牛頓第二運動定律的演變--從速度、力到動量、衝量，以單一質點到多質點(系統)

陳家騏
新北市立錦和高級中學

壹、前言

當新理論出現將舊有理論取而代之時，新理論一定具有以下特徵：能指出舊理論的侷限、比舊理論有更大的適用範圍。在高中物理課程中，從牛頓運動定律到動量、衝量以及質心運動的介紹中，正好可以看到這樣的演變過程，以及物理學家追求「以簡馭繁」的足跡。

或許了解這樣的演變過程需要較深厚的物理基礎，一般教科書大都簡略帶過。筆者想嘗試做出解釋，將牛頓運動定律從一開始質量不變的情況到後來完整的動量、衝量表述，以及質心運動等單元用連貫的概念聯繫起來。這樣的想法源於幾位資深前輩在 99 課綱前的大作，如吳文政老師的物理進階叢書系列、林光宇老師的高中物理家族系列叢書、李如薇老師等編輯的力學講義以及陳忠城老師的新超群物質科學物理篇講義…等，筆者拜讀後深受啟發，因而做出這樣的嘗試。

動量守恆定律是非常犀利的工具：動量守恆定律和質心運動影響了系統運動中的動量、能量分配，也限制了方向，使得原本複雜的系統問題，變得較容易解決。希望透過此篇文章能為中學的老師和學生們帶來一些不一樣的視野，以及和大家分享作者看到的物理之美。

貳、較早的牛頓運動定律形式：

牛頓（Sir Isaac Newton，1643－1727）認為外力使物體產生運動狀態的改變，而物體的運動狀態即為「速度」。物體本身有抵抗運動狀態改變的固有性質：慣性，不受外力的物體會維持原本的運動狀態(速度)；受力的物體會沿著力的方向改變運動狀態，劇烈程度由力的大小和慣性的大小決定，此一關係由白努力（J. Bernoulli,，1667-1748）在 1736 年首先提出方程式形式的表述：

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\bar{\mathbf{a}} \qquad \textbf{(1)}$$

式中 $\bar{F}$ 為力，$\bar{a}$ 為加速度(其大小改變運動狀態的劇烈程度)，m 為質量。牛頓以此式賦予質量意義：物體的慣性大小(抵抗運動狀態改變的能力)，故此式可清楚說明質量和重量的不同：重量是力，會改變物體的運動狀態；質量則是慣性大小。

然而，(1)式只能處理質量不變的情況，對諸如運動的融冰、滾下荷葉的水滴及火箭升空等涉及質量改變的運動便束手無策。

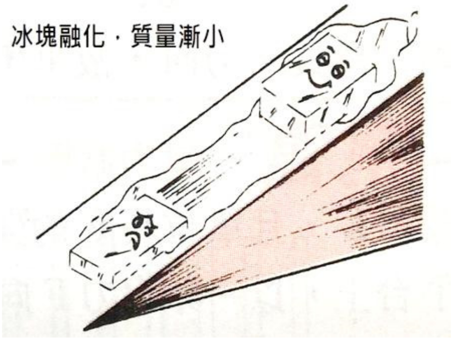


圖 1

圖 2

參、運動量(quantity of motion)

處理單一質點的力與運動問題時(不考慮質量變化的情況)，以速度($\vec{v}$)為運動狀態，以力(($\vec{F}$)或加速度(($\vec{a}$)為運動狀態的變化。但若是處理非質點物體有質量變化的力與運動問題時，因為質量可能會變，所以必須納入運動量的考慮。牛頓可能受了笛卡兒（René Descartes，1596－1650）、惠更斯（Christiaan Huygens，1629－1695，荷蘭裔物理學家、天文學家和數學家）等人為解決碰撞問題所發展出的「動量」概念影響，稱動量為「物體運動的量」，為質量(m)和速度($\vec{v}$)的乘積：

