棋盤上木條最少移動次數之探討

黃芊 彭芷琦 林士芸 蘇柏奇* 游淑媛
苗栗縣立興華高級中學

壹、前言

本文探討 $1\times1\times t$ 木條在 $m\times n$ 盤面上，從左下角落移至盤面上任一位置的最少移動次數，我們首先探討了移動的對稱與分段性質、並給出移動次數的上界，藉由探討 t=2~5 之特例所得的經驗，將盤面分割為若干區域，進而系統性的提出最少移動次數公式。

貳、盤面位置、移動方式的定義

給定一個 $1\times1\times t$ 的長方體木條及 $m\times n$ 盤面，將長方體的兩個正方形面與盤面平行之狀態稱為「豎立」，若否，則稱為「非豎立」。本文探討原豎立於左下角落的木條經過適當移動後變成豎立在盤面上任一位置的最少移動次數。為方便起見，將左下角落記為 $S(0, 0)$, 其它位置則依照與起點水平、垂直所相差格數來編號，如圖 1。

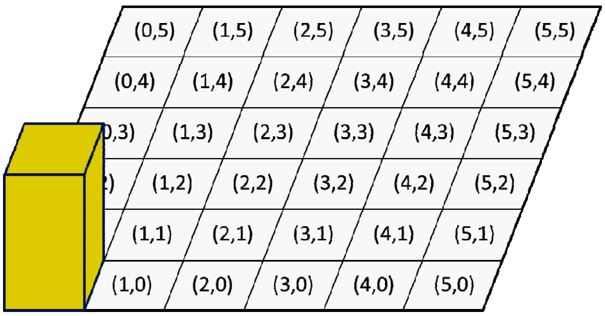


圖 1

木條的移動是以與盤面接觸的其中一邊為旋轉軸，將長方體旋轉 90 度，使得長方體的另一面與盤面疊合，若以移動前後的豎立、非豎立狀態來分類，移動的方式可分為三種：

『躺』：由豎立變成非豎立；

『立』：由非豎立變成豎立；

『滾』：由非豎立變成非豎立。

*為本文通訊作者

另外，我們用『上』、『下』、『左』、『右』來表示移動方向。原來豎立在(0, 0)的 1×1×2 木條經過上躺、右滾、下立的移動後，變成豎立在(1, 0)，上述移動過程如圖 2 所示，進一步可簡記如圖 3。

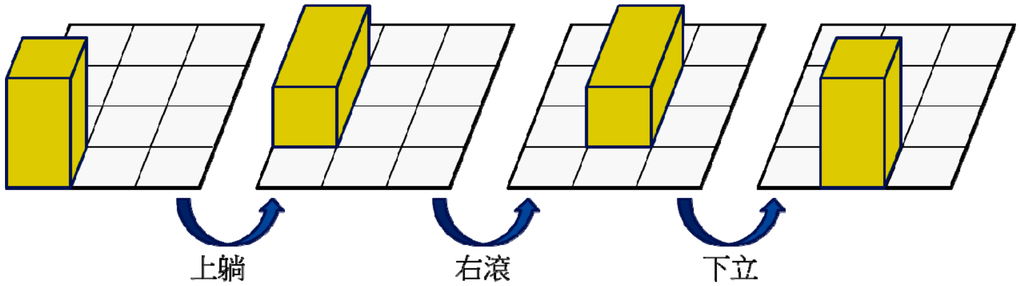


圖 2

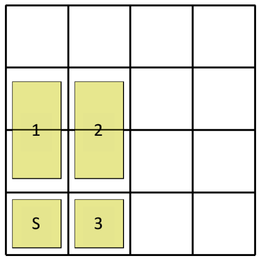


圖 3

我們考慮的盤面沒有大小限制，移動到(x, y)的方法有無窮多種，但因為關注的是最少移動次數，因此移動過程中應該盡可能朝目標方向前進。以樹狀圖來表示移到(3, 0)的方法，列出其中三種移動方式，依序記為：$F_1(3, 0)=5$, $F_2(3, 0)=6$, $F_3(3, 0)=7$, $F_4(3, 0)=2$. 當中的最小值 $F_4(3, 0)=2$ 即為最少移動次數，記為 $f(3, 0)=2$。

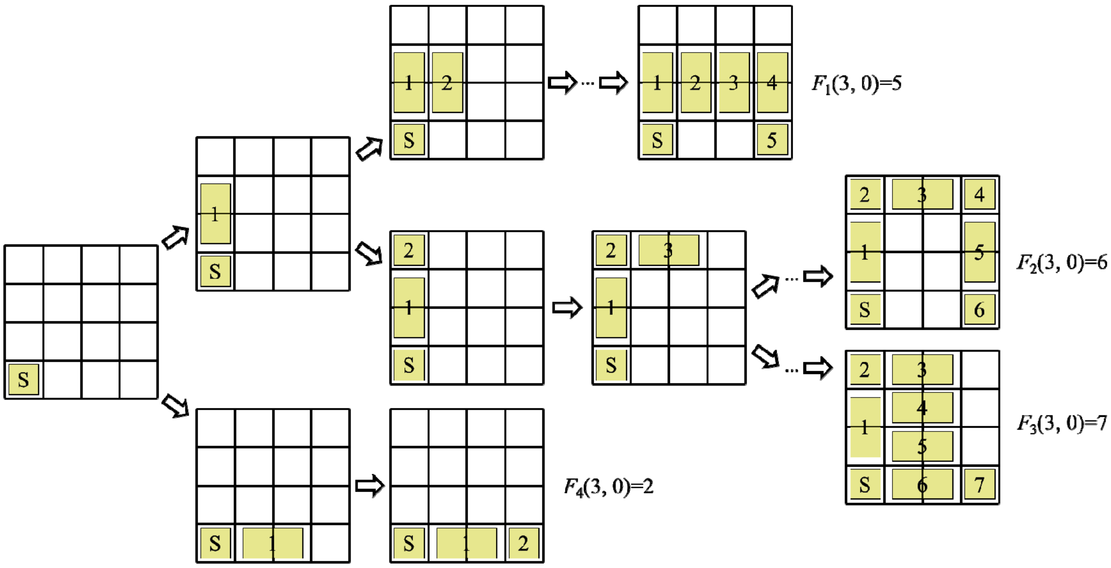


圖 4

一般而言，若考慮 t 種可以將木條移動到(x, y)的方法，則將此 t 種方法的移動次數分別記為 $F_i\,(x, y)$, $1 \leq i \leq t$, 後續為了方便起見，在不混淆的情況下，簡記為 $F\,(x, y)$. 而移動次數中的最小值即為最少移動次數，記為 $f(x, y)=min\{\ F_i\,(x, y) \mid 1 \leq i \leq t\}$.

