奇妙的分堆問題

李逸修[1] 凃皓瑋[1] 詹捷宇[1] 朱亮儒[2*]

[1]國立臺灣師範大學附屬高級中學

[2]國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

「數列」是中學數學課程中重要的一環，它在日常生活中有許多奧妙及實際的應用(陳東賢，2011；Liu，1968；Lovasz 等，2003)，尤其是具有規律的遞迴數列，如：費氏(Fibonacci)數列、卡特蘭(Catalan)數列、等差數列、等比數列等(張福春等，2009、2010)。我們知道：將正整數全部放在同一堆時，就可以從中挑出無限多種無窮等差數列，也可以挑出無限多種無窮等比數列。在本文中，我們試著將所有正整數分堆，看看能否讓每一堆中都不再有無窮等差(或等比)數列；欲達此目標，基本原則就是要拆散所有可能的等差(或等比)數列，即每一個等差(或等比)數列不能放在同一堆當中。本文的目的是希望讀者能熟悉一種組合學上用來計數的重要原理：「一一對應」(one-to-one correspondence)，並能用它來解決此一有趣的分堆問題。

當兩個集合的元素可透過一對一且映成的函數來對應時，就稱這兩個集合「可一一對應」(王子俠，1986)。「一一對應」可作為集合的分類之用，例如：在實數系中，正整數、整數、有理數等都可一一對應，它們歸屬同一類，稱為「可數集」，而無理數與實數等則歸屬另一類，稱為「不可數集」(Lipschutz，1999)。透過一一對應的技術及巧妙建構的精髓，我們將證明：『可以將所有正整數分成 k 堆($k \ge 2$)，使得每一堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。』更進一步的，對正有理數的分堆問題，我們也得到了相同的結果：『可以將所有正有理數分成堆($k \ge 2$)，使得每一堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。』

貳、正整數的分堆

正整數 $1,2,3,4,5,\cdots$ 是公差 1 的無窮等差數列，如果要找出一個子數列，使其成為公差 d 的無窮等差數列，顯然，數列 $p,p+d,p+2d,p+3d,\cdots$ 就是一個例子，其中， p,d 都是正整數。如果要找出一個子數列，使此數列中不會含有以 d 為公差的無窮等差數列，也不難，例如：數列 $p,p+d,p+3d,p+7d,p+15d,\cdots$ ，其一般項 a_n 滿足： $a_1=p$ 且

* 為本文通訊作者

$a_n + a_1 = 2a_{n-1} + d > 2a_{n-1}$。但如果要找出一個子數列，使此數列中不會含有以 d 為公差的無窮等差數列，又要使其餘的數也不會含有以 d 為公差的無窮等差子數列，就不是那麼容易構造出來了。解決此問題的基本策略是：『從公差為 d 的所有可能等差數列中，各取出一數，並使這些被取到的數無法形成公差為 d 的無窮等差數列。』在正整數中，公差為 d 的所有可能等差數列可以依序列舉如下：

$$1, 1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d, \cdots \qquad (\text{首項 } 1\text{、公差 } d)$$
$$2, 2+d, 2+2d, 2+3d, 2+4d, \cdots \qquad (\text{首項 } 2\text{、公差 } d)$$
$$3, 3+d, 3+2d, 3+3d, 3+4d, \cdots \qquad (\text{首項 } 3\text{、公差 } d)$$
$$4, 4+d, 4+2d, 4+3d, 4+4d, \cdots \qquad (\text{首項 } 4\text{、公差 } d)$$

又三正整數 a,b,c 成等差的充要條件是 $b-a=c-b$ 即 $c=2b-a$。因此，只要 $c>2b$，則 a,b,c 就不是等差數列。於是，可在第一組「首項 1、公差 d」的數列中任取一數 a_1；在第二組「首項 2、公差 d」的數列中任取一數 $a_2 > 2a_1$；在第三組「首項 3、公差 d」的數列中任取一數 $a_3 > 2a_2$；依此過程，即可得到數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$，此數列不會含有以 d 為公差的無窮等差數列。又因為公差為 d 的所有可能之無窮等差數列各有一數出現在數列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 中，因此，扣除此數列後，其餘的數再也不會含有以 d 為公差的無窮等差數列。透過上面所述的基本思維，我們在本單元中想探討的問題是：