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{V}} \tag{2}$$

動量較大的物體，其運動狀態較難改變。1743 年，達朗貝爾（Jean le Rond D'Alembert，1717−1783）表示：動量變化和力的作用時間有關。而歐拉（Leonhard Euler， 1707−1783）在 1750 年提出了牛頓第二運動定律的動量表述：物體動量的時變率，等於作用於物體的外力，其關係式如下：

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{P}}}{\Delta \mathbf{t}} \tag{3}$$

設 t 時刻物體質量 m，速度 $\vec{V}$，動量 $\vec{P}$=m×$\vec{V}$； t+Δt 時刻物體質量 m+Δm，速度 $\vec{V}+\Delta\vec{V}$，動量 $\vec{P'}=(m+\Delta m)(\vec{V}+\Delta\vec{V})$，則 Δt 內之動量變化 $\Delta\vec{P}$：

$$\begin{aligned}\Delta\vec{P} &= \vec{P'}-\vec{P}\\ &=(m+\Delta m)\cdot(\vec{V}+\Delta\vec{V})-m\vec{V}\\ &=\mathbf{\Delta m\cdot\vec{V}+m\cdot\Delta\vec{V}+\Delta m\cdot\Delta\vec{V}}\end{aligned} \tag{4}$$

若考慮瞬時的作用(Δt 極短)，則Δm 和 $\Delta\vec{V}$ 極微小，其乘積趨近於零 $[(\Delta m)(\Delta\vec{V})\approx 0]$。式(4)可改寫為：

$$\mathbf{\Delta\vec{P} \approx \Delta m\cdot\vec{V}+m\cdot\Delta\vec{V}} \tag{5}$$

將式(5)代入式(3)，可得：

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} &= \frac{\Delta\vec{\mathbf{P}}}{\Delta \mathbf{t}}\\ &=\frac{(\Delta m)\vec{V}+m(\Delta\vec{V})}{\Delta t}\\ &=\mathbf{\vec{V}\cdot\frac{\Delta m}{\Delta t}+m\cdot\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}\end{aligned} \tag{6}$$

若運動過程中物體的質量不變，但速度改變，則式(6)中的Δm=0。式(6)變為：

$$\vec{F}=m\cdot\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=m\cdot\vec{a} \qquad (7)$$

可得到式(1)，也就是和較早形式的牛頓運動定律有相同的結果。

若運動過程中物體的速度不變，但質量改變，則式(6)中的 $\Delta\vec{V}=0$。式(6)變為：

$$\vec{F}=\vec{V}\frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (8)$$

式(8)的物理意義為：物體在運動過程中，若有質量變化亦可產生力的作用。歐拉不僅為牛頓第二運動定律的廣泛應用，創造了有利的條件，也使其適用於變質量的情況，牛頓第二運動定律因此有更普遍的意義。

肆、衝量

衝量為是作用在物體上的力在時間上的累積(物理意義為「力的時間效應」)，為向量，其關係式為「作用力和作用時間的乘積」，在極短間· Δt內：

$$\vec{J}=\vec{F}\cdot\Delta t \qquad (9)$$

式(9)中，$\vec{J}$為衝量，$\vec{F}$為作用力，Δt為作用時間。將「物體動量的時變率，等於作用於物體的外力」反過來說，就會變成「力的時間效應，等於物體的動量變化」，此即為衝量-動量定理：將物體的運動狀態以動量、交互作用以衝量表示，來描述物體的運動狀態與變化。當作用力為恆定力時，衝量計算直接以力與其作用時間的乘積處理；當作用力非恆定力時，其衝量的計算則必須以積分處理之($\vec{J}=\int\vec{F}(t)dt$)。

衝量−動量定理在處理物體運動狀態的改變上，和力與速度的關係相比，有更強的一致性。例如考慮在一光滑桌面上，靜置著質量不同的棒球與鉛球，施予相同的定力作用一段相同時間後，若是以較早版本的牛頓運動定律—力使物體速度改變解釋，則會得出物體受相同的力、作用相同的時間，但因質量不同而有不同速度的結論；若是以衝量−動量定理—衝量使物體產生動量變化，則會得出物體受相同衝量作用後，產生相同動量變化的結論

