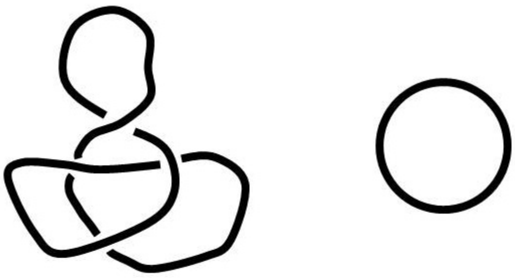

圖 17　兩個結圖

參考解答：若可找出一連串 Reidemeister 移動組合，使得圖 17 中左邊的結圖變形成為右邊的結圖，則可說這兩個結圖是相等的。若小心觀察圖形，先判斷哪些交叉點可經由哪一型 Reidemeister 移動而簡化，經嘗試後，其中一解可經過以下一連串 Reidemeister 移動的動作後，變成顯然結結圖，其結圖變化過程與結果如圖 18 所示，因此可判斷這兩個結圖相等。同樣，此處為了方便閱讀，圖 18 中加入灰色小圓，以突顯各結圖在經由一次 Reidemeister 移動後，所減少的交叉點位置。

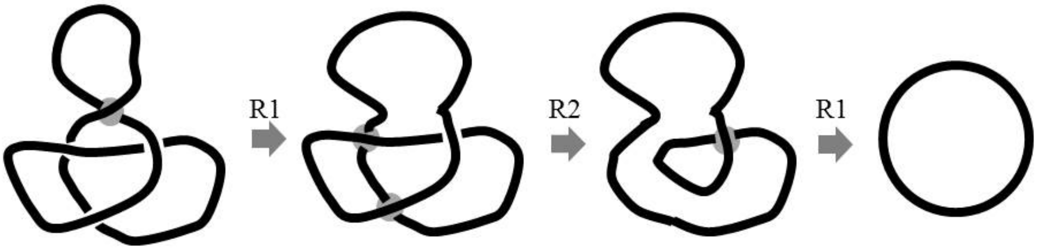

圖 18　原結圖經過一連串 Reidemeister 移動的變形過程

接下來，本文將解開結的問題視為一個數學問題。數學上而言，一個結能否被解開，即是指這個結能否經由纏繞、穿越等變形動作後變成顯然結，或更具體說，是指這個結的結圖能否經由有限次 Reidemeister 移動組合後，變成顯然結的結圖。從分類的角度觀之，即是指是否能將此結與顯然結歸為同一類。對於某些結圖而言，或許讀者容易一眼即可看出它們是否代表顯然結，但許多結圖並無法一眼看出，必須透過實際用繩子操作，或用 Reidemeister 移動測試，甚至用更高等的數學方法才能判斷。例如：讀者可試著判斷圖 19 所代表的結是否為顯然結？

圖 19　很難判斷是否代表顯然結的結圖

柒、對結進行數學推理

學習數學最好的方式就是從做中學，即透過解相關概念的題目來增加對該概念瞭解。經上述對結的初步介紹後，我們希望讀者亦能藉由 DIY 的方式，並根據相關概念的數學定義，親自感受結的奧妙及其數學性質。因此以下再提供五道題目讓讀者動手操作與思考。

問題 1. 證明若一個結的某一個結圖的交叉點個數為 2，則此結必為顯然結。

問題 2. 圖 20 是某交叉點個數為 2 的結圖或鏈圖的一部分，其中一些弧線不見了，在交叉點個數維持不變的限制條件下，老師請小華畫出完整的結圖或鏈圖，試回答下列問題：