『是否可以將所有正整數分成兩堆，使得：這兩堆中都不存在無窮等差數列？』

首先，我們需要以下的引理：

【引理一】 正整數與坐標平面上第一象限的格子點一一對應(格子點是指 x 與 y 坐標都是整數的點)；即存在一對一且映成的函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}$ 表正整數集合。

【證】 函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可依以下的對應方式定義：

$1 \to (1,1)$

$2 \to (2,1)$,　$3 \to (1,2)$

$4 \to (3,1)$,　$5 \to (2,2)$,　$6 \to (1,3)$

$7 \to (4,1)$,　$8 \to (3,2)$,　$9 \to (2,3)$,　$10 \to (1,4)$

$11 \to (5,1)$,　$12 \to (4,2)$,　$13 \to (3,3)$,　$14 \to (2,4)$,　$15 \to (1,5)$

……………

事實上，二項式係數 $C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4, \cdots$ 是一遞增數列，其中 $C_2^1 = 0$ 且 $C_2^k = \dfrac{k(k-1)}{2}$，因此，對任意正整數 n，必存在唯一的正整數 k 使得 $C_2^k < n \le C_2^{k+1}$；此時，n 位在上面第 k 群的對應中。若令 $d = n - C_2^k$，則函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 即可定義為 $f(n) = (k-d+1, d)$，其中 $n = C_2^k + d = \dfrac{k(k-1)}{2} + d$，$k \in \{1,2,3,\cdots\}$，且 $d \in \{1,2,\cdots,k\}$。

與正整數集 ℕ 可一一對應的集合稱為「可數集」(countable set)，例如：整數集、偶數集、奇數集及第一象限上的格子點集 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 都是可數集。為了方便，我們設 $\langle p,d\rangle$ 表示首項 p、公差 d 的無窮等差數列： $p, p+d, p+2d, p+3d,\cdots\cdots$ 。

【定理一】 可以將所有正整數分成兩堆 A,B ，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等差數列。

【證】 設 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是由引理一所得到的一對一且映成函數。由此我們定義正整數數列 $\langle a_n\rangle$ 如下： $a_0=1$ ，且對 $n=1,2,3,\cdots$ ，當 $f(n)=(p,d)$ 時，令

$$a_n=\min\left\{\, p+md \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } p+md>2a_{n-1} \right\}。$$

事實上，

當 $n=1$ 時， $(p,d)=(1,1)$ ， a_1 從等差數列 $\langle 1,1\rangle:1,2,3,4,5,6,\cdots$ 中取出；
當 $n=2$ 時， $(p,d)=(2,1)$ ， a_2 從等差數列 $\langle 2,1\rangle:2,3,4,5,6,7,\cdots$ 中取出；
當 $n=3$ 時， $(p,d)=(1,2)$ ， a_3 從等差數列 $\langle 1,2\rangle:1,3,5,7,9,11,\cdots$ 中取出；
當 $n=4$ 時， $(p,d)=(3,1)$ ， a_4 從等差數列 $\langle 3,1\rangle:3,4,5,6,7,8,\cdots$ 中取出；
當 $n=5$ 時， $(p,d)=(2,2)$ ， a_5 從等差數列 $\langle 2,2\rangle:2,4,6,8,10,12,\cdots$ 中取出；
當 $n=6$ 時， $(p,d)=(1,3)$ ， a_6 從等差數列 $\langle 1,3\rangle:1,4,7,10,13,16,\cdots$ 中取出；
…………

由上面定義所取得的數列 $\langle a_n\rangle$ 為：

$a_0=1$ 、 $a_1=3$ 、 $a_2=7$ 、 $a_3=15$ 、 $a_4=31$ 、 $a_5=64$ 、 $a_6=130$ 、……。

令 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 且 $B=\{y\in\mathbb{N}\mid y\notin A\}$ ，則 $A\cup B=\mathbb{N}$ 且 $A\cap B=\varnothing$ 。