伍、考慮運動物體有質量變化的必然結果--處理對象由單一質點變為多質點系統

若考慮質量不變物體的平移運動，則可將該物體視為質點，因為運動過程中物體上各部分動作一致，故整個物體的運動可用一個質點代表。物體的運動若不考慮質量變化，套用質點的觀念不會有太大問題。

然而，若是考慮運動過程中物體有質量變化的情況，則物體上各部分動作不再完全一致，必須將物體視為一個由數個質點組成的系統，但如此一來會增加處理問題的難度，困難主要來自以下二點：

一、處理的對象由一變多

二、組成系統的質點間可能有交互作用，但質點間的交互作用對整體運動的影響無法確定

若是能夠找到一個足以代表整個系統的點，以及證明質點間的交互作用(系統內的力)不影響系統的運動，則就算是考慮質量改變的運動物體系統的複雜問題，也

可用質點的觀念處理，質心運動的觀念極可能是順應此一思路所發展出來的。

陸、有關「質心」

總的來說，有關質心運動物理量(質心位置、質心速度、質心加速度等等)的求取，可用「整體等於部分之和」的概念，以及「加權平均」的概念(權數為組成系統之各質點質量)理解之，考慮由 n 個質點(質量分別為 m_1、m_2、m_3、…、m_n)組成之系統：

一、質心位置(m_c)

$$m_c=m_1+m_2+m_3+...+m_n=\sum_{i=1}^{n} m_i \quad (10)$$

二、質心位置($\overline{r_c}$)

$$m_c\overline{r_c}=m_1\overline{r_1}+m_2\overline{r_2}+m_3\overline{r_3}+...+m_n\overline{r_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{r_i} \quad (11)$$

式(9)和式(10)即為「整體等於部分之和」之體現，可推得：

$$\overline{r_c}=\frac{m_1\overline{r_1}+m_2\overline{r_2}+m_3\overline{r_3}+\ldots+m_n\overline{r_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (12)$$

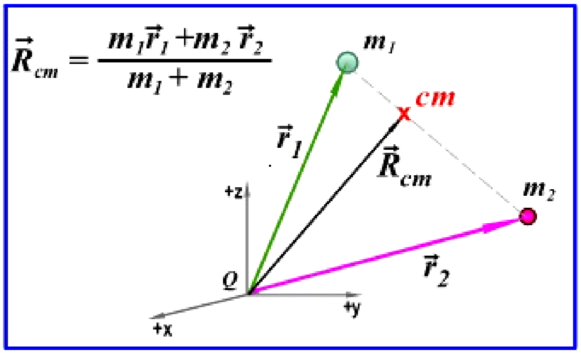


圖 3，質心位置($\overline{r_c}$)，以雙質點系統為例

三、質心速度($\overline{V_c}$)

質心位置對時間微分，可求得質心速度：

$$\overline{V_c}=\frac{d\overline{r_c}}{dt}=\frac{d\left(\dfrac{m_1\overline{r_1}+m_2\overline{r_2}+m_3\overline{r_3}+\ldots+m_n\overline{r_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}\right)}{dt}$$

$$=\frac{m_1\dfrac{d\overline{r_1}}{dt}+m_2\dfrac{d\overline{r_2}}{dt}+m_3\dfrac{d\overline{r_3}}{dt}+\ldots+m_n\dfrac{d\overline{r_n}}{dt}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

$$=\frac{m_1\overline{V_1}+m_2\overline{V_2}+m_3\overline{V_3}+\ldots+m_n\overline{V_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{V_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (13)$$

四、質心動量($\overline{P_c}$)

按定義，動量為質量和速度的乘積。則質心動量為質心質量和質心速度的乘積：

$$\overline{P_c}=m_c\overline{V_c} \quad (14)$$

將式(15)展開，可得：

$$\overline{P_c}=\left(m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n\right)\times$$

$$\frac{m_1\overline{V_1}+m_2\overline{V_2}+m_3\overline{V_3}+\ldots+m_n\overline{V_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n} \quad (15)$$