(1) 小華共可畫出幾個圖？

(2) 小華所畫出的每個圖各代表的是結還是鏈？若是結，則這個結是顯然結嗎？

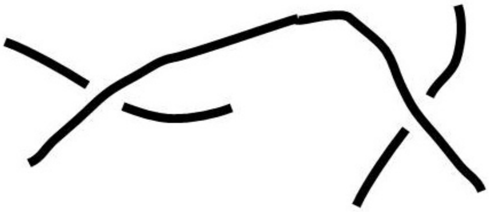

圖 20　交叉點個數為 2 的結圖或鏈圖的一部分

問題 3. 判斷圖 21 中的兩個圖各代表的是結還是鏈？

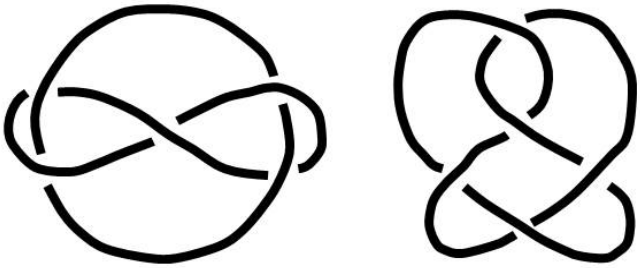

圖 21　兩個代表結或鏈的圖

問題 4. 圖 22 是某個結或鏈的影子，若圖中各交點分別是圖 5 所介紹兩種交叉點中的其中一種，求此圖共可變化成幾個結圖？幾個鏈圖？

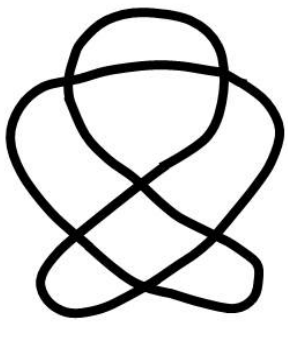

圖 22　某個結或鏈的影子

問題 5. 判斷圖 23 中的兩個結圖所代表的結是否相等。

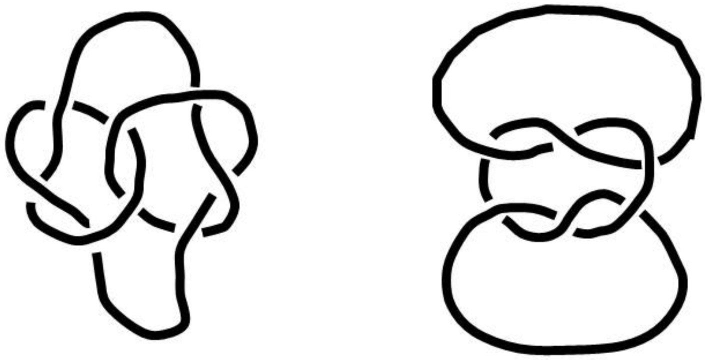

圖 23　兩個結圖

捌、結語

上文對結的介紹中指出，在不能破壞結的結構的條件下，藉由繩子具體操作打結步驟、並將兩端點黏合起來的動作，即可巧妙地將一個生活上開放的結變形成一個封閉的結，也以數學分類觀點說明解開結與兩個結相等的概念。每個結可以有很多不同的結圖，且藉由三型 Reidemeister 移動的組合，這些結圖實際上是相等的。因此要判斷兩個結是否相等，只要分別從這兩個結的許多結圖中各取出一個結圖，並判斷這兩個結圖是否相等即可。雖然結或鏈的數學定義比較簡短，且可用 Reidemeister 移動的組合來判斷兩個結圖是否相等，但若讀者動手實作或以 Reidemeister 移動來處理上述五個問題後，或許會發現困難重重。按照我們的經驗，以 Reidemeister 移動的組合來判斷兩個結圖是否代表同一個結時，通常會比想像中複雜許多，可能原因如下：

1. 如果選擇不同視線方向，從一個結可以畫出很多長相不一樣的結圖，故雖然結圖可以幫助我們瞭解原來的結的一些特性，但也可能因此而造成困擾，例如：圖 24 中所呈現的三個結圖，其交叉點數量分別是 4、4、5，但它們所代表的結相等嗎?