木條的移動具有『右 V.S.上』、『左 V.S.下』的對稱現象，例如：

$F_i\,(2, 3)=5$, 右躺+右立+上躺+左滾+上立

$F_i\,(3, 2)=5$, 上躺+上立+右躺+下滾+右立

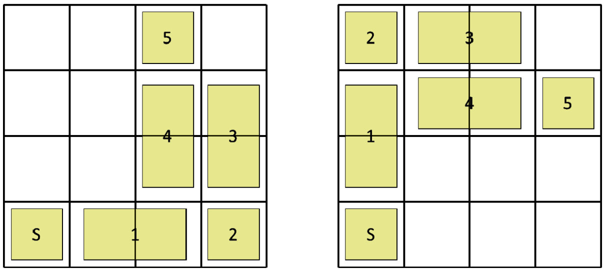


圖 5

因此，每一個移動方式 $F_i\,(x, y)$，都有一個 $F_i\,(y, x)$與其相互對應，使得 $F_i\,(x, y)=F_i\,(y, x)$，進一步得 $f(x, y)=f(y,x)$。這個對稱的現象使得我們僅需討論 $x \geq y$ 的情形。

發現移動過程中，有時會出現木條豎立的狀況，可以此為分段的依據，例如：

$F\,(3, 2)=5$, 上躺+上立+右躺+下滾+右立

可以視為兩個階段的移動：

$F\,(0, 3)$	+	$F\,(3, -1)$	=	$F\,(3, 2)$
『上躺+上立』	+	『右躺+下滾+右立』	=	『上躺+上立+右躺+下滾+右立』

一般的情況可以得到：$F(x+p, y+q)= F(x, y)+ F(p, q)$。

因此我們進一步簡化紀錄的過程如下：

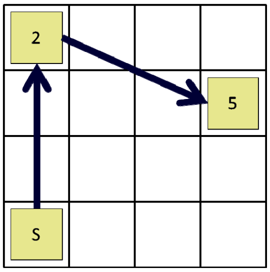


圖 6

以下檢驗是否必定可以將木條移動到盤面中的任意位置。藉由:「上躺→右滾 x 次→下立」可以將木條右移 x 格。得 $F(x,0)=1+ x +1= x +2$ (如圖 7−1).進一步得：

$$F(x, y)= F(x, 0)+ F(0, y)= x +2+ y +2 = x + y +4$$

亦即驗證必定可以從 S 移動到(x, y)且 $f(x, y)$的上界為 $x + y +4$，即：

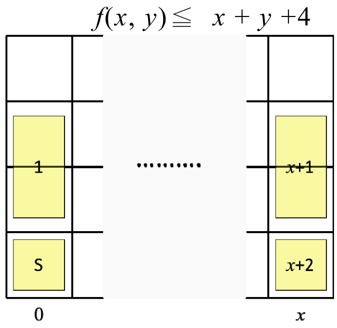


圖 7-1

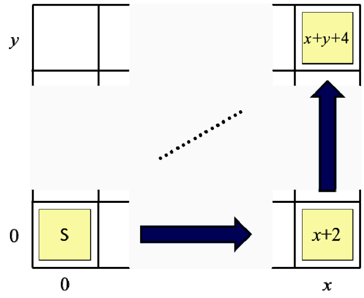


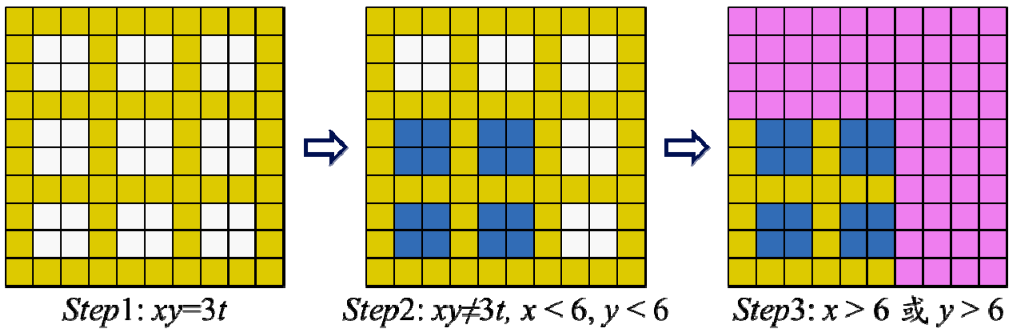
圖 7-2

上述結果歸納如下：

> 結論 1：對稱、分段與上界
>
> (a) $f(x,y)=f(y,x)$.
>
> (b) $F(x+p,y+q)=F(x,y)+F(p,q)$.
>
> (c) $f(x,y) \leqq x+y+4$.

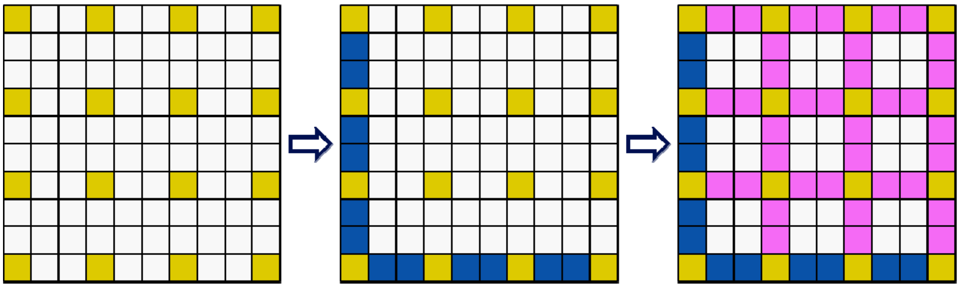
參、1×1×2 木條的移動次數

本節探討 1×1×2 木條移到任意位置的最少移動次數。分三個階段討論：先討論 xy 為 0 或 3 的倍數的情況，接著討論 xy 不是 3 的倍數且皆小於 6 的情形，最後討論 x 或 y 大於 6 的情形。



一、xy 為 0 或 3 的倍數

分三階段探討 xy 為 0 或 3 的倍數的情況：先討論 x 和 y 為 0 或 3 的倍數的情況，再討論 y 為 0, x 不是 3 的倍數的情形，最後討論 x 和 y 恰有一個為 3 的倍數的情形。