(1) *A* 中不存在遞增的無窮等差數列

注意：$a_n>2a_{n-1}>a_{n-1}\ge 1$ ($n=1,2,3,\cdots$)。因此，對 $i<j<k$，我們有：$a_k\ge a_{j+1}>2a_j$ ，由此得到 $a_k-a_j>a_j>a_j-a_i$ 。

因此，$a_i+a_k>2a_j$ ，這表示 A 中任 3 個相異數都不會形成等差數列。當然，A 中也不存在無窮等差數列。

(2) *B* 中不存在遞增的無窮等差數列

假設 B 中存在一遞增的無窮等差數列 $\langle p,d\rangle$ ： $p,p+d,p+2d,p+3d,\cdots$ 。

此數列中各項均為正整數，故首項 p 及公差 d 均為正整數。又因為函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是映成函數，故存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得 $f(n_0)=(p,d)$ ，再由 $\langle a_n\rangle$ 的定義，可知：有一 $m_0\in\{0,1,2,\cdots\}$ 使得 $a_{n_0}=p+m_0d$ 。因此， $p+m_0d=a_{n_0}\in A$；很明顯的，此與 $p+m_0d\in B$ 矛盾，故 B 中不存在無窮等差數列。

解決了等差的問題後，自然我們也想探討等比的問題：『是否可以將所有正整數分成

兩堆，使得：這兩堆中都不存在無窮等比數列？』首先，我們提出以下的夾擠定理，其證明可參見(Lipschutz，1999)：

【Schroeder−Bernstein 定理】若 $A \subset X \subset B$，且 A 與 B 可一一對應，則 X 與 B 也可一一對應。

【引理二】若 $\mathbb{N}(1)$ 表示所有大於 1 的正整數所成集合，則集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}(1)$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應。

【證】仿引理一，我們定義函數 $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 的對應如下：

$1 \to (1,2)$

$2 \to (2,2)$, $3 \to (1,3)$

$4 \to (3,2)$, $5 \to (2,3)$, $6 \to (1,4)$

$7 \to (4,2)$, $8 \to (3,3)$, $9 \to (2,4)$, $10 \to (1,5)$

…………………

即當 $n = \dfrac{k(k-1)}{2} + d$ ， $k \in \{1,2,3,\cdots\}$ ，且 $d \in \{1,2,\cdots,k\}$時，函數 $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 可定義為 $g(n) = (k - d + 1, d + 1)$。此函數 $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 是一對一且映成，故 $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}(1)$ 可一一對應。

由引理二，我們知道：格子點集 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}(1)$ 是可數集。為了方便，我們以 $\langle q|r \rangle$ 表示首項 q 、公比 r 的無窮等比數列： $q,qr,qr^2,qr^3,\cdots\cdots$ 。

【定理二】可以將所有正整數分成兩堆 A,B ，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等比數列。

【證】由引理二，得知： $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}(1)$ 可一一對應，故存在一對一且映成的函數 $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$。接著，我們可定義正整數數列 $\langle a_n \rangle$ 如下：$a_0 = 1$，且對 $n = 1,2,3,\cdots$，當 $g(n) = (q,r)$ 時，

$$a_n = \min\left\{ qr^m \;\middle|\; m = 0,1,2,\cdots, \text{且 } qr^m > a_{n-1}^2 \right\} 。$$

令 $A = \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 且 $B = \{y \in \mathbb{N} | \, y \notin A\}$ ，則 $A \cup B = \mathbb{N}$ 且 $A \cap B = \varnothing$ 。

若依引理二所定義的函數 $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ ，則所取得的數列 $\langle a_n \rangle$ 為：

$a_0 = 1, a_1 = 1\cdot 2^1 = 2, a_2 = 2\cdot 2^2 = 8, a_3 = 1\cdot 3^4 = 81, a_4 = 3\cdot 2^{12} = 12288,\cdots\cdots$ 。

(1) A 中不存在遞增的無窮等比數列

注意： $a_n > a_{n-1}^2 \ge a_{n-1} \ge 1$ （$n = 1,2,3,\cdots$ ）。因此，對 $i < j < k$ ，我們有：

