圓內接 n 邊形之正弦方程式

李輝濱

嘉義縣私立同濟高級中學

壹、前言

三角函數的領域裡，有個著名的三角形正弦定理；而現在，圓內接奇數邊多邊形亦擁有這個正弦定理。但詳盡研究圓內接偶數邊多邊形的各性質，卻發現其並沒有這個家喻戶曉的定理；相對地，找到了圓內接偶數邊多邊形有一個由分式型正弦項特殊組合成的四項型方程式。顯然，奇數邊形與偶數邊形的各種數學性質差異很大，將此兩種方程式類型相比較，則形成各異其趣的絕妙規律性；也都能展現出簡潔完美的恒等式特質。

以下正文的推證敘述中，將從較簡易的三角形、圓內接四邊形、五邊形、六邊形等分析起，逐次推廣至一般化的圓內接 n 邊形。以嚴謹論證，翔實地歸納演繹出一系列完整對照推理過程，並將全文綜合整理成清晰順暢的研究脈絡，鉅細靡遺地呈現出各類正弦方程式的性質來。

貳、本文

考慮任意一個圓內接 n 邊形 $A_1A_2...A_n$；令 R 為此圓半徑，並令各邊邊長為 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，…，$\overline{A_iA_{i+1}}=V_i$，…，$\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$，$\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，$\overline{A_nA_1}=V_n$，$1\le i\le n$，$i$ 與 n 皆為自然數。

而在以下正文的敘述推論驗證過程中 ,需要應用到下列 3 個引理：

引理 1. 一凸四邊形的四頂點 A，B，C，D 共圓時 ，如下圖 a，令邊長 $\overline{AB}=V_1$，$\overline{BC}=V_2$，$\overline{CD}=V_3$，$\overline{DA}=V_4$，則下列方程式(T−1)式必定恆成立，

$$\frac{\sin(A-B)}{V_4V_2}=\frac{\sin A}{V_4V_1}-\frac{\sin B}{V_1V_2} \qquad \text{(T−1)}$$

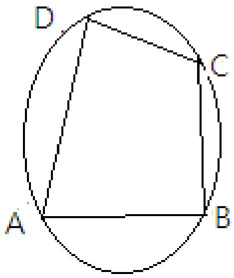


圖 a

證明：見圖 a， 一個圓內接四邊形，現在建立一直角坐標系，並將 A 點置於此坐標系的原點，再將直線段 AB 疊置於坐標系 X 軸，使兩者相重合。四邊形角 A 之方位角為 A，角 B 方位角為 $\pi-$B，角 C 方位角為 $2\pi-$B$-$C，角 D 方位角為 $3\pi-$B$-$C$-$D。由封閉四邊形及向量的正交性質，則此圓內接四邊形必有下列的四個相鄰邊長與頂角相關聯的正弦關係式；

$$V_1\sin 0+V_2\sin(\pi-B)+V_3\sin(2\pi-B-C)+V_4\sin(3\pi-B-C-D)=0$$

$$\Rightarrow V_2\sin B-V_3\sin(D-C)-V_4\sin C=0 \Rightarrow \frac{\sin B}{V_3V_4}-\frac{\sin(D-C)}{V_2V_4}-\frac{\sin C}{V_2V_3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin D}{V_3V_4}-\frac{\sin(D-C)}{V_2V_4}-\frac{\sin C}{V_2V_3}=0 \Rightarrow \frac{\sin(C-D)}{V_2V_4}=\frac{\sin C}{V_2V_3}-\frac{\sin D}{V_3V_4}$$

同理，只要將 C 點置於直角座標軸原點，直線段 CD 重疊於座標軸 X 軸，倣效上述過程，則可得 $\dfrac{\sin(A-B)}{V_4V_2}=\dfrac{\sin A}{V_4V_1}-\dfrac{\sin B}{V_1V_2}$ (T−1)

以上（T−1）式證明完成，同時，此引理 1.的逆敘述也必然成立（用歸謬法可證）。接下來之後的許多推演證明過程都會重複應用此性質。

引理 2. 圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 c，連接對角線長 $\overline{A_1A_3}=S$，令邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$ 且頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3$，對此圓內接四邊形，下列關係式（T-2）式必定恆成立；$\dfrac{\sin\theta_2}{SV_1}+\dfrac{\sin\theta_3}{V_4S}=\dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}$（T-2）

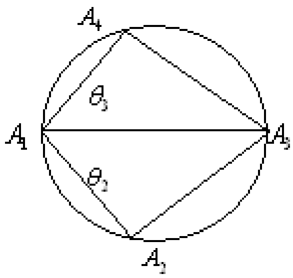


圖 c

證明：見圖 c，四邊形一頂角 $A_1=\theta_2+\theta_3$，並令另一對角線 $\overline{A_2A_4}=p$，弦長 $\overline{A_1A_2}$，所對應之圓周角為 θ_1，弦長 $\overline{A_2A_3}$，所對應之圓周角為 θ_2，而弦長 $\overline{A_3A_4}$ 所對應之圓周角為 θ_3，弦長 $\overline{A_4A_1}$ 所對應之圓周角為 θ_4，圓半徑為 R，則利用弦與圓周角性質，可得下列關係式；$S=2R\sin A_2=2R\sin A_4$ 且 $p=2R\sin A_1=2R\sin A_3$ 及 $\overline{A_2A_3}=V_2=2R\sin\theta_2$ 與 $\overline{A_3A_4}=V_3=2R\sin\theta_3$，$\overline{A_1A_2}=V_1=2R\sin\theta_1$，$\overline{A_4A_1}=V_4=2R\sin\theta_4$，