將式(16)中質心質量消去，可得：

$$\overline{P_c}=m_1\overline{V_1}+m_2\overline{V_2}+m_3\overline{V_3}+\ldots+m_n\overline{V_n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{V_i} \quad (16)$$

從式(17)可知：質心動量為系統內各質點的動量和，亦即質心動量等於系統總動量。若以動量為運動狀態，則質心的運動

狀態等於系統的運動狀態，表示系統的整體運動可用質心的運動取代。

五、質心加速度($\overline{\mathbf{a_c}}$)

質心速度對時間微分，可求得質心加速度：

$$\overline{\mathbf{a_c}} = \frac{d\overline{\mathbf{V_c}}}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\dfrac{m_1\overline{V_1}+m_2\overline{V_2}+m_3\overline{V_3}+\ldots+m_n\overline{V_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}\right)}{dt}$$

$$= \frac{m_1\dfrac{d\overline{V_1}}{dt}+m_2\dfrac{d\overline{V_2}}{dt}+m_3\dfrac{d\overline{V_3}}{dt}+\ldots+m_n\dfrac{d\overline{V_n}}{dt}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

$$= \frac{m_1\overline{a_1}+m_2\overline{a_2}+m_3\overline{a_3}+\ldots+m_n\overline{a_n}}{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overline{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (17)$$

六、證明：系統內作用不改變系統的運動狀態

假設系統受到 $\overline{F_{1,e}}$、$\overline{F_{2,e}}$、$\overline{F_{3,e}}\ldots\overline{F_{n,e}}$ 等外力作用，且質點間彼此有交互作用，則各質點所受合力如下：

m_1受合力 $\Sigma\overline{F_1}=\overline{F_{1,e}}+\overline{F_{2,1}}+\overline{F_{3,1}}+\ldots+\overline{F_{n,1}}$

m_2受合力 $\Sigma\overline{F_2}=\overline{F_{2,e}}+\overline{F_{1,2}}+\overline{F_{3,2}}+\ldots+\overline{F_{n,2}}$

m_3受合力 $\Sigma\overline{F_3}=\overline{F_{3,e}}+\overline{F_{1,3}}+\overline{F_{2,3}}+\ldots+\overline{F_{n,3}}$

$\vdots$

m_n受合力 $\Sigma\overline{F_n}=\overline{F_{n,e}}+\overline{F_{1,n}}+\overline{F_{2,n}}+\ldots+\overline{F_{n-1,n}}$

系統所受合力以 $\Sigma\overline{F_s}$ 表示，為系統內質點受力總和：

$$\Sigma\overline{F_s}=\Sigma\overline{F_1}+\Sigma\overline{F_2}+\Sigma\overline{F_3}+\ldots+\Sigma\overline{F_n} \qquad (18)$$

又系統內各質點受力可分為系統外力和系統內各質點間的交互作用：

$$\begin{aligned}\Sigma\overline{F_s} &= \left(\overline{F_{1,e}}+\overline{F_{2,e}}+\overline{F_{3,e}}+\ldots+\overline{F_{n,e}}\right)+\\ &(\overline{F_{2,1}}+\overline{F_{3,1}}+\ldots+\overline{F_{n,1}}+\overline{F_{1,2}}+\overline{F_{3,2}}+\ldots\\ &+\overline{F_{n,2}}+\ldots+\overline{F_{1,n}}+\overline{F_{2,n}}+\ldots+\overline{F_{n-1,n}})\end{aligned}$$

其中系統內各質點間的交互作用在以系統為運動的觀察主體時，彼此互相抵銷，故系統所受合力等於系統外力的總和：

$$\Sigma\overline{F_s}=\left(\overline{F_{1,e}}+\overline{F_{2,e}}+\overline{F_{3,e}}+\ldots+\overline{F_{n,e}}\right) \qquad (19)$$

