
閒話天燈

周鑑恆

私立萬能科技大學 航空暨工程學院

壹、前言

天燈相傳是三國時期諸葛亮發明的。孔明先生為了傳遞軍情，利用熱空氣上升的原理，以開口朝下的輕質大紙袋，兜住大紙袋下方燃燒的燃料而產生熱空氣，使整個紙袋和其中熱空氣所受到的浮力大於其總重量，紙袋於是冉冉升空，彷彿高掛蒼穹的燈籠，稱之為天燈。

約從上世紀 90 年代，台北平溪重新恢復了在元宵節放天燈的活動，放天燈遂逐漸成為台灣家喻戶曉的觀光盛宴，天燈的用途則由傳遞消息轉變成祈福或許願。時至今日放天燈已不僅僅流行於台灣及中國大陸，日本、泰國、波蘭、墨西哥、俄羅斯(聖彼得堡的海邊)等國家，都有放天燈的活動。

貳、天燈所受的浮力

與水有浮力的原理一樣，空氣浮力的成因，也是因為空氣受到重力而有重量。雖然空氣密度會隨著高度而遞減，也會受氣壓、氣溫、溼度的影響，但為方便以簡潔的理論進行分析，在天燈燈體尺寸高度範圍內，可以假設空氣的密度大致不變，並給一個近乎事實的數量，約 1.25 公斤/立方公尺。

因為高度每上升一公尺，大氣壓力就減少約 12.5 牛頓/平方公尺(約 1.2 公斤重/平方公尺)。然而，這樣的變化，與地表一平方公尺約 10 公噸重(100000 牛頓/平方公尺)的大氣壓力相比，其實只有萬分之一多一點。

根據阿基米得原理，無論空氣密度是否均勻，任何物體在空氣中所受的浮力，是因物體尺寸高度不同而不同的空氣壓力所造成的，也就等於所排開空氣的重量。

一立方公尺物體所受的空氣浮力約為 1.25 公斤重，其實並不是很小。但因為日常生活中的物體密度都比空氣大很多，所以不容易察覺空氣有浮力。例如：木材所受的空氣浮力，只有木材重量的數百分之一。就算是一立方公尺，重約 12 公斤的輕質保麗龍，受到 1.25 公斤重的浮力，也不過是約十分之一的重量。即使世界上最輕的物質－氣溶膠(Aerogel)，又稱固態烟，它的密度也比空氣的密度大 1~2 倍以上，還是不能在空氣中漂浮起來。

但溫度比氣溫高的熱空氣，它們的密度就可能明顯比空氣的密度低。再加上當物體的尺寸(例如物體某兩點間的距離)增加為原來的 N 倍時，物體之體積增加為原來的 N 的三次方倍，而物體之表面積只增

加為原來的 N 的二次方倍。所以體積愈大的天燈或氣球，薄薄的表面所佔的體積，相對於整體體積而言，所佔的比例即越少。雖然製作天燈的紙的密度比空氣密度大，只要製成的天燈夠大，天燈所受之浮力(正比於天燈的體積)，就能大於天燈的材料與其中熱空氣的總重量，而使天燈得以騰空。這與鋼鐵製的船可以浮在水中的情形非常相似。

參、計算浮力

為提綱挈領，假設天燈的形狀為圓柱狀，下方有一直徑較小的圓孔，如圖 1 所示，則體積(含製作天燈的紙本身的體積)為的天燈所受的浮力為：

$$B = V \cdot \rho_{out} \cdot g \dots\dots\dots(1)$$

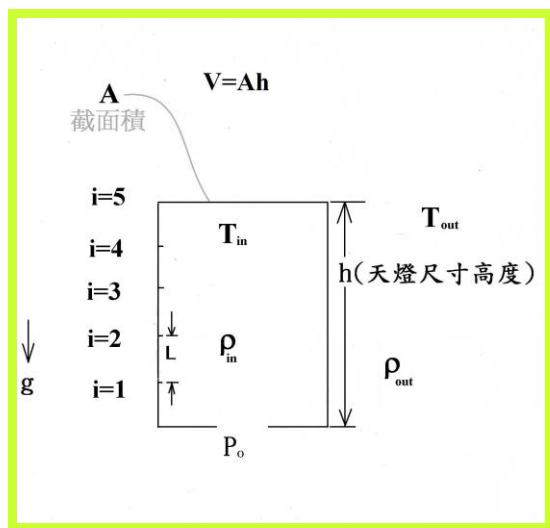


圖 1 圓柱型天燈

其中 g 為重力加速度， ρ_{out} 為當地的空氣密度，如上所述，假設為約 1.25 公斤/立方公尺。

如果天燈之外空氣溫度為 T_{out} ，天燈內空氣的溫度被加熱到 T_{in} ，而在氣球底部開口處天燈內外的氣壓應該相同，以 P_0 表示，則根據理想氣體方程式，同質量(假設都有 n 莫耳， R 為氣體常數)的空氣在天燈外面的體積 V_{out} 和在內部的體積 V_{in} 比為：

$$P_0 V_{out} = nRT_{out} ; P_0 V_{in} = nRT_{in