由 $\dfrac{\sin\theta_2}{SV_1}+\dfrac{\sin\theta_3}{V_4S}=\dfrac{\sin\theta_2}{S\cdot 2R\sin\theta_1}+\dfrac{\sin\theta_3}{2R\sin\theta_4\cdot S}=\dfrac{1}{2RS}\left(\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}+\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\right)$

$$=\frac{1}{2RS}\cdot\frac{\sin\theta_2\cdot\sin\theta_4+\sin\theta_1\cdot\sin\theta_3}{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_4}=\frac{1}{2RS}\cdot\frac{\sin\theta_2\cdot\sin\theta_4+\sin\theta_1\cdot\sin\theta_3}{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_4}\cdot\frac{2R\cdot 2R}{2R\cdot 2R}$$

$=\dfrac{1}{2RS}\cdot\dfrac{V_2V_4+V_1V_3}{V_1V_4}$ 再利用 Ptolemy 定理，得$=\dfrac{1}{2RS}\cdot\dfrac{S\cdot p}{V_1V_4}=\dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}$

故 $\dfrac{\sin\theta_2}{SV_1}+\dfrac{\sin\theta_3}{V_4S}=\dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}$ (T−2) 得證，

同時，此引理 2. 的逆敘述也必然成立(用歸謬法即可證明)。同樣地，接下來之後的許多推演證明過程也都會重複應用此性質。

引理 3. 一個圓內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，今任意選取一頂點；假設選到頂點 A_n，如圖 d，此頂點處的頂角 A_n 恰是由 $(n-2)$ 個不同圓周角所組成，即 $A_n=\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{n-3}+\theta_{n-2}$，並令邊長 $\overline{A_nA_1}=S_n=V_n$，$\overline{A_nA_2}=S_2$，$\overline{A_nA_3}=S_3$，$\overline{A_nA_4}=S_4$，……，$\overline{A_nA_{n-3}}=S_{n-3}$，$\overline{A_nA_{n-2}}=S_{n-2}$，$\overline{A_{n-1}A_n}=S_{n-1}=V_{n-1}$，則下列相關的邊角關係方程式（T−3）式必定恆成立；$\dfrac{\sin\theta_1}{S_nS_2}+\dfrac{\sin\theta_2}{S_2S_3}+\dfrac{\sin\theta_3}{S_3S_4}\cdots$

$\dfrac{\sin\theta_{n-3}}{S_{n-3}S_{n-2}}+\dfrac{\sin\theta_{n-2}}{S_{n-2}S_{n-1}}=\dfrac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n}$ （T−3）

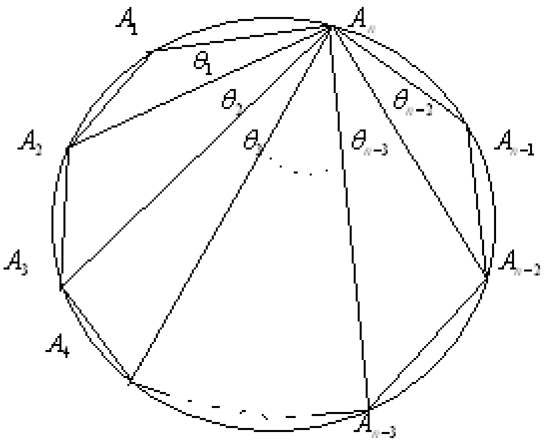


圖 d

證明：見圖 d，

(1) 先觀察圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_n$，則利用引理 2.性質，可得下式；

$$\frac{\sin\theta_1}{S_nS_2}+\frac{\sin\theta_2}{S_2S_3}=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{S_nS_3} \qquad \text{(d−1)}$$

(2) 再觀察圓內接四邊形 $A_1A_3A_4A_n$，再利用引理 2.性質及（d−1），可得下式；

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{S_nS_3}+\frac{\sin\theta_3}{S_3S_4}=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{S_nS_4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{S_nS_2}+\frac{\sin\theta_2}{S_2S_3}+\frac{\sin\theta_3}{S_3S_4}=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{S_nS_4} \qquad \text{(d−2)}$$

(3) 同理，繼續倣效上述(2)之推證，使每次只增加一個圓周角，直到最後推導至觀察圓內接四邊形 $A_1A_{n-2}A_{n-1}A_n$，再利用引理 2.性質，即可得下式；

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3\cdots+\theta_{n-3})}{S_nS_{n-2}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{S_{n-2}S_{n-1}}=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{n-3}+\theta_{n-2})}{S_nS_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{S_nS_2}+\frac{\sin\theta_2}{S_2S_3}+\frac{\sin\theta_3}{S_3S_4}+\cdots+\frac{\sin\theta_{n-3}}{S_{n-3}S_{n-2}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{S_{n-2}S_{n-1}}=\frac{\sin A_n}{S_{n-1}S_n}$$

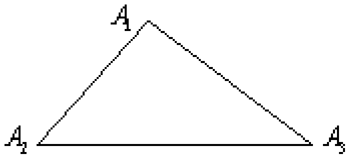
$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{S_nS_2}+\frac{\sin\theta_2}{S_2S_3}+\frac{\sin\theta_3}{S_3S_4}+\cdots+\frac{\sin\theta_{n-3}}{S_{n-3}S_{n-2}}+\frac{\sin\theta_{n-2}}{S_{n-2}S_{n-1}}=\frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n} \qquad \text{(T−3)}$$

以上（T−3)式證明完成。

同樣地，此引理 3.的逆敘述也必然成立(用歸謬法即可證明)

接下來開始進入本文主題的演繹證明，其完整流程如下；

A、三角形的邊角正弦方程式



圖(1)

(A−1) 見圖(1)，令三角形的邊長各為 $V_1=\overline{A_1A_2}$，$V_2=\overline{A_2A_3}$，$V_3=\overline{A_3A_1}$，而此三角形的外接圓半徑為 R，由 $\sin(A_1-A_2)=\sin A_1\cos A_2-\cos A_1\sin A_2$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A_1-A_2)}{\sin A_1\sin A_2}=\cot A_2-\cot A_1 \Rightarrow \frac{\sin(A_1-A_2)}{V_3V_2}=\frac{\cot A_2-\cot A_1}{4R^2} \qquad (1)$$