由式(19)可知：系統內作用不改變系統的運動狀態。

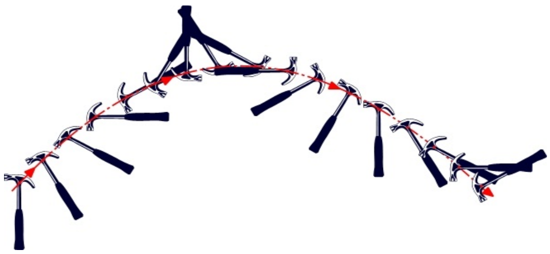


圖 4.甩出的鐵鎚各部分受重力不同產生翻滾的現象，但其質心依然沿拋物線軌跡運動。

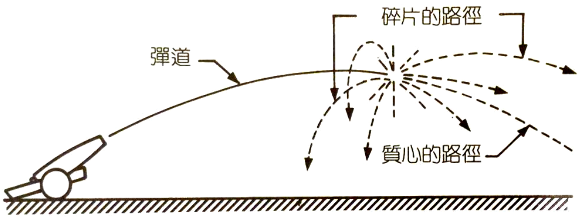


圖 5.爆炸後(碎片著地前)，炸彈系統的質心依然沿原本的拋物線軌跡運動，不受爆炸時的系統內力影響。

七、質心座標系

質心除了可以做為取代整個系統的質點外，還有一個強大的功能：讓系統內

複雜的運動有跡可循。但此功能必須以質心為座標中心，考慮系統內各質點和質心的相對關係，方能發現。

(一) 各質點相對於質心的位置

第 n 個質點相相對於質心的位置以 $\overline{r_{n,c}}$ 表示，則：

$$\overline{\mathbf{r}_{n,c}} = \overline{\mathbf{r}_n} - \overline{\mathbf{r}_c} \qquad (20)$$

以相對於質心的位置表示原來的位置

$$\overline{\mathbf{r}_n} = \overline{\mathbf{r}_{n,c}} + \overline{\mathbf{r}_c} \qquad (21)$$

由將式(21)代入式(11)，可得：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}_1\overline{\mathbf{r}_1} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{r}_2} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{r}_3} + \ldots + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{r}_n} \\
&= \mathbf{m}_1\left(\overline{\mathbf{r}_{1,c}} + \overline{\mathbf{r}_c}\right) + \mathbf{m}_2\left(\overline{\mathbf{r}_{2,c}} + \overline{\mathbf{r}_c}\right) \\
&\quad + \mathbf{m}_3\left(\overline{\mathbf{r}_{3,c}} + \overline{\mathbf{r}_c}\right) + \ldots + \mathbf{m}_n\left(\overline{\mathbf{r}_{n,c}} + \overline{\mathbf{r}_c}\right) \\
&= \mathbf{m}_1\overline{\mathbf{r}_{1,c}} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{r}_{2,c}} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{r}_{3,c}} + \ldots \\
&\quad + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{r}_{n,c}} + \left(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + \ldots + \mathbf{m}_n\right)\overline{\mathbf{r}_c} \\
&= \left(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + \ldots + \mathbf{m}_n\right)\overline{\mathbf{r}_c}
\end{aligned}$$

由上述過程可推得系統內各質點相對於質心位置和為零：

$$\mathbf{m}_1\overline{\mathbf{r}_{1,c}} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{r}_{2,c}} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{r}_{3,c}} + \ldots + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{r}_{n,c}} = 0 \qquad (22)$$

顯示質心位置必位於系統質量分布的中心，此一關係限制了系統內各質點的分布情況。

(二) 各質點相對於質心的速度

第 n 個質點相相對於質心的速度以 $\overline{V_{n,c}}$ 表示，則：

$$\overline{\mathbf{V}_{n,c}} = \overline{\mathbf{V}_n} - \overline{\mathbf{V}_c} \qquad (23)$$

以相對於質心的位置表示原來的位置

$$\overline{\mathbf{V}_n} = \overline{\mathbf{V}_{n,c}} + \overline{\mathbf{V}_c} \qquad (24)$$