$\dfrac{a_k}{a_j} \ge \dfrac{a_{j+1}}{a_j} > a_j \ge \dfrac{a_j}{a_i}$ ，由此得到 $a_i a_k > a_j^{\,2}$ 。這表示 A 中任 3 個相異數都不會形成等比數列。當然， A 中也不存在無窮等比數列。

(2) B 中不存在遞增的無窮等比數列

假設 B 中存在一遞增的無窮等比數列 $\langle q|r\rangle$ ： $q,qr,qr^2,\cdots$。注意：此數列各項均為正整數，可推得首項 q 及公比 r 均為正整數，且 $r>1$。(事實上，若 $r=\frac{b}{a}$ 不為整數，其中 a,b 互質，則當 $a^n>q$ 時，第 $n+1$ 項 qr^n 就不會是整數。) 又因為函數 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 是一映成函數，可令 $g(n_0)=(q,r)$ ，再由 $\langle a_n\rangle$ 的定義，可知：有一整數 $m_0\in\{0,1,2,\cdots\}$ 滿足 $a_{n_0}=qr^{m_0}$。因此， $qr^{m_0}=a_{n_0}\in A$，此與 $qr^{m_0}\in B$ 矛盾；故 B 中不存在無窮等比數列。

定理二中構造數列 $\langle a_n\rangle$ 的原理是：三正數 a,b,c 成等比的充要條件是 $b^2=ac$。因此，只要 $b^2>ac$ ，則 a,b,c 就不是等比數列。更進一步的，依定理一，可將所有正整數分成兩堆 A,B ，使得：這兩堆中都不存在無窮等差數列。再依定理二，將 A,B 兩堆再分別分成兩堆 $A_1,A_2;B_1,B_2$ ，使得：這四堆中都不存在無窮等比數列；如此，這四堆中也都不存在無窮等差數列。類似的問題：分成三堆，甚至兩堆時，結論是否仍正確呢？我們發現此一猜測是正確的，證明如下：

【定理三】 可以將所有正整數分成兩堆 A,B ，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。

【證】 因為 $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可一一對應，可知：存在一對一且映成函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$。

又 $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 可一一對應，可知：存在一對一且映成函數 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$。

利用這兩個函數，我們可定義正整數數列 $\langle a_n\rangle$ 如下： $a_0=1$ ，且對 $n=1,2,3,\cdots$ ，

當 $f(n)=(p,d)$ 時，定義：

$$a_{2n-1}=\min\left\{\, p+md \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } p+md>2a_{2n-2}^2 \,\right\};$$

當 $g(n)=(q,r)$ 時，定義：

$$a_{2n}=\min\left\{\, qr^m \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } qr^m>2a_{2n-1}^2 \,\right\} 。$$

令 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$ 且 $B=\{y\in\mathbb{N}\mid y\notin A\}$ ，則 $A\cup B=\mathbb{N}$ 且 $A\cap B=\varnothing$ 。

(1) *A* 中不存在遞增的無窮等差數列及等比數列

由數列 $\langle a_n\rangle$ 的定義，我們知道： $a_n>2a_{n-1}^2\ge 2a_{n-1}\ge 2$ （ $n=1,2,3,\cdots$ ）。

因此，對 $i<j<k$ ，我們有：

$$a_k>2a_{k-1}^2\ge 2a_{k-1}\ge 2a_j>2a_j-a_i ,$$

故 $a_i+a_k>2a_j$。這表示 A 中任 3 個相異數都不會形成等差數列。因此，A 中不存在遞增的無窮等差數列。另一方面，

$$\frac{a_k}{a_j}>\frac{2a_{k-1}^2}{a_j}\ge\frac{2a_j^2}{a_j}>a_j\ge\frac{a_j}{a_i} ,$$