又由 $\sin A_1=\sin(\pi-A_2-A_3)=\sin(A_2+A_3)=\sin A_2\cos A_3+\cos A_2\sin A_3 \Rightarrow \dfrac{\sin A_1}{\sin A_2\sin A_3}$

$$=\cot A_2+\cot A_3 \Rightarrow \frac{\sin A_1}{\sin A_2\sin A_3}=\cot A_2+\cot A_3 \Rightarrow \frac{\sin A_1}{V_3V_1}=\frac{\cot A_2+\cot A_3}{4R^2} \qquad (2)$$

同理，再得 $\dfrac{\sin A_2}{V_1V_2}=\dfrac{\cot A_1+\cot A_3}{4R^2}$ (3)

比較 (1)、(2)、(3)式，則得 $\dfrac{\sin(A_1-A_2)}{V_3V_2}=\dfrac{\sin A_1}{V_3V_1}-\dfrac{\sin A_2}{V_1V_2}$ (4)

(A−2) 仿照上段過程，再得下列兩式 $\dfrac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\dfrac{\sin A_2}{V_1V_2}-\dfrac{\sin A_3}{V_2V_3}$ (5)

$\dfrac{\sin(A_3-A_1)}{V_2V_1}=\dfrac{\sin A_3}{V_2V_3}-\dfrac{\sin A_1}{V_3V_1}$ (6)

觀察 (4)、(5)、(6)式，則證得 $\dfrac{\sin(A_1-A_2)}{V_3V_2}+\dfrac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\dfrac{\sin(A_3-A_1)}{V_2V_1}=0$ (7)

則方程式(4)、(5)、(6)式及方程式 (7) 即為三角形的邊角正弦方程式。

B、圓內接四邊形

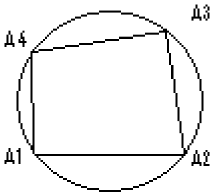


圖 2

(B−1) 見圖 2，一個圓內接四邊形，令 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$，$\overline{A_4A_1}=V_4$，

對此圓內接四邊形，有下列關係；$\dfrac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}=\dfrac{\sin A_3}{V_2V_3}-\dfrac{\sin A_4}{V_3V_4}$ (4−1)

方程式(4−1) 的幾何意義表示出；一多邊形的任三個相鄰邊的四頂點共圓時，(4−1)式必成立、此(4−1)式是由引理 1.所得結果之直接應用。

(B−2) 同理 ，仿照上述引理 1.的過程 ，可得下列三式;

$\dfrac{\sin(A_4-A_1)}{V_3V_1}=\dfrac{\sin A_4}{V_3V_4}-\dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}$ （4−2）

$\dfrac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}=\dfrac{\sin A_1}{V_4V_1}-\dfrac{\sin A_2}{V_1V_2}$ （4−3）

$\dfrac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\dfrac{\sin A_2}{V_1V_2}-\dfrac{\sin A_3}{V_2V_3}$ （4−4）

(B−3) 因此，將以上 (4−1)，(4−2)，(4−3)，(4−4) 相加即得下式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_1)}{V_3V_1}=0 \quad （4−5）$$

此 (4−5)式與上述三角形的第 7 式具有相同類型的數學結構

(B−4) 再檢視方程式 (4−1)，(4−3)，由於兩對角相互補,可得下式；

$$\sin(A_1-A_2)=-\sin(A_3-A_4)\Rightarrow\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_4V_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}=0 \quad （4−6）$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A_1}{V_4V_1}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_4}{V_3V_4}=0\Rightarrow\frac{\sin A_1}{V_4V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4} \quad （4−7）$$

(B−5) 綜合以上之推導結果；方程式 (4-5)，(4-6)與(4-7)三式即為圓內接四邊形的三組相異邊角正弦方程式

C、圓內接五邊形

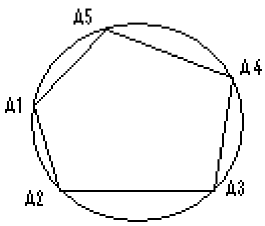


圖 3

(C−1) 見圖 3，先考慮 A_1,A_2,A_3,A_4 此四頂點、由於三個相鄰邊的四頂點共圓，故由引理 1.下式必成立； $\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3}$ （5−1）

同理，再考慮另四頂點 A_2,A_3,A_4,A_5 則下式亦必成立；

$$\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}=\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_4}{V_3V_4} \quad （5−2）$$

(C−2) 此外，另可得其餘的三個同類型方程式，從而得到下式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_5V_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\frac{\sin(A_5-A_1)}{V_4V_1}=0 \quad （5−3）$$

(C−3) 圓內接五邊形正弦定理，其方程式如下；R 為圓內接五邊形之半徑

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)}=\frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)}=-2R$$

此 (5−4)式之證明請見本篇參考文獻之 1

(C−4) 方程式 (5−3)，(5−4)即為圓內接五邊形的兩組相異邊角正弦方程式

D、圓內接六邊形

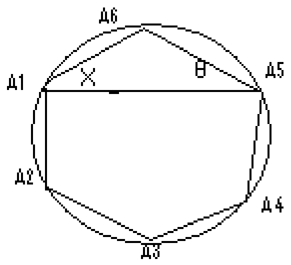


圖 4

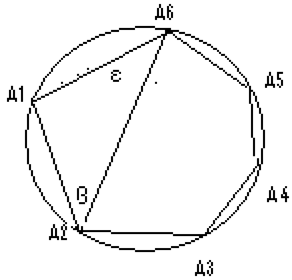


圖 5

(D−1) 見圖 4 的圓內接六邊形，考慮 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 頂點，恰形成圓內接五邊形，則利用其正弦定理，可得下列關係式；令頂點 1 與頂點 5 的連線長為 d

$$\frac{d}{\sin\left(A_2+A_4\right)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_1-x)}=\frac{V_3}{\sin(A_5-\theta+A_2)} \quad （6−1）$$