$x=3h,\ y=3k$　　$x=0,\ y\neq 3k$ 或 $x\neq 3h,\ y=0$　　x 及 y 恰有1數為3的倍數

(a)　$f(x, y)$，$x=3h$，$y=3k$（x, y 皆為 3 的倍數）

當 $x=3h$，$y=0$ 時，用『右躺+右立』來取代原來『上躺+右滾+右滾+右滾+右滾+下立』的移動方式，得到『更快』的移動方法，如圖 8−1：

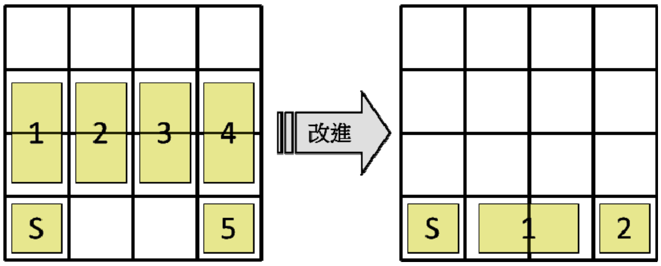


圖 8-1

相同的方法，當 $x=3h$，$y=3k$ 時，也可以用『右躺+右立』及『上躺+上立』來取代前一節討論存在性時所用的『躺+滾+...+滾+立』的方法（如圖 8−2），因此得到：$f(3h,3k)=2h+2k$。

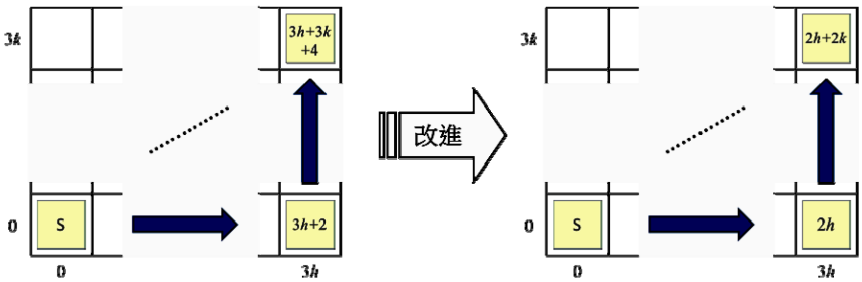
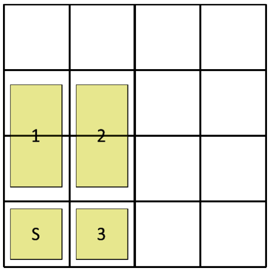


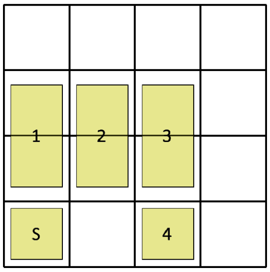
圖 8−2

(b)　$f(x, 0)$、$f(0, y)$，x 和 y 不是 3 的倍數

先討論 $f(1,0)=3$、$f(2,0)=4$ 如圖 8−3：



$f(1,0)=3$



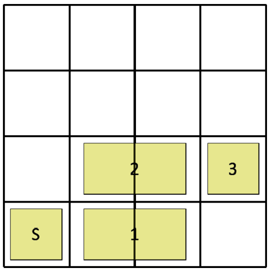
$f(2,0)=4$

再由$\begin{cases} f(1,0)=3 \\ f(2,0)=4 \\ f(3h,0)=2h \end{cases}$，因為 $F(3h+1,0)= F(3h,0)+F(1,0)$，$F(3h+2,0)=F(3h,0)+F(2,0)$

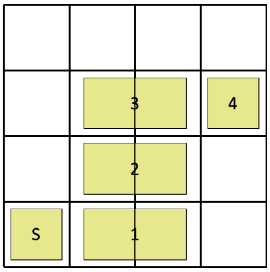
得到$\begin{cases} f(3h+1,0)=f(0,3h+1)=2h+3 \\ f(2h+2,0)=f(0,3h+2)=2h+4 \end{cases}$

(c) $f(x,y)$，x 和 y 恰有一數為 3 的倍數

先討論 $f(3,1)=3$、$f(3,2)=4$ 如圖 8−4：



$f(3,1)=3$



$f(3,2)=4$

圖 8−4

由$\begin{cases} f(1,3)=f(3,1)=3 \\ f(2,3)=f(3,2)=4 \\ f(3h,3k)=2h+2k \end{cases}$，因為 $F(3h+1,3k)=F(3h,3k-3)+F(1,3)$

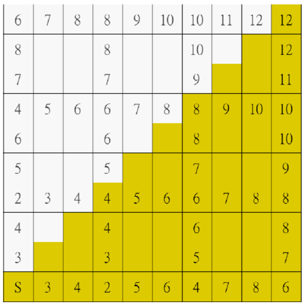
得到 $f(3h+1,3k)=2h+2(k-1)+3=2h+2k+1$

同理 $f(3h+2,3k)=2h+2(k-1)+4=2h+2k+2$

當 $h>0$ 且 $k>0$ 時，得到$\begin{cases} f(3h+1,3k)=2h+2k+1 \\ f(3h+2,3k)=2h+2k+2 \end{cases}$

(d) 小結

經由上述討論，我們得到下圖 8−5：

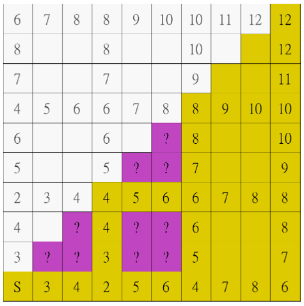


6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
8			8			10			12
7			7			9			11
4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
6			6			8			10
5			5			7			9
2	3	4	4	5	6	6	7	8	8
4			4			6			8
3			3			5			7
S	3	4	2	5	6	4	7	8	6

圖 8−5

二、$F(x, y), x\neq 3h, y\neq 3k, x\geqq y$

本節探討圖 9−1 中以『？』所標記位置之移動次數 $f(x, y)$。



6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
8			8			10			12
7			7			9			11
4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
6			6		?	8			10
5			5	?	?	7			9
2	3	4	4	5	6	6	7	8	8
4		?	4	?	?	6			8
3	?	?	3	?	?	5			7
S	3	4	2	5	6	4	7	8	6

圖 9−1

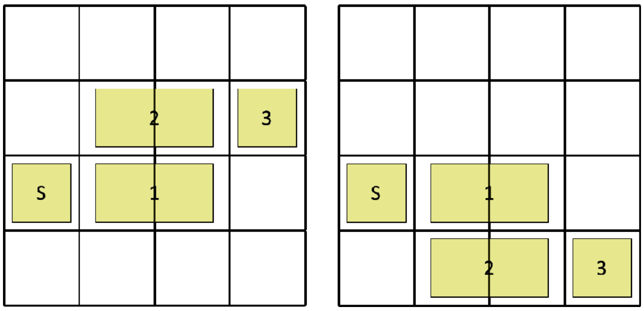


圖 9−2

由於對稱關係，『向上走 n 格 VS 向下走 n 格』或『向左走 n 格 VS 向右走 n 格』有相對應的移動方法，因此：$\boldsymbol{f(n,0)= f(0,n)= f(-n,0)= f(0,-n)}$, 另外 $\boldsymbol{f(3,1)= f(3,-1)=3}$（如圖 9−2）。接著逐一探討如下（如圖 9−3）：