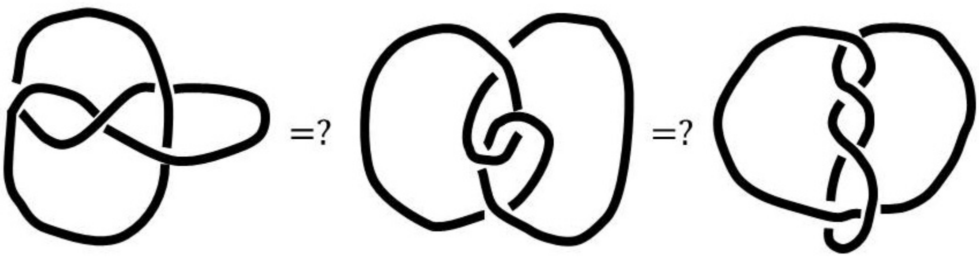

圖 24　看起來好像代表三個不同結的結圖

2. 雖然我們可將一個結圖經由一些 Reidemeister 移動的組合進行變形，並觀察是否能變成為另一個結圖，以判斷其所代表的兩個結是否相等，但當我們嘗試了許多次之後，發現仍然無法變成我們所想要的結圖時，並不意味著下一次的移動無法達到我們的目標。這就類似於舉多個例子是數學解題時會用到的一種策略，但卻不足以形成一個證明的道理一樣。這反映出以結的數學定義或結圖變形等基本方法研究結時，是有困難的，但反映出其挑戰性，也反映出需要用更進一步的數學方法來研究結。

最後，我們提出一些可以進一步思考結的方向，供讀者做進一步的思考和探討，而且建議有興趣的讀者可閱讀參考資料中列舉的文獻。

1. 在任一個結變形的過程中，有時常可用許多效率較高的變形方法(例如：可將結的某段弧穿越另一段弧後，再同時跨越數段弧與翻轉)來解開這個結，但數學家利用 Reidemeister 移動的組合來記錄結圖變形過程，其原因為何？
2. 除了以 Reidemeister 移動的組合來判斷兩個結是否相等外，有沒有其它數學方法可以判斷兩個結是否相等？
3. 為何數學家要研究沒有端點(即封閉)的結，而不是研究一般有端點(即非封閉)的結？是否是因為封閉結的特性都可以應用在非封閉的結上？還是有其他原因？

＊解題方向提示

問題 1. 畫出交叉點個數為 2 的結圖，並試著用三型 R 移動，判斷是否可變形成顯然結的結圖。

問題 2.

(1) 在交叉點個數為 2 的條件下，分別連結各段弧，並計算所能畫出圖的總數量。

(2) 若是此圖代表的是結，則任選圖上的某個點出發，依同一個方向沿著圖中的弧線走，最後會走回原出發點，且會經過圖中所有的弧線。

問題 3. 任選圖上的任一點出發，並沿著同一方向走，若是此圖代表的是結，則最後會經過所有的弧線並回到原出發點，若代表的是鏈，則最後雖然會回到原出發點，但卻不會經過圖中所有的弧線。

問題 4. 由於每個交叉點有兩種可能，故算出所有可能的方法數後，再分別用問題 3 的想法判斷每個圖代表結或是鏈。

問題 5. 將左邊的圖分別以數次三型 R 移動組合進行變形，以判斷可否變形成右邊的圖。

參考文獻

姜伯駒(2011)。**繩圈的數學**。遼寧省大連市：大連理工大學出版社。

Kauffman, L. H. (2001)。結(1)(謝春忠譯)。**數學傳播**，**25**(2)，20-29。

Ashley, C. W. (1953). *The Ashley book of knots*. Garden City, New York: Doubleday & Company, Inc.

Adams, C. C. (1994). *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York: W.H. Freeman and Company.

Kawauchi, A. (1996). *A survey of knot theory*. Berlin: Birkhäuser.

Murasugi, K. (1996). *Knot theory and its applications* (B. Kurpita, Trans.). Berlin: Birkhäuser.

Manturov, V. (2004). *Knot theory*. Washington, D.C.: CRC press.