由此得到 $a_ia_k>a_j^{\,2}$。這表示 A 中任 3 個相異數都不會形成等比數列。由此可

知：A 中也不存在無窮等比數列。

(2)　B 中不存在遞增的無窮等差數列

假設 B 中存在一遞增的無窮等差數列 $\langle p,d\rangle$：$p,p+d,p+2d,p+3d,\cdots$；其首項 p 及公差 d 都必須為正整數。因為函數 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是一映成函數，可令 $f(n_0)=(p,d)$，則由 a_{2n_0-1} 的定義，可知：存在一 $m_0\in\{0,1,2,\cdots\}$ 使得 $a_{2n_0-1}=p+m_0d$。因此，$p+m_0d=a_{2n_0-1}\in A$，此與 $p+m_0d\in B$ 矛盾；故 B 中不存在無窮等差數列。

(3)　B 中不存在遞增的無窮等比數列

假設 B 中存在一遞增的無窮等比數列 $\langle q|r\rangle$：$q,qr,qr^2,\cdots$，其首項 q 及公比 r 都必須為正整數，且 $r>1$。因為函數 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}(1)$ 是一映成函數，可令 $g(n_0)=(q,r)$，再由 a_{2n_0} 的定義，可知：有一整數 $m_0\in\{0,1,2,\cdots\}$ 使得 $a_{2n_0}=qr^{m_0}$。因此，$qr^{m_0}=a_{2n_0}\in A$，此與 $qr^{m_0}\in B$ 矛盾；故 B 中不存在無窮等比數列。

從定理三的結果，我們可以再把 A,B 任意分堆，其結果在各堆中也都不會有遞增的無窮等差數列及等比數列；於是，可得到以下一般性的推論：

【推論】可以將所有正整數分成 k 堆（$k\geq 2$），使得每一堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。

參、正有理數的分堆

解決了正整數的分堆問題，我們想進一步探討關於正有理數的分堆問題：『是否可以將所有正有理數分成兩堆，使得：這兩堆中都不存在無窮等差數列，也都不存在無窮等比數列？』對此，我們先建立一些相關集合的一一對應關係：

【引理三】若 $\mathbb{Q}^+$ 表示所有正有理數所成集合，則 $\mathbb{Q}^+$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應。

【證】當格子點 $(p,q)\neq(r,s)$ 時，我們定義對應的有理數 $\frac{q}{p}\neq\frac{s}{r}$，則可將坐標平面上第一象限內的格子點 $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 一一對應到有理數 $\frac{q}{p}$。若令所有這樣的有理數 $\frac{q}{p}$ 所成的集合為 $\mathbb{Q}^*$，例如：$\frac{2}{3}$ 與 $\frac{4}{6}$ 在 $\mathbb{Q}^+$ 中是同一個元素，但在 $\mathbb{Q}^*$ 中則是不同的元素。因為 $\mathbb{Q}^*$ 與 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可一一對應，且 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應，得知：$\mathbb{Q}^*$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應。最後，由於 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}^+\subset\mathbb{Q}^*$，利用 Schroeder-Bernstein 定理，即可得到 $\mathbb{Q}^+$ 與 $\mathbb{N}$ 亦可一一對應。

仿引理一與引理二的證明，我們可以推導以下兩個一一對應的結果：

【引理四】第一象限內的有理點集合 $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應。

【引理五】若 $\mathbb{Q}(1)$ 表示所有大於 1 的正有理數所成集合，則集合 $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}(1)$ 與 $\mathbb{N}$ 可一一對應。

【定理四】可以將所有正有理數分成兩堆 A,B，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等差數列。

【證】由引理四，可知：存在一對一且映成函數 $F:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+\times\mathbb{Q}^+$。現在，我們定義正有理數數列 $\langle a_n\rangle$ 如下：$a_0=0$，且對 $n=1,2,3,\cdots$，當 $F(n)=(p,d)$ 時，令

$$a_n=\min\left\{\, p+md \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } p+md>2a_{n-1} \right\};$$

令 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 且 $B=\{y\in\mathbb{Q}^+ \mid y\notin A\}$，則 $A\cup B=\mathbb{Q}^+$ 且 $A\cap B=\varnothing$。

再仿定理一的證明，可得：A 中不存在遞增的無窮等差數列，且 B 中也不存在遞增的無窮等差數列。

【定理五】可以將所有正有理數分成兩堆 A,B，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等比數列。