由 F(1,1)=F(1,0)+F(0,1)，得 $f(1,1)=3+3=6$

由 F(2,1)=F(3,1)+F(−1,0)，得 $f(2,1)=3+3=6$

由 F(2,2)=F(2,3)+F(0, −1)，得 $f(2,2)=4+3=7$

由 F(4,1)=F(1,0)+F(3,1)，得 $f(4,1)=3+3=6$

由 F(4,2)=F(4,1)+F(0,1)，得 $f(4,2)=3+3=6$

由 F(4,4)=F(1,3)+F(3,1)，得 $f(4,1)=3+3=6$

由 F(5,1)=F(2,0)+F(3,1)，得 $f(5,1)=4+3=7$

由 F(5,2)=F(2,3)+F(3, −1)，得 $f(5,2)=4+3=7$

由 F(5,4)=F(2,3)+F(3,1)，得 $f(5,4)=4+3=7$

由 F(5,5)=F(3,2)+F(2,3)，得 $f(5,5)=4+4=8$

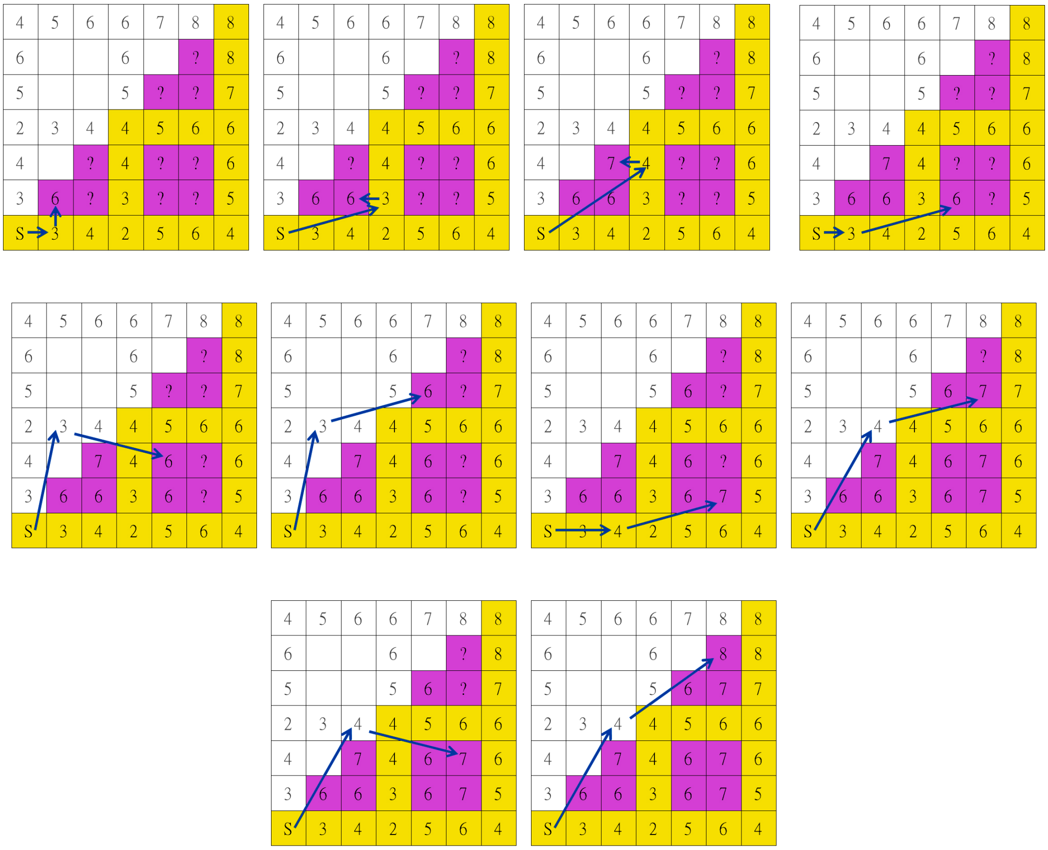


圖 9−3

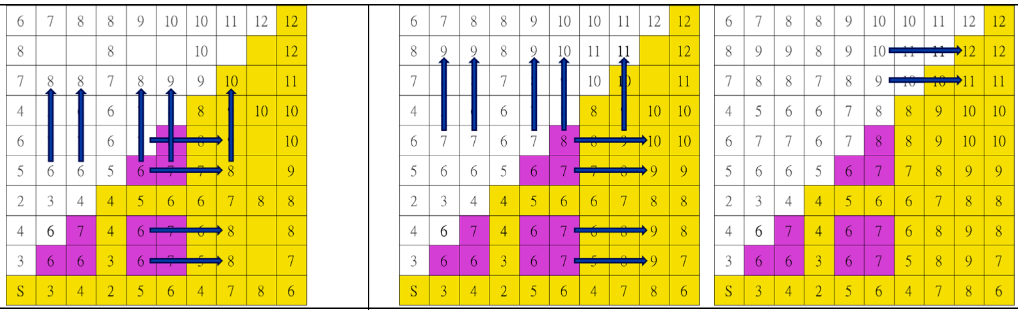
經過本節探討，我們得到結果如圖 9−4：

4	5	6	6	7	8	8
6	7	7	6	7	8	8
5	6	6	5	6	7	7
2	3	4	4	5	6	6
4	6	7	4	6	7	6
3	6	6	3	6	7	5
S	3	4	2	5	6	4

圖 9−4

三、$f(x, y)$, $x>6$ 或 $y>6$

用『右躺+右立』及『上躺+上立』求得 $f(x, y)$, $x>6$ 或 $y>6$ 如下：



由 $f(4,j)$ 得 $f(7,j)$ 由 $f(i,4)$ 得 $f(i,7)$	由 $f(5,j)$ 得 $f(8,j)$ 由 $f(i,5)$ 得 $f(i,8)$

經由類似的過程，我們擴張最小步數表如圖 9−5：

8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16
10	11	11	10	11	12	13	13	14	14	15	16	16
9	10	10	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15
6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14
8	9	9	8	9	10	11	11	12	12	13	14	14
7	8	8	7	8	9	10	10	11	11	12	13	13
4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
6	7	7	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
5	6	6	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11
2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
4	6	7	4	6	7	6	8	9	8	10	11	10
3	6	6	3	6	7	5	8	9	7	10	11	9
S	3	4	2	5	6	4	7	8	6	9	10	8

圖 9−5

四、討論

在前節擴張最小步數表的過程之中，發現最小步數取決 x、y 皆小於 6 的正方形區域，而因為 $x=0$ 與 $x=3$ 兩個直行上的最小步數 $f(0, y)=f(3, y)$, 相同的狀況出現在 $y=0$ 與 $y=3$ 兩個橫列上，即 $f(x, 0)=f(x, 3)$, 故將此正方形區域再分割為綠色及黃色兩區域，如圖 9−6。我們進一步將綠色區域分為 A、B、C 三區，並將 A 區上方記為甲，B 區右方記為乙，其他區域記為丙，如圖 9−7。