此處 $d=V_5\cos\theta+V_6\cos x$ 且 $V_5\sin\theta=V_6\sin x$ 由（6−1）式，可得

$$V_2\sin(A_2+A_4)=d\sin(A_1+A_4-x)=(V_5\cos\theta+V_6\cos x)\cdot\sin(A_1+A_4-x)$$

$$=V_5\cos\theta\cos x\sin(A_1+A_4)-V_5\cos\theta\sin x\cos(A_1+A_4)+V_6\cos^2 x\sin(A_1+A_4)$$

$$-V_6\cos x\sin x\cos(A_1+A_4)$$

$$=V_5\cos\theta\cos x\sin(A_1+A_4)+V_6(1-\sin^2 x)\sin(A_1+A_4)-V_5(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\cos(A_1+A_4)$$

$$=V_5\cos\theta\cos x\sin(A_1+A_4)+V_6\sin(A_1+A_4)-V_6\sin^2 x\sin(A_1+A_4)-V_5\sin(\theta+x)\cos(A_1+A_4)$$

$$=V_5\cos\theta\cos x\sin(A_1+A_4)+V_6\sin(A_1+A_4)-V_5\sin\theta\sin x\sin(A_1+A_4)-V_5\sin A_6\cos(A_1+A_4)$$

$$=V_5\cos(\theta+x)\sin(A_1+A_4)+V_6\sin(A_1+A_4)-V_5\sin A_6\cos(A_1+A_4)$$

$$=-V_5\cos A_6\sin(A_1+A_4)+V_6\sin(A_1+A_4)-V_5\sin A_6\cos(A_1+A_4)$$

$$=-V_5\sin(A_1+A_4+A_6)+V_6\sin(A_1+A_4)=V_6\sin(A_1+A_4)-V_5\sin(A_1-A_2)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_2+A_4)}{V_5V_6}=\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2V_5}-\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_6V_2}\Rightarrow-\frac{\sin A_6}{V_5V_6}=\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2V_5}-\frac{\sin A_1}{V_6V_1}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2V_5}-\frac{\sin A_1}{V_6V_1}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}=0 \quad （6−2）$$

(D−2) 同理，再由 (6−1)式，可得下列另一組關係式；

$$V_3\sin(A_2+A_4)=d\sin(A_2+A_5-\theta)=(V_5\cos\theta+V_6\cos x)\cdot\sin(A_2+A_5-\theta)$$

仿照 (D−1)的推導過程，將上式展開 ,變換關係後，再化簡，組合，可得

$$V_3\sin(A_2+A_4)=V_5\sin(A_2+A_5)-V_6\sin(A_2+A_5+A_6)=V_5\sin(A_2+A_5)+V_6\sin(A_4-A_5)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}-\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}=0 \quad （6−3）$$

(D−3)

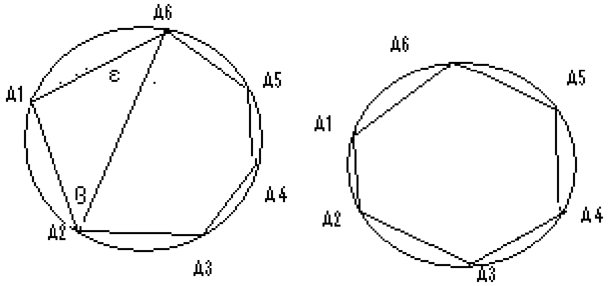


圖 5

見圖 5 的圓內接六邊形，再考慮 A_2, A_3, A_4, A_5, A_6；五頂點，恰形成圓內接五邊形，則利用其正弦定理，可得下列關係式；令頂點 2 與頂點 6 的連線長為 w

$$\frac{w}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6-\varepsilon)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_2-\beta)} \quad (6-4)$$

此處 $w=V_6\cos\varepsilon+V_1\cos\beta$ 且 $V_1\sin\beta=V_6\sin\varepsilon$ 由（6−4）式，可得

$$V_3\sin(A_3+A_5)=w\sin(A_2+A_5-\beta)=(V_6\cos\varepsilon+V_1\cos\beta)\cdot\sin(A_2+A_5-\beta)$$

再仿照 (D−1)的推導過程，將上式展開，變換關係後，再化簡，組合，可得

$$V_3\sin(A_3+A_5)=V_1\sin(A_2+A_5)-V_6\sin(A_1+A_2+A_5)=V_1\sin(A_2+A_5)-V_6\sin(A_2-A_3)$$

$$\Rightarrow V_1\sin(A_2+A_5)-V_6\sin(A_2-A_3)+V_3\sin A_1=0\Rightarrow\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}-\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_3V_1}+\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}-\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=0 \quad (6-5)$$

(D−4) 接下來，觀察方程式 (6−2)，(6−3)，(6−5)，發現將(6−2)與(6−5)兩式相加，即得

$$\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2V_5}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2V_5}+\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}=-\left(\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}\right) \quad (6-6)$$

再觀察此方程式 (6−6)，其內涵包括全部六個內角及四段邊長，這是圓內接六邊形的必然性質；也是平面凸六邊形在六段邊長皆固定情況下，適當調整其各內角角度而成最大面積的必然結果、此外,還可得另外兩個同類型方程式如下；

$$\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3V_6}+\frac{\sin(A_3+A_6)}{V_4V_1}=-\left(\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_1}{V_6V_1}\right) \quad (6-7)$$

$$\frac{\sin(A_3+A_6)}{V_4V_1}+\frac{\sin(A_4+A_1)}{V_5V_2}=-\left(\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}\right) \quad (6-8)$$

(D−5) 再由方程式 (6−3)減去方程式 (6−5)，即得下式；

$$\frac{\sin A_4}{V_3V_4}-\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}-\frac{\sin A_3}{V_2V_3}-\frac{\sin A_1}{V_6V_1}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A_1}{V_6V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}\qquad(6-9)$$

(D−6) 再仿效前述(C−1)與(C−2)的推導過程，可得另類第三型方程式，如下；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_6V_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}$$

$$+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}+\frac{\sin(A_6-A_1)}{V_5V_1}=0\qquad(6-10)$$

(D−7) 再將(6−9)式的右三項移到左側，再變換成下式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_6V_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}=0\qquad(6-11)$$

(D−8) 綜合以上分析，將此圓內接六邊形推證結果歸納如下 ；

第一組方程式(6−6)，(6−7)，(6−8)；第二組方程式(6−9)；第三組方程式為(6−10)；第四組方程式為(6−11)：得圓內接六邊形共計有四組相異的邊角正弦方程式。

接下來，比較對照上述由三角形至六邊形所有推導過程與結果，將此分析論證作一個歸納類推，並推廣至一般化的圓內接 n 邊形；而 n 有奇數型與偶數型兩種類型且各自有其獨特的邊角正弦方程式組。

G、圓內接奇數邊 n 邊形

下圖 11 是任一圓內接奇數邊 n 邊形，令邊長 $\overline{A_nA_1}=V_n$，$\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2$，$\overline{A_3A_4}=V_3$, ……, $\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3}$ ， $\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2}$ ， $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$

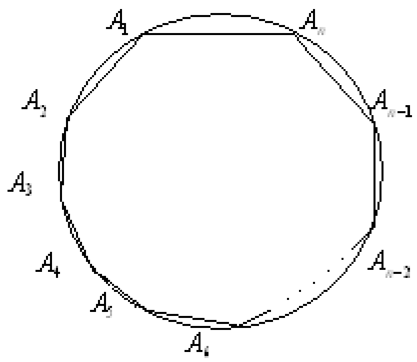


圖 11

(G−1) 見圖 11，同理，依次仿效引理 1.可再得下列方程式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_nV_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}+$$

$$\cdots\cdots+\frac{\sin(A_{n-2}-A_{n-1})}{V_{n-3}V_{n-1}}+\frac{\sin(A_{n-1}-A_n)}{V_{n-2}V_n}+\frac{\sin(A_n-A_1)}{V_{n-1}V_1}=0 \quad (\text{g}-1)$$

(G−2) 圓內接奇數邊 n 邊形的正弦定理，其敘述內容如下；

一個圓內接奇數邊 n 邊形，n 為奇數，令 R 為此圓半徑，對任一自然數 t ，由此 n 邊形的各邊長與各內角所組成的下述一般化公式 (g−2)式恆成立；

$$\frac{V_t}{\sin\left[\sum_{j=1}^{\frac{1}{4}\left[2(n-t)-1-(-1)^t\right]} A_{t+2j}+\sum_{j=1}^{\frac{1}{4}\left[2t-1+(-1)^t\right]} A_{2j-\frac{1+(-1)^t}{2}}\right]}=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2R \quad (\text{g}-2)$$

此處，$1\le t\le n$ ，$t,j\ni N$ ，$\overline{A_tA_{t+1}}=V_t$ 是第 t 邊邊長，且規定下列關係式；

$$\sum_{j=1}^{0}A_{t+2j}=0 \text{ ， } \sum_{j=1}^{0}A_{2j}=0 \text{ ， } \sum_{j=1}^{0}A_{2j-1}=0$$

證明：略，請見本篇參考文獻之 1

(G−3) 方程式 (g−1)，(g−2) 為圓內接奇數邊 n 邊形的兩組相異邊角正弦方程式

H、圓內接偶數邊 n 邊形

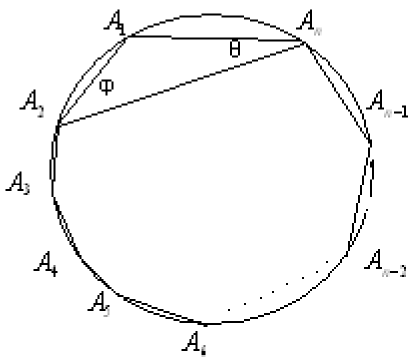


圖 12

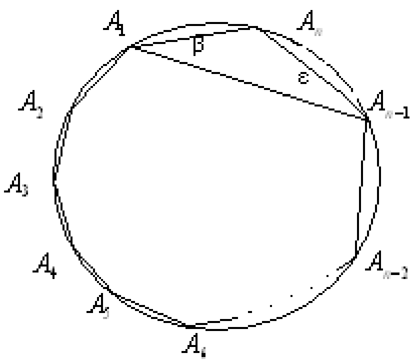


圖 13

(H−1) 見圖 13 的圓內接偶數邊 n 邊形，考慮 $A_1,A_2,A_3,A_4,\cdots,A_{n-2},A_{n-1}$ 等 n−1 個奇數頂點，恰形成圓內接奇數邊 n−1 邊形，則利用此圓內接奇數邊形之正弦定理，可得下列關係式；令頂點 1 與頂點 n−1 的連線長為 p

$$\frac{p}{\sin\left(A_2+A_4+\cdots+A_{n-2}\right)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+\cdots+A_{n-2}+A_1-\beta)}\;\textbf{......}\;(\text{h}-\text{a})$$

此處 $p=V_{n-1}\cos\varepsilon+V_n\cos\beta$ 且 $V_{n-1}\sin\varepsilon=V_n\sin\beta$ 由 h−a)式並仿照圓內接六邊形(D−1)之計算過程，可得 $V_2\sin(A_2+A_4+\cdots+A_{n-2})=p\times\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2}-\beta)$ 經代換，化簡運算後，得下式； $V_2\sin(A_2+A_4+\cdots+A_{n-2})$

$=V_n\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})-V_{n-1}\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2}+A_n)$

$$\Rightarrow V_2\sin(A_2+A_4+\cdots+A_{n-2})=V_2\sin[(\frac{n}{2}-1)\pi-A_n]=(-1)^{\frac{n}{2}}V_2\sin A_n$$

$$=V_n\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})-V_{n-1}\sin[A_1+(\frac{n}{2}-1)\pi-A_2]$$

$$\Rightarrow V_n\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})-V_{n-1}\sin(A_1-A_2)\cos[(\frac{n}{2}-1)\pi]-(-1)^{\frac{n}{2}}V_2\sin A_n=0$$

$$\Rightarrow V_n\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})+(-1)^{\frac{n}{2}}V_{n-1}\sin(A_1-A_2)-(-1)^{\frac{n}{2}}V_2\sin A_n=0$$

$$\Rightarrow V_n\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})+(-1)^{\frac{n}{2}}V_{n-1}\sin(A_1-A_2)+(-1)^{\frac{n}{2}+1}V_2\sin A_n=0$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})}{V_2V_{n-1}}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_1}{V_nV_1}+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n}=0\ldots\;(\text{h}-1)$$

(H−2) 見圖 12 的圓內接偶數邊 n 邊形，考慮 $A_2,A_3,A_4,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n$ ，等 $n-1$ 個奇數頂點，恰形成圓內接奇數邊 $n-1$ 邊形，則利用此圓內接奇數邊形之正弦定理，可得下列關係式；令頂點 2 與頂點 n 的連線長為 y

$$\frac{y}{\sin\left(A_3+A_5+\cdots+A_{n-1}\right)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+\cdots+A_{n-1}+A_2-\phi)}\;\textbf{......}\;(\text{h}-\text{b})$$

此處 $y=V_n\cos\theta+V_1\cos\phi$ 且 $V_n\sin\theta=V_1\sin\phi$ 由(h−b)式並仿照圓內接六邊形(D−1)之計算過程，可得 $V_3\sin(A_3+A_5+\cdots+A_{n-1})=y\times\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1}-\phi)$ 經代換，化簡運算後，得下式； $V_3\sin(A_3+A_5+\cdots+A_{n-1})$

$=V_1\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})-V_n\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1}+A_1)$

$$\Rightarrow V_3\sin(A_3+A_5+\cdots+A_{n-1})=V_3\sin[(\frac{n}{2}-1)\pi-A_1]=(-1)^{\frac{n}{2}}V_3\sin A_1$$

$$=V_1\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})-V_n\sin[A_2+(\frac{n}{2}-1)\pi-A_3]$$

$$\Rightarrow(-1)^{\frac{n}{2}}V_3\sin A_1=V_1\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})+(-1)^{\frac{n}{2}}V_n\sin(A_2-A_3)$$

$$\Rightarrow V_1\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})+(-1)^{\frac{n}{2}}V_n\sin(A_2-A_3)+(-1)^{\frac{n}{2}+1}V_3\sin A_1=0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})}{V_3V_n}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{\sin A_1}{V_nV_1}=0 \quad \ldots(\text{h}-2)$$

(H−3) 由方程式(h−1)與(h−2)相加並化簡，移項，得下式；

$$\frac{\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-2})}{V_2V_{n-1}}+\frac{\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-1})}{V_3V_n}=$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n} \qquad (\text{h}-3-1)$$

同理，由圓內接偶數邊 n 邊形圖形的對稱性，又可獲得與(h−3−1)同類型的下列 n−1 個方程式；

$$\frac{\sin(A_2+A_5+A_7+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1})}{V_3V_n}+\frac{\sin(A_3+A_6+A_8+\cdots+A_{n-2}+A_n)}{V_4V_1}=$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_1}{V_nV_1} \qquad (\text{h}-3-2)$$

$$\frac{\sin(A_3+A_6+A_8+\cdots+A_{n-2}+A_n)}{V_4V_1}+\frac{\sin(A_4+A_7+A_9+\cdots+A_{n-3}+A_{n-1}+A_1)}{V_5V_2}=$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_2}{V_1V_2} \qquad (\text{h}-3-3)$$

$$\frac{\sin(A_{n-2}+A_1+A_3+\cdots+A_{n-7}+A_{n-5})}{V_{n-1}V_{n-4}}+\frac{\sin(A_{n-1}+A_2+A_4+\cdots+A_{n-6}+A_{n-4})}{V_nV_{n-3}}=$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_{n-3}}{V_{n-4}V_{n-3}} \qquad (\text{h}-3-(\text{n}-2))$$

$$\frac{\sin(A_{n-1}+A_2+A_4+\cdots+A_{n-6}+A_{n-4})}{V_nV_{n-3}}+\frac{\sin(A_n+A_3+A_5+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3})}{V_1V_{n-2}}$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_1}{V_nV_1}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_{n-2}}{V_{n-3}V_{n-2}} \qquad (\text{h}-3-(\text{n}-1))$$

$$\frac{\sin(A_n+A_3+A_5+\cdots+A_{n-5}+A_{n-3})}{V_1V_{n-2}}+\frac{\sin(A_1+A_4+A_6+\cdots+A_{n-4}+A_{n-2})}{V_2V_{n-1}}$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\sin A_{n-1}}{V_{n-2}V_{n-1}} \qquad (\text{h}-3-n)$$

現在將上述由 (h−3−1)～(h−3−n)的 n 個方程式統整歸納成下列一般化方程式；

$$\frac{\sin\left(A_{t-1}+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-2}A_{t+2j}\right)}{V_{t-3}V_t}+\frac{\sin\left(A_t+\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-2}A_{t+2j+1}\right)}{V_{t-2}V_{t+1}}=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sin A_{t-2}}{V_{t-3}V_{t-2}}+\frac{\sin A_{t+1}}{V_tV_{t+1}}\right)\quad(\text{h}-3)$$

此處 $1\le t\le n$，而 n 為 $n\ge 6$ 的偶數，t 與 j 皆為自然數，$\overline{A_tA_{t+1}}=V_t$ 此處亦規定 $A_{t+n}=A_t$，$A_{-1}=A_{n-1}$，$A_{-2}=A_{n-2}$，$A_0=A_n$，$V_{t+n}=V_t$，$V_{-1}=V_{n-1}$，$V_{-2}=V_{n-2}$，$V_0=V_n$