由將式(24)代入式(16)，可得：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}_1\overline{\mathbf{V}_1} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{V}_2} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{V}_3} + \ldots + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{V}_n} \\
&= \mathbf{m}_1\left(\overline{\mathbf{V}_{1,c}} + \overline{\mathbf{V}_c}\right) + \mathbf{m}_2\left(\overline{\mathbf{V}_{2,c}} + \overline{\mathbf{V}_c}\right) \\
&\quad + \mathbf{m}_3\left(\overline{\mathbf{V}_{3,c}} + \overline{\mathbf{V}_c}\right) + \ldots + \mathbf{m}_n\left(\overline{\mathbf{V}_{n,c}} + \overline{\mathbf{V}_c}\right) \\
&= \mathbf{m}_1\overline{\mathbf{V}_{1,c}} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{V}_{2,c}} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{V}_{3,c}} + \ldots + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{V}_{n,c}} \\
&\quad + \left(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + \ldots + \mathbf{m}_n\right)\overline{\mathbf{V}_c} \\
&= \left(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 + \ldots + \mathbf{m}_n\right)\overline{\mathbf{V}_c}
\end{aligned}$$

由上述過程可推得系統內各質點相對於質心動量和為零：

$$\mathbf{m}_1\overline{\mathbf{V}_{1,c}} + \mathbf{m}_2\overline{\mathbf{V}_{2,c}} + \mathbf{m}_3\overline{\mathbf{V}_{3,c}} + \ldots + \mathbf{m}_n\overline{\mathbf{V}_{n,c}} = 0 \qquad (25)$$

顯示各質點相對於質心的運動必全部抵銷，此一關係約束了系統內各質點的運動情形。

柒、動量守恆定律

由牛頓第二運動定律可知：若系統受外力之和等於零，則系統動量不改變(守恆)，此即動量守恆定律。若系統動量守恆，則質心的動量(運動狀態)不改變。

組成系統的各質點仍可能受彼此間的交互作用(系統內力)而改變運動。例如一個原本靜置於光滑水平面上的炸彈，爆炸後破片受系統內力的影響往四面飛散(假設破片都沒有往上飛)，原本不動的破片因為爆炸而產生了運動狀態改變(因為對破片來說，爆炸是外力作用。但對炸彈(系統)而言，爆炸是系統內力作用)，但整個炸彈系統受外力的合力等於零，故整個炸彈系統的質心仍留在原地不動。再根據「質心運動」,飛散破片相對於質心的位置分布以及相對於質心的動量之向量和必須

為零，故動量守恆定律和質心運動影響了爆炸過程中各破片的動量、能量分配，也限制了破片飛散的方向，使得原本複雜的爆炸後破片運動問題，變得較容易解決。(如圖 6)

另外，有一種情況是物體透過質量變化而產生力的作用或運動狀態改變，而火箭升空是其中的典型：火箭靠著消耗燃料並將燃燒後的廢氣排出以產生推力。其中的原理，可簡略地用牛頓第三運動定律解釋：火箭向下推出廢氣的同時，自身獲得一個向上的反作用力。(如圖 7)