8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16
10	11	11	10	11	12	13	13	14	14	15	16	16
9	10	10	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15
6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14
8	9	9	8	9	10	11	11	12	12	13	14	14
7	8	8	7	8	9	10	10	11	11	12	13	13
4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
6	7	7	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
5	6	6	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11
2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
4	6	7	4	6	7	6	8	9	8	10	11	10
3	6	6	3	6	7	5	8	9	7	10	11	9
S	3	4	2	5	6	4	7	8	6	9	10	8

圖 9−6

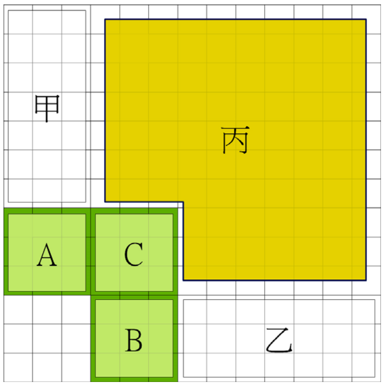


圖 9−7

從前節擴張最少步數的過程中發現僅需求得 A、B、C 三區的最少步數，藉由『下躺+下立』或『左躺+左立』，即可得甲、乙、丙三區的最少步數。分別說明如下：

甲區 $(i, j+3q)$, $0 \leqq i \leqq 2$, $3 \leqq j \leqq 5$, $q \geqq 1$：

重複 q 次『下躺+下立』，可以下移 $3q$ 格到 A 區中的某個位置(i, j)，

得到：$f(i, j+3q)= f(i, j)+ f(0,3q)= f(i, j)+2q.$

乙區 $(i+3p, j)$, $3 \leqq i \leqq 5$, $0 \leqq j \leqq 2$, $p \geqq 1$：

重複 p 次『左躺+左立』，可以左移 $3p$ 格到 B 區中的某個位置(i, j)，

得到：$f(i+3p, j)=f(i, j)+f(3p,0)=f(i, j)+2p.$

丙區 $(i+3p, j+3q)$, $3 \leqq i, j \leqq 5$, $p+q \geqq 1$：

重複 p 次『左躺+左立』，可以左移 $3p$ 格；

再重複 q 次『下躺+下立』，可以下左移 $3q$ 格，到 C 區中的某個位置(i, j)，

得到：$f(i+3p, j+3q)= f(i, j)+ f(3p, 3q)= f(i, j)+2p+2q.$

上述結果歸納如下：

結論 2：
甲區：$f(i, j+3q)= f(i, j)+2q$, $0 \leqq i \leqq 2$, $3 \leqq j \leqq 5$, $q \geqq 1$
乙區：$f(i+3p, j)= f(i, j)+2p$, $3 \leqq i \leqq 5$, $0 \leqq j \leqq 2$, $p \geqq 1$
丙區：$f(i+3p, j+3q)= f(i, j)+2p+2q$, $3 \leqq i,j \leqq 5$, $p+q \geqq 1$

參、1×1×3 木條的移動次數

延續上節對於木條尺寸為 1×1×2 的討論，本部分討論木條為 1×1×3 時的最少移動次數。

一、$f(x, y)$，$x < 9$ 且 $y < 9$

經過與前節類似的移動方法得到 x 或 y 至少有一個數為 4 的倍數之最少移動次數，再由以下的分段，得到 x 和 y 皆小於 9 且皆不是 4 的倍數的最少移動次數，如圖 10−1。

由 $F(1,1)=F(1,0)+F(0,1)$, 得 $f(1,1)=3+3=6.$

由 $F(2,1)=F(2,0)+F(0,1)$, 得 $f(2,1)=4+3=7.$

由 $F(2,2)=F(2,0)+F(0,2)$, 得 $f(2,2)=4+4=8.$

由 $F(3,1)=F(4,1)+F(-1,0)$, 得 $f(3,1)=3+3=6.$

由 $F(3,2)=F(4,2)+F(-1,0)$, 得 $f(3,2)=4+3=7.$

由 $F(3,3)=F(4,3)+F(-1,0)$, 得 $f(3,3)=5+3=8.$

由 $F(5,1)=F(1,0)+F(4,1)$, 得 $f(5,1)=3+3=6.$

由 $F(5,2)=F(1,0)+F(4,2)$, 得 $f(5,2)=4+3=7.$

由 $F(5,3)=F(1,4)+F(4,-1)$, 得 $f(5,3)=3+3=6.$

由 $F(5,5)=F(1,4)+F(4,1)$, 得 $f(5,5)=3+3=6.$

由 $F(6,1)=F(2,0)+F(4,1)$, 得 $f(6,1)=4+3=7.$

由 $F(6,2)=F(2,0)+F(4,2)$, 得 $f(6,2)=4+4=8.$

由 $F(6,3)=F(2,4)+F(4,-1)$, 得 $f(6,3)=4+3=7.$

由 $F(6,5)=F(2,4)+F(4,1)$, 得 $f(6,5)=4+3=7.$

由 $F(6,6)=F(4,2)+F(2,4)$, 得 $f(6,6)=4+4=8.$

由 $F(7,1)=F(3,0)+F(4,1)$, 得 $f(7,1)=5+3=8.$

由 F(7,2)=F(4,2)+F(3,0)，得 $f(7,2)=4+5=9$.

由 F(7,3)=F(3,4)+F(4,-1)，得 $f(7,3)=5+3=8$.

由 F(7,5)=F(3,4)+F(4,1)，得 $f(7,5)=5+3=8$.

由 F(7,6)=F(3,4)+F(4,2)，得 $f(7,6)=5+4=9$.

由 F(7,7)=F(3,4)+F(4,3)，得 $f(7,7)=5+5=10$.