【證】由引理五，可知：存在一對一且映成函數 $G:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+\times\mathbb{Q}(1)$。現在，我們可定義正有理數數列 $\langle a_n\rangle$ 如下：$a_0=0$，且對 $n=1,2,3,\cdots$，當 $G(n)=(q,r)$ 時，令

$$a_n=\min\left\{\, qr^m \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } qr^m>\max\{a_{n-1}^2,1\} \right\};$$

令 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 且 $B=\{y\in\mathbb{Q}^+ \mid y\notin A\}$，則 $A\cup B=\mathbb{Q}^+$ 且 $A\cap B=\varnothing$。

再仿定理二的證明，可得：A 中不存在遞增的無窮等比數列，且 B 中也不存在遞增的無窮等比數列。

【定理六】可以將所有正有理數分成兩堆 A,B，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。

【證】由引理四，得知：存在一對一且映成函數 $F:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+\times\mathbb{Q}^+$；由引理五，得知：存在一對一且映成函數 $G:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+\times\mathbb{Q}(1)$。由此，我們可定義正有理數數列 $\langle a_n\rangle$ 如下：$a_0=0$，且對 $n=1,2,3,\cdots$，

當 $F(n)=(p,d)$ 時，定義：

$$a_{2n-1}=\min\left\{\, p+md \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } p+md>2\max\{a_{2n-2}^2,1\} \right\};$$

當 $G(n)=(q,r)$ 時，定義：

$$a_{2n}=\min\left\{\, qr^m \;\middle|\; m=0,1,2,\cdots,\text{且 } qr^m>2\max\{a_{2n-1}^2,1\} \right\}.$$

令 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ 且 $B=\{y\in\mathbb{Q}^+ \mid y\notin A\}$，則 $A\cup B=\mathbb{Q}^+$ 且 $A\cap B=\varnothing$。

再仿定理三的證明，可得：A 中不存在遞增的無窮等差數列及無窮等比數列，且 B 中也不存在遞增的無窮等差數列及無窮等比數列。

【推論】可以將所有正有理數分成 k 堆（$k \geq 2$），使得每一堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列。

肆、結語

在正整數的分堆中，欲使每一堆都不包含遞增的無窮等差數列(或等比數列)，就要〝拆散〞每一個無窮等差數列(或等比數列)使其不全被放在同一堆當中。如何拆散與建構是本研究的一大精髓，希望讀者能深入體會。由於等差數列 $\langle p,d \rangle$(或等比數列 $\langle q|r \rangle$)需要首項 p (或 q)及公差 d (或公比 r)兩個變數才能確定數列的每一項，而在構造集合 A 的元素 a_n 時，卻只有一個變數 n，為了克服這樣的困難，我們聯想到正整數集 $\mathbb{N}$ 與格子點集 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 的一一對應關係。透過巧妙的建構技巧，我們從所可能的等差數列(或等比數列)中各適當的取出至少一項分別放入集合 A，讓 A 中不會產生遞增的無窮等差數列(或等比數列)；如此剩下的數放在集合 B，自然 B 中就不會有遞增的無窮等差數列(或等比數列)。同樣的情況可以推廣到正有理數的分堆問題。至於正實數的分堆，我們提出一個進階的問題，留給讀者自行研究：『是否可以將所有正實數分成兩堆，使得：這兩堆中都不存在遞增的無窮等差數列，也都不存在遞增的無窮等比數列？』

參考文獻

王子俠(1986)，一一對應原理在組合學上的應用，數學傳播第 10 卷第 1 期，22-27。
陳東賢(2011)，數學遊戲與思考，教育部現代公民核心能力課程計畫。
張福春、莊淨惠(2009)，線性遞迴關係之求解(上)，數學傳播第 33 卷第 4 期，47-62。
張福春、莊淨惠(2010)，線性遞迴關係之求解(下)，數學傳播第 34 卷第 1 期，35-57。
S. Lipschutz (1999), Set theory and related topics, Second edition. McGraw-Hill Series.
C.L. Liu (1968), Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill Book Company.
L. Lovasz, J. Pelikan & K. Vesztergombi (2003), Discrete Mathematics, Elementary and Beyond, Springer.