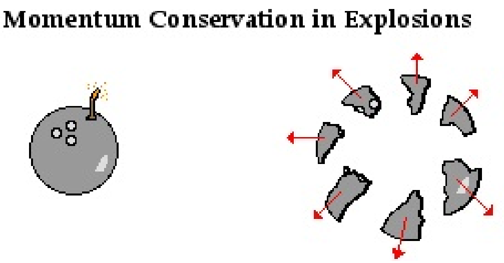


圖 6，爆炸的動量守恆

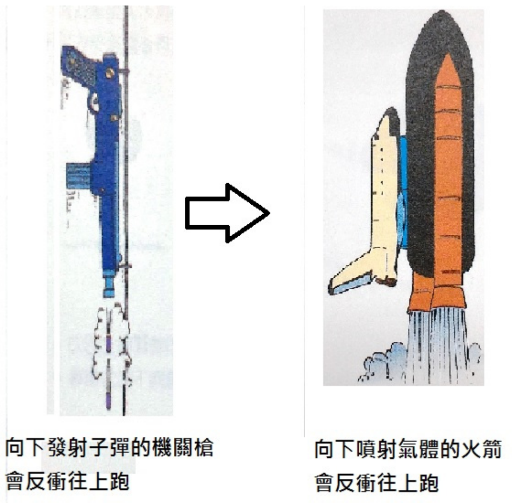
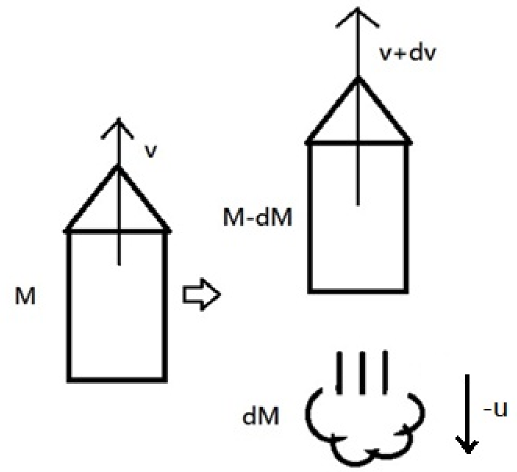


圖 7

然而，若想知道「多大的推力才能讓火箭升空？」或是「要用多快的速率排出廢氣才能獲得足夠大的推力？」等量化的問題時，便需要以動量的觀念來思考。

考慮火箭在升空過程中某一瞬間(極短時距)的情況：

火箭初始質量 **M**，初始速度 **v**(方向規定：向上為+)，極短時距 **dt**，排出廢氣質量 **dM**、速度−**u**，火箭質量變為 **M−dM**、速度變為 **v+dv**，廢氣相對火箭速度$-\mathbf{v_r}$ (廢氣排出速率 $\mathbf{v_r}$)因時距極短，阻力、重力產生的衝量量值極小可忽略，則火箭系統在此極短時距內可視為動量守恆：



$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{dM}\cdot(-\mathbf{u})+(\mathbf{M}-\mathbf{dM})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{dv})$$
$$=\mathbf{dM}\cdot(-\mathbf{u})+\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{dv}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{dv} \quad \mathbf{(26)}$$

等號兩邊消去 $\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}$，得

$$0=\mathbf{dM}\cdot(-\mathbf{u})+\mathbf{M}\cdot\mathbf{dv}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{dv} \quad \mathbf{(27)}$$

廢氣相對火箭速度$-\mathbf{v_r}$和廢氣速度−**u** 及火箭末速 **v+dv** 的關係為：

$$-\mathbf{v_r}=-\mathbf{u}-(\mathbf{v}+\mathbf{dv}) \text{ 或 } -\mathbf{u}=(\mathbf{v}+\mathbf{dv})-\mathbf{v_r}$$

代入式(27)，得

$$0 = \mathbf{dM}\cdot\left(\mathbf{v}+\mathbf{dv}-\mathbf{v_r}\right)+\mathbf{M}\cdot\mathbf{dv}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{dv}$$
$$= \mathbf{dM}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{dM}\cdot\mathbf{dv}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v_r}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{dv}$$
$$-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{dM}\cdot\mathbf{dv}$$

整理後，得

$$\mathbf{dM}\cdot\mathbf{v_r} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{dv} \qquad (27)$$

將式(28)除以時距 dt，得

$$\frac{\mathbf{dM}}{\mathbf{dt}}\times\mathbf{v_r}=\mathbf{M}\times\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}=\mathbf{M}\times\mathbf{a} \qquad (28)$$