4	5	6	7	6	7	8	9	8
7	8	9	8	7	8	9	10	9
6	7	8	7	6	7	8	9	8
5	6	7	6	5	6	7	8	7
2	3	4	5	4	5	6	7	6
5	6	7	8	5	6	7	8	7
4	7	8	7	4	7	8	9	6
3	6	7	6	3	6	7	8	5
S	3	4	5	2	5	6	7	4

圖 10-1

二、$f(x, y)$, $x \geqq 8$ 或 $y \geqq 8$

根據與前節相似的過程，我們在棋盤中畫出了一個綠色區域如圖 10−2，將此綠色區域分割為 A、B、C 三區，並將棋盤上其它區域分割為甲、乙、丙三區如圖 10−3，分別討論三區最少移動步數如下。

甲區：$f(i, j+4q)= f(i, j)+2q$, $0 \leqq i \leqq 3$, $4 \leqq j \leqq 7$, $q \geqq 1$

乙區：$f(i+4p, j)= f(i, j)+2p$, $4 \leqq i \leqq 7$, $0 \leqq j \leqq 3$, $p \geqq 1$

丙區：$f(i+4p, j+4q)= f(i, j)+2p+2q$, $4 \leqq i,j \leqq 7$, $p+q \geqq 1$

4	5	6	7	6	7	8	9	8		
7	8	9	8	7	8	9	10	9		
6	7	8	7	6	7	8	9	8		
5	6	7	6	5	6	7	8	7		
2	3	4	5	4	5	6	7	6		
5	6	7	8	5	6	7	8	7		
4	7	8	7	4	7	8	9	6		
3	6	7	6	3	6	7	8	5		
S	3	4	5	2	5	6	7	4		

圖 10−2

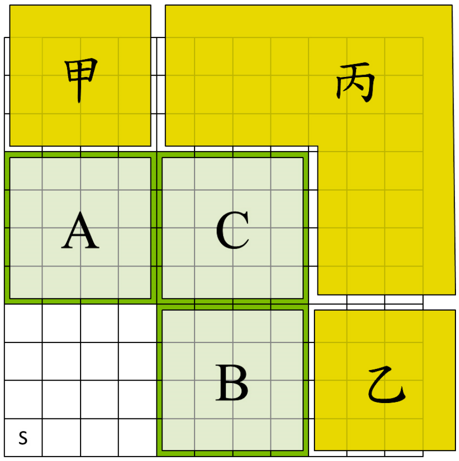


圖 10−3

肆、1×1×t 木條的移動次數

本節將根據 1×1×t, t=2~5 的特例來推測一般情形（1×1×3 及 1×1×4 的局部最少次數表如附錄）。整體而言，因為『躺+立』是一種很有效率的移動方式，在尋找最少移動步數時，盡可能優先採用這種移動方式。首先，根據『上躺+上立』可上移 t+1 個位置、『右躺+右立』可右移 t+1 個位置、$f(0, y)=f(t+1, y)$及 $f(x, 0)=f(x, t+1)$等結果，我們將盤面分割為 O、A、B、C、甲、乙、丙七個區域如圖 11−1。七個區域的範圍分別為：

O 區：(i, j), $0 \leqq i < t$, $0 \leqq j < t$.

A 區：(i, j), $0 \leqq i \leqq t$, $t+1 \leqq j \leqq 2t+1$.

B 區：(i, j), $t+1 \leqq i \leqq 2t+1$, $0 \leqq j \leqq t$.

C 區：(i, j), $t+1 \leqq i, j \leqq 2t+1$.

甲區：$(i, j+4q)$, $0 \leqq i \leqq t$, $t+1 \leqq j \leqq 2t+1$, $q \geqq 1$.

乙區：$(i+4p, j)$, $t+1 \leqq i \leqq 2t+1$, $0 \leqq j \leqq t$, $p \geqq 1$.

丙區：$(i+(t+1)p, j+(t+1)q)$, $t+1 \leqq i, j \leqq 2t+1$, $p+q \geqq 1$.

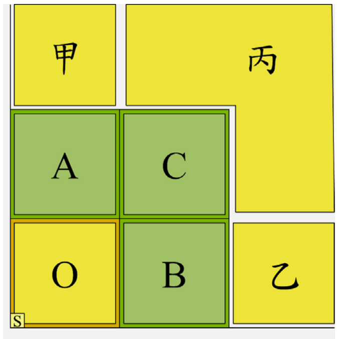


圖 11−1

不難得到甲、乙、丙三個區域的最少移動次數與 A、B、C 三個區域有關如下：

> **結論 3：**
>
> 甲區：$f(i, j+(t+1)q)= f(i, j)+2q$, $0 \leqq i \leqq t$, $t+1 \leqq j \leqq 2t+1$, $q \geqq 1$.
>
> 乙區：$f(i+(t+1)p, j)= f(i, j)+2p$, $t+1 \leqq i \leqq 2t+1$, $0 \leqq j \leqq t$, $p \geqq 1$.
>
> 丙區：$f(i+(t+1)p, j+(t+1)q)= f(i, j)+2p+2q$, $t+1 \leqq i, j \leqq 2t+1$, $p+q \geqq 1$.

因為 $f(x,y)=f(y,x)$的對稱性質，僅考慮 $i \geqq j$ 位置之 $f(i, j)$，以下逐步探討 B、C、O 三個區域的最小步數。

一、(i, j), i, j 至少有一個為$(t+1)$的倍數：

我們發現 O、B、C 三個區域的最少步數與圖 11−2 之中三個紅色框有關。此三個紅框分別位於 O、A、B 三個區域（如圖 11−3），因此分別稱為 O 區紅框、A 區紅框、B 區紅框。