當 n=4，$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-2}A_{t+2j}=\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-2}A_{t+2j+1}=0$，(h−3)式恰能滿足圓內接四邊形的邊角關係，因此，方程式(h−3)式恰涵蓋了所有圓內接偶數邊 n 邊形一般化邊角正弦關係方程式的結果。

(H−4) 同理，依次仿效引理 1.可再得下列方程式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_nV_2}+\frac{\sin(A_2-A_3)}{V_1V_3}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_4-A_5)}{V_3V_5}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}+$$

$$\cdots\cdots+\frac{\sin(A_{n-2}-A_{n-1})}{V_{n-3}V_{n-1}}+\frac{\sin(A_{n-1}-A_n)}{V_{n-2}V_n}+\frac{\sin(A_n-A_1)}{V_{n-1}V_1}=0\quad(\text{h}-4)$$

(H−5) 現在要證明下列方程式 (h−5)式必定成立；

$$\frac{\sin A_1}{V_nV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{n-5}}{V_{n-6}V_{n-5}}+\frac{\sin A_{n-3}}{V_{n-4}V_{n-3}}+\frac{\sin A_{n-1}}{V_{n-2}V_{n-1}}=$$

$$=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{n-4}}{V_{n-5}V_{n-4}}+\frac{\sin A_{n-2}}{V_{n-3}V_{n-2}}+\frac{\sin A_n}{V_{n-1}V_n}\quad(\text{h}-5)$$

以數學歸納法證明之；

(i) 當 $n=4$, $n=6$，前述之(4−7)與(6−9)式皆已證明完成，

(ii) 接下來，令 n=k≥8 時，k 為偶數，下式成立；

$$\frac{\sin A_1}{V_kV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-5}}{V_{k-6}V_{k-5}}+\frac{\sin A_{k-3}}{V_{k-4}V_{k-3}}+\frac{\sin A_{k-1}}{V_{k-2}V_{k-1}}$$

$$=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-4}}{V_{k-5}V_{k-4}}+\frac{\sin A_{k-2}}{V_{k-3}V_{k-2}}+\frac{\sin A_k}{V_{k-1}V_k}\quad(\text{h}-6)$$

(iii) 則 $n=k+2$ 時，見下圖 14，令邊長 $\overline{A_1A_k}=S$，$\overline{A_kA_{k+1}}=V_k$，$\overline{A_{k+1}A_{k+2}}=V_{k+1}$，$\overline{A_{k+2}A_1}=V_{k+2}$，且頂角 $A_1=\theta+\phi$，$A_k=\alpha+\beta$，

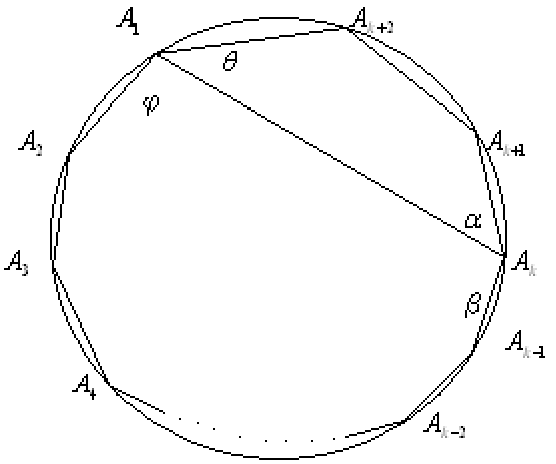


圖 14

現在將圖 14.中的圓內接偶數邊 k+2 邊形分割成一個四邊形 $A_1A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 及另一個圓內接偶數邊 k 邊形 $A_1A_2\cdots A_k$，而對此圓內接偶數邊 k 邊形 $A_1A_2\cdots A_k$ 言，可得到與 (h−6)式完全相似的關係式如下；

$$\frac{\sin\phi}{SV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-5}}{V_{k-6}V_{k-5}}+\frac{\sin A_{k-3}}{V_{k-4}V_{k-3}}+\frac{\sin A_{k-1}}{V_{k-2}V_{k-1}}$$

$$=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-4}}{V_{k-5}V_{k-4}}+\frac{\sin A_{k-2}}{V_{k-3}V_{k-2}}+\frac{\sin\beta}{V_{k-1}S} \quad (\text{h}-7)$$

接下來，對圓內接四邊形 $A_1A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 言，也有如下關係式；

$$\frac{\sin\theta}{V_{k+2}S}+\frac{\sin A_{k+1}}{V_kV_{k+1}}=\frac{\sin\alpha}{SV_k}+\frac{\sin A_{k+2}}{V_{k+1}V_{k+2}} \quad (\text{h}-8)$$

再接著，將(h−7)式與(h−8)式兩式相加，即得下式(h−9)式；

$$\frac{\sin\theta}{V_{k+2}S}+\frac{\sin A_{k+1}}{V_kV_{k+1}}+\frac{\sin\phi}{SV_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-5}}{V_{k-6}V_{k-5}}+\frac{\sin A_{k-3}}{V_{k-4}V_{k-3}}+\frac{\sin A_{k-1}}{V_{k-2}V_{k-1}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{SV_k}+\frac{\sin A_{k+2}}{V_{k+1}V_{k+2}}+\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-4}}{V_{k-5}V_{k-4}}+\frac{\sin A_{k-2}}{V_{k-3}V_{k-2}}+\frac{\sin\beta}{V_{k-1}S} \quad (\text{h-9})$$

再利用引理 2.的性質及圖 14.的相關關係，可得以下兩式；

$$\frac{\sin\theta}{V_{k+2}S}+\frac{\sin\phi}{SV_1}=\frac{\sin A_1}{V_{k+2}V_1} \quad (\text{h}-\text{c}) \text{ 與 } \frac{\sin\alpha}{SV_k}+\frac{\sin\beta}{V_{k-1}S}=\frac{\sin A_k}{V_{k-1}V_k} \quad (\text{h}-\text{d})$$