令 R 為火箭燃料消耗率

$$\mathbf{R}=\frac{\mathbf{dM}}{\mathbf{dt}}$$

代入式(29)，得

$$\mathbf{R}\times\mathbf{v_r}=\mathbf{M}\times\mathbf{a} \qquad (30)$$

式(30)稱為「第一火箭方程式」。由式(30)可知：火箭靠著消耗燃料並將廢氣反向排出以獲得上升的推力，推力的大小由燃料消耗率及廢氣排出速率決定。

捌、總結

以動量、力描述的牛頓第二運動定律(式(3)及式(6))，可以將舊有的牛頓第二運動定律(以加速度、力描述，式(1))納入其框架之中，解決舊有理論無法處理的變質量問題，並指出質量變化也能產生力的作用。另外，以動量為運動狀態、衝量為交互作用而發展出的衝量-動量定理，在處理物體運動狀態的改變上，和力與速度的關係相比，有更強的一致性。

而處理變質量運動問題時，必然會面臨處理對象由一變多，以及必須顧慮多個處理對象彼此間的交互作用對整體運動的影響等難題。但「質心動量等於系統總動量」以及「系統內作用不會改變系統的運動狀態」等概念，證明了質心運動取代系統整體運動的可行性。而以質心為中心的「質心座標系」的概念也約束了系統內各部分(質點)的運動情形(分布、速度)。質心的概念使得變質量運動問題有跡可循。

由動量的牛頓第二定律表述可衍生出動量守恆定律。討論的對象若是單一質點質量不變的情況，則動量守恆定律便回歸成牛頓第一運動定律(慣性定律)：若物體不受外力，則維持運動狀態。而討論的對象若是多質點系統(例如：炸彈爆炸產生的破片)，則動量守恆定律結合質心概念提供了一個新的視野：不受外力的系統動量守恆(質心的運動狀態不變)，但組成系統的各質點仍可能受彼此間的交互作用(系統內力)而改變運動，例如炸彈爆炸產生的破片。另外，動量守恆定律也定量解釋了變質量運動的物體如升空火箭的推力來源以及大小。動量守恆定律的強大功能，為爆炸後的破片運動以及火箭的推力等複雜問題，提供一個有力的解決方案。

備註

圖片引用來源：

圖 1：吳文政．牛頓運動定律及動量、衝量．台北：建宏出版社．2005．P.175

圖 2：吳文政．牛頓運動定律及動量、衝量．台北：建宏出版社．2005．P.175

圖 3：https://scripts.mit.edu/~srayyan/PERwiki/index.php?title=Module_5_--_Center_of_Mass:_definition，2015/11/04

圖 4：http://resources.yesican-science.ca/discover_2006_2/，2015/11/04

圖 5：林光宇・物換星移•衝撞能量・台北：建弘・民 94・6

圖 6： http://www.physicsclassroom.com/class/momentum/Lesson-2/Momentum-Conservation-in-Explosions，2015/11/04

圖 7：G.P.Hewitt/著，常雲惠/譯・觀念物理 I ・台北：天下文化・2002，第 1 版第 6 次印行・141~142

參考文獻

李如薇，蔡易達，呂坤陞・力學・高雄：國立鳳山高級中學物理教學研究會・2011・87、94、98~99

汪達開・物理溯源—物理名詞的故事・新竹：凡異出版社・2002・33~34，42~45

吳文政・牛頓運動定律及動量、衝量・台北：建宏出版社・2005・170~227

林光宇・物換星移•衝撞能量・台北：建弘・民 94・6

姚珩，李秉書・牛頓運動定律 F＝ma 何時正式出現・科學教育月刊・第 378 期・2015・22~24

陳忠城・高中新超群物質科學物理篇(上)・台南：南一書局・2003・189~194、224~230

高涌泉・基礎物理(二)B 下・新北：龍騰文化・2013・2~31

A.Einstein，L.Infeld/著，吳鴻/譯・物理之演進・台北：臺灣商務印書館・2002・13~26

D.Halliday、R.Resnick&J.Walker 著，王行達、田麗文、李佳榮編譯・物理(上)(第八版), New York: John

G.P.Hewitt/著，常雲惠/譯・觀念物理 I ・台北：天下文化・2002，第 1 版第 6 次印行・141~142

Wiley & Sons, Inc，新北：全華圖書・2008・9-35~9-37