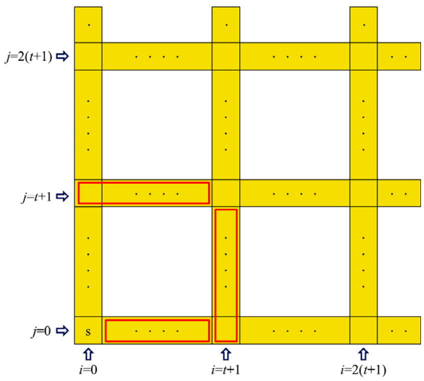


圖 11−2

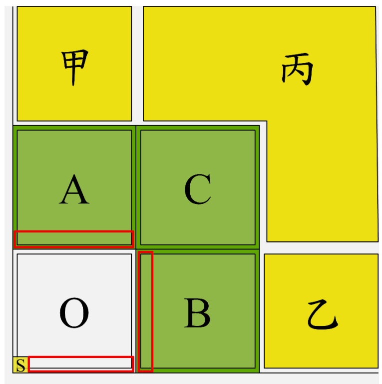


圖 11−3

因為 $f(x,y)=f(y,x)$的對稱性質，A、B 區紅框的最小步數有對應關係，以下僅需討論 O、B 區紅框的最小步數：

（一）O 區紅框 $f(i, 0)$, $1\leqq i\leqq t$

O 區紅框分成偏左和偏右兩個區域，討論如下：

(a) 當 $1\le i\le\left[\frac{t+3}{2}\right]$：

從(0,0)開始，經過『上躺+右滾 i 次+下立』即可到達$(i, 0)$，得到：$f(i, 0)=i+2$

(b) 當 $\left[\frac{t+3}{2}\right]<i<t$：

從(0,0)開始，經過『右躺+右立』到達$(t+1, 0)$；

再從$(t+1, 0)$經過『上躺+左滾 $t+1-i$ 次+下立』即可到達$(i, 0)$

得到：$f(i, 0)= f(t+1, 0)+ f(-t-1+i, 0)=2+(t+1-i+2)= t-i+5$

（二）B 區紅框 $f(t+1, j)$, $0\leqq j\leqq t$

B 區紅框分成偏下和偏上兩個區域，討論如下：

(a) 當 $0<j<\left[\frac{t+3}{2}\right]$：

(b) 從(0,0)開始，經過『右躺+上滾 j 次+右立』即可到達$(t+1, j)$

得到：$f(t+1, j)=j+2$

(c) 當 $\left[\frac{t+3}{2}\right]<i\le t$：

從(0,0)開始，經過『上躺+上立』到達$(0, t+1)$；

再從$(0, t+1)$經過『右躺+下滾 $t+1-j$ 次+右立』即可到達$(t+1, j)$

得到：$f(t+1, j)=f(0, t+1)+ f(t+1, -t-1+j)=2+(t+1-j+2)= t-j+5$

以上結果歸納如下：

結論 4−1：

$$\begin{cases} f(i,0)=i+2,\ 當1\le i\le\left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(i,0)=t-i+5,\ 當\left[\frac{t+3}{2}\right]<i\le t \\ f(t+1,j)=f(j,t+1)=j+2,\ 當0\le j\le\left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(t+1,j)=f(j,t+1)=t-j+5,\ 當\left[\frac{t+3}{2}\right]<j\le t \end{cases}$$

二、*O* 區

在 O 區中，觀察 1×1×t, t=2,3,4,5 的 O 區最小步數如圖 11-4，根據我們的觀察，O 區的最小步數應分割成 O_1、O_2 兩個區域，其最小步數分別與 O、B 區紅框有關如圖 11−5。

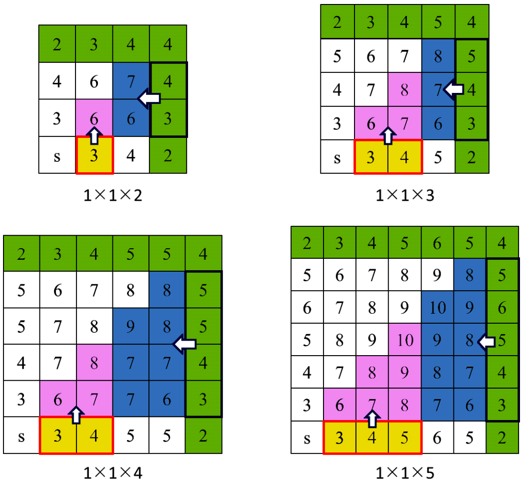


圖 11−4

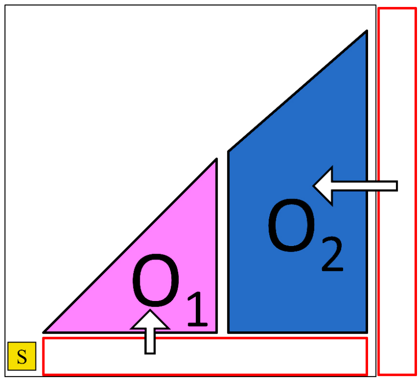


圖 11−5

我們將 O 區分為紅色 O_1 區和藍色 O_2 區：

(一) O_1 區：

O_1 區中的位置(i, j)滿足 $1 \le i \le \left[\frac{t+1}{2}\right]$，最小步數由 O 區紅框$(i,0)$上移 j 格而得；

$f(i, j)= f(i, 0)+ f(0, j)=i+2+j+2= i+j+4$

(二) O_2 區：

O_2 區中的位置(i, j)滿足 $\left[\frac{t+1}{2}\right] < i \le t$，最小步數由 B 區紅框$(t+1, j)$左移 $t+1-i$ 格而得；

即：$f(i, j)= f(t+1, j)+ f(i-t-1, 0)=f(t+1, j)+(t+1-i+2)$

需進一步就 j 值來討論 $\begin{cases} f(t+1, j) = j+2, \text{ 當} 1 \le j \le \left[\frac{t+1}{2}\right] \\ f(t+1, j) = t-j+5, \text{ 當} \left[\frac{t+1}{2}\right] < j \le t \end{cases}$.

得到以下結論：

> 結論 4-2：
>
> O_1 區：位置(i, j)滿足 $1 \le i \le \left[\frac{t+1}{2}\right]$，$f(i, j)= i+j+4$
>
> O_2 區：位置(i, j)滿足 $\left[\frac{t+1}{2}\right] < i \le t$，$f(i, j) = \begin{cases} t-i+j+5, \text{ 當} 1 \le j \le \left[\frac{t+1}{2}\right] \\ 2t-i-j+8, \text{ 當} \left[\frac{t+1}{2}\right] < j \le t \end{cases}$.

三、*B* 區

根據觀察，B 區的最小步數應分割成偏下的 B_1 區和偏上的 B_2 區，其最小步數分別與 O、A 區紅框有關如圖 11−6。

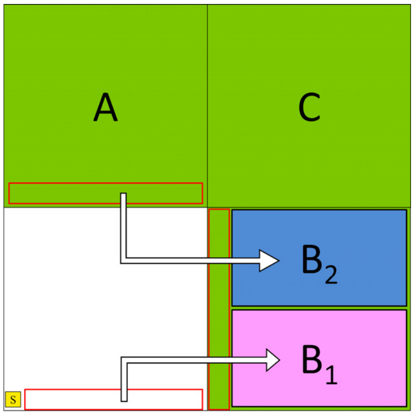


圖 11−6

分別討論如下：

(一) B_1 區：

B_1 區中的位置$(i+t+1, j)$滿足 $1 \le i \le t$ ， $1 \le j \le \left[\frac{t+1}{2}\right]$，

最小步數由 O 區紅框$(i,0)$右移 $t+1$ 格、上移 j 格而得；

即：$f(i+t+1, j)= f(i, 0)+ f(t+1, j) = f(i, 0)+ j+2$

需進一步就 i 值來討論 $\begin{cases} f(i+t+1, j)=i+j+4, \text{當} 1\le i\le \left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1, j)=t-i+j+7, \text{當} \left[\frac{t+3}{2}\right]< i\le t \end{cases}$.

(二) B_2 區：

B_2 區中的位置$(i+t+1, j)$滿足 $1 \le i \le t$ ， $\left[\frac{t+1}{2}\right]< j \le 2t+1$，

最小步數由 A 區紅框$(i, t+1)$右移 $t+1$ 格、下移 $t+1-j$ 格而得；

即：$f(i+t+1, j) = f(i, t+1)+ f(t+1, j-t-1) = f(i, t+1)+ t+3-j$

需進一步就 i 值來討論 $\begin{cases} f(i+t+1, j)=t+i-j+5, \text{當} 1\le i\le \left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1, j)=2t-i-j+8, \text{當} \left[\frac{t+3}{2}\right]< i\le t \end{cases}$.