最後，將 (h−c)式與 (h−d)式兩式一起代入 (h-9)式中，即得下式；

$$\frac{\sin A_1}{V_{k+2}V_1}+\frac{\sin A_3}{V_2V_3}+\frac{\sin A_5}{V_4V_5}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-5}}{V_{k-6}V_{k-5}}+\frac{\sin A_{k-3}}{V_{k-4}V_{k-3}}+\frac{\sin A_{k-1}}{V_{k-2}V_{k-1}}+\frac{\sin A_{k+1}}{V_kV_{k+1}}$$

$$=\frac{\sin A_2}{V_1V_2}+\frac{\sin A_4}{V_3V_4}+\frac{\sin A_6}{V_5V_6}+\cdots\cdots+\frac{\sin A_{k-4}}{V_{k-5}V_{k-4}}+\frac{\sin A_{k-2}}{V_{k-3}V_{k-2}}+\frac{\sin A_k}{V_{k-1}V_k}+\frac{\sin A_{k+2}}{V_{k+1}V_{k+2}} \quad (\text{h}-5)$$

以上 n = k + 2 時，也證明完成；即對所有的正偶數 n≥ 4，此方程式 (h-5)式必定成立、故對任意圓內接偶數邊 n 邊形，方程式(h−5)式必定成立

(H−6)再利用(h−5)式之結果，移項後，組合成下式；

$$\frac{\sin(A_1-A_2)}{V_nV_2}+\frac{\sin(A_3-A_4)}{V_2V_4}+\frac{\sin(A_5-A_6)}{V_4V_6}+\frac{\sin(A_7-A_8)}{V_6V_8}+\frac{\sin(A_9-A_{10})}{V_8V_{10}}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{\sin(A_{n-5}-A_{n-4})}{V_{n-6}V_{n-4}}+\frac{\sin(A_{n-3}-A_{n-2})}{V_{n-4}V_{n-2}}+\frac{\sin(A_{n-1}-A_n)}{V_{n-2}V_n}=0 \quad (\text{h}-11)$$

(H−7) 綜合上述推理結果，得第一組方程式為由(h−3−1)～(h−3−n)的 n 個方程式組合成的一般化方程式 (h−3)式及第二組方程式 (h−4)，第三組方程式為 (h−5)，第四組方程式為 (h−11)，因此，任意一個圓內接偶數邊 n 邊形共計有上述四組相異的邊角正弦方程式。

K、現在，要根據以上本文內所有敘述證明結果歸納成下列的一個定理；

定理：圓內接 n 邊形邊角正弦方程式定理

考慮任意一個圓內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$；令 R 為此圓半徑，邊長 $\overline{A_1A_2}=V_1$，$\overline{A_2A_3}=V_2,\overline{A_3A_4}=V_3,\ldots\ldots,\overline{A_{n-3}A_{n-2}}=V_{n-3},\overline{A_{n-2}A_{n-1}}=V_{n-2},\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1},\overline{A_nA_1}=V_n$

(1) 如圖 11，當 n 為奇數，$n = 2k+1$，對任一自然數 k，由此 n 邊形的各邊長與各內角所組成的上述步驟 G.的一般化公式（g−1）式與（g−2）式恆成立。

(2) 如圖 12，當 n 為偶數，$n = 2k+4$，對任一自然數 k，由此 n 邊形的各邊長與各內角所組成的上述步驟 H.的一般化公式：第一組方程式 (h−3−1) ～ (h−3−n)的 n 個方程式及 (h−3)式 .第二組方程式 (h−4)式, 第三組方程式為 (h−5)式，第四組方程式為 (h−11)式，此四組相異的邊角正弦方程式皆恆成立，而 $n = 4$ 時，其為圓內接四邊形，則方程式 (4−5)，(4−6)與(4−7)三式即為圓內接四邊形的三組相異邊角正弦方程式。

參、結論

總結以上精實完整的敘述證明後，知悉；任意圓內接多邊形，無論是奇數邊形或是偶數邊形都能找到本文定理內所提出的各組邊角正弦一般化方程式。觀察這些方程式特徵， 發現每一個分式項結構的分母都只包含兩段邊長，而此兩邊長與其同分式項分子的內角在次序上也具有呈現某種規律分佈。最棒的是所有方程式都呈現出規律對稱性！這

樣的特徵使得在證明及敘述表達這些方程式內涵時即能體驗出堅定明確的認同感。
本文研究內容中所尋獲的引理與定理內各類不同數學型態的邊角正弦方程式，皆能完美地描述出圓內接多邊形的性質，並極其完整的將其一般化公式詮釋表達出來。有趣的是比較奇數邊形與偶數邊形所得之方程式的結果，各有異同；偶數邊形公式較多且兩者都有唯一完全相同的（g-1）式與 （h-4）式，偶數邊形與奇數邊形之差異性質在本文的理論推證過程中至為明顯。兩者中完全相異的方程式 ；如方程式（h-3）式與（g-2）式，皆各有其奧妙獨特之處。

內心裡總是深深覺得；或許圓內接 n 邊形，及平面凸 n 邊形中還有許多不同於本文所提出的邊角正弦方程式，以及邊角餘弦方程式。像圓內接 n 邊形的面積，其公式內容必與被選定的邊長及頂角有關。無論如何那些未知的關係式皆需要大家共同來探索發掘。希望本文的提出，能得到大眾熱烈的迴響。

參考文獻

李輝濱，圓內接奇數邊多邊形正弦定律的推廣，科學教育月刊第 369 期

蔡聰明，數學拾貝----星空燦爛的數學，三民書局

黃武雄，中西數學簡史，1980，人間文化事業公司

世部貞市郎：幾何學辭典，1988，九章出版社

林聰源：數學史----古典篇，1995，凡異出版社

6 項武義：基礎幾何學，五南圖書出版公司

7 項武義：基礎分析學，五南圖書出版公司

E.W. Hobson : A treatise on plane and Advanced trigonometry, Dover , 1957

Z.A. Melzek : Invitation to geometry, John Wiley and Sons , 1983