得到以下結論：

結論 4−3：

B_1 區：位置$(i+t+1, j)$滿足 $1\le i\le t$ ，$1\le j\le\left[\frac{t+1}{2}\right]$,

$$\begin{cases} f(i+t+1,j)=i+j+4, \text{當} 1\le i\le\left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1,j)=t-i+j+7, \text{當}\left[\frac{t+3}{2}\right]<i\le t \end{cases}.$$

B_2 區：位置$(i+t+1, j)$滿足 $1\le i\le t$ ，$\left[\frac{t+1}{2}\right]<j\le 2t+1$,

$$\begin{cases} f(i+t+1,j)=t+i-j+5, \text{當} 1\le i\le\left[\frac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1,j)=2t-i-j+8, \text{當}\left[\frac{t+3}{2}\right]<i\le t \end{cases}.$$

四、*C* 區

根據觀察，C 區的最小步數應分割成 C_1 和位置$(2t+1,2t+1)$兩個區域，其最小步數分別與 A 區紅框和位置$(2t+1,2t+1)$有關如圖 11−7。

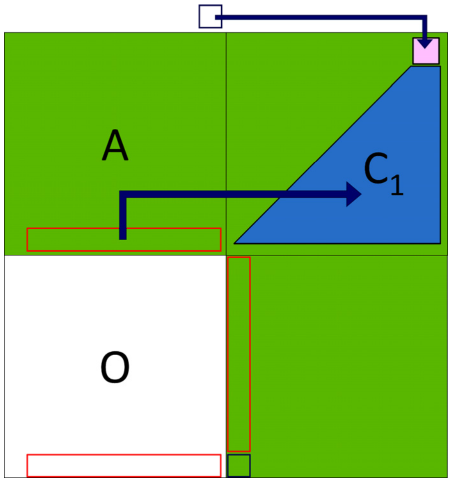


圖 11−7

分別討論如下：

(一) C_1 區：

C_1 區中的位置$(i+t+1, j+t+1)$滿足 $1\le i\le t$ ，$1\le j<t$ ，$j\le i$

最小步數由 A 區紅框$(i, t+1)$右移 $t+1$ 格、上移 j 格而得；

即：$f(i+t+1, j+t+1)= f(i, t+1)+ f(t+1, j)= f(i, t+1)+ j+2$

需進一步就 i 值來討論 $\begin{cases} f(i+t+1, j+t+1) = i+j+4,\ 當 1 \le i \le \left[\dfrac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1, j+t+1) = t-i+j+7,\ 當 \left[\dfrac{t+3}{2}\right] < i \le t \end{cases}$

（二）$f(2t+1, 2t+1)$：

C 區中的位置$(2t+1,2t+1)$

從(0,0)，經過『上躺+右滾 t 次+上立+上躺+上立』可到達位於甲區的位置$(t, 2t+2)$

從$(t, 2t+2)$，經過『右躺+下滾 1 次+右立』可到達$(2t+1, 2t+1)$

得到：$f(2t+1,2t+1)= f(t, 2t+2)+ f(t+1, -1)=(t+4)+3= t+7$

得到以下結論：

結論 4-4：

1. C_1 區：位置$(i+t+1, j+t+1)$滿足 $1 \le i \le t$，$1 \le j < t$，$j \le i$，

$$\begin{cases} f(i+t+1, j+t+1) = i+j+4,\ 當 1 \le i \le \left[\dfrac{t+3}{2}\right] \\ f(i+t+1, j+t+1) = t-i+j+7,\ 當 \left[\dfrac{t+3}{2}\right] < i \le t \end{cases}$$

2. $f(2t+1, 2t+1)= t+7$

五、小結

本節所分割各個區域之最小移動次數的關聯彙整如圖 11−8。

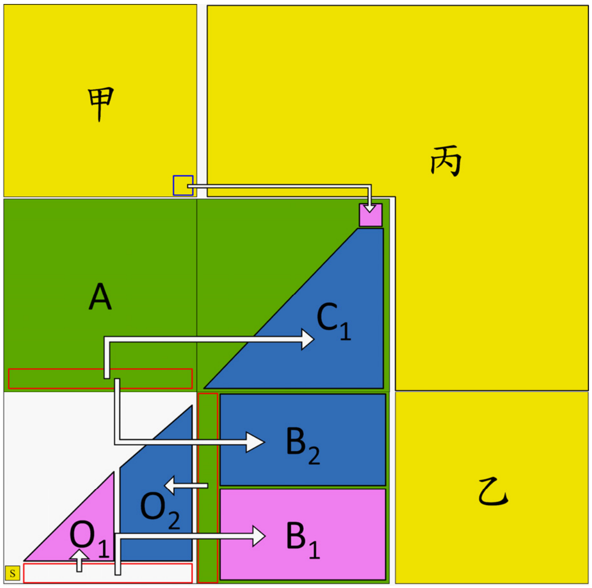


圖 11−8

參考資料

游復廷、蔣沁珊、吳書磊(2015)。滾積木遊戲探討。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會。

黃芊、林士芸、彭芷琦(2016)。方塊 pi 的奇幻漂流。苗栗縣第 56 屆中小學科學展覽會。

附錄：

4	5	6	7	7	6	7	8	9	9	8
7	8	9	9	8	7	8	9	10	10	9
7	8	9	9	8	7	8	9	10	10	9
6	7	8	8	7	6	7	8	9	9	8
5	6	7	7	6	5	6	7	8	8	7
2	3	4	5	5	4	5	6	7	7	6
5	6	7	8	8	5	6	7	8	8	7
5	7	8	9	8	5	7	8	9	9	7
4	7	8	8	7	4	7	8	9	9	6
3	6	7	7	6	3	6	7	8	8	5
s	3	4	5	5	2	5	6	7	7	4

1×1×4 木條的局部最少移動次數表

4	5	6	7	8	7	6	7	8	9	10	9	8
7	8	9	10	9	8	7	8	9	10	11	10	9
8	9	10	11	10	9	8	9	8	11	12	11	10
7	8	9	10	9	8	7	8	9	10	11	10	9
6	7	8	9	8	7	6	7	8	9	10	9	8
5	6	7	8	7	6	5	6	7	8	9	8	7
2	3	4	5	6	5	4	5	6	7	8	7	6
5	6	7	8	9	8	5	6	7	8	9	8	7
6	7	8	9	10	9	6	7	8	9	10	9	8
5	8	9	10	9	8	5	8	9	10	11	10	7
4	7	8	9	8	7	4	7	8	9	10	9	6
3	6	7	8	7	6	3	6	7	8	9	8	5
s	3	4	5	6	5	2	5	6	7	8	7	4

1×1×5 木條的局部最少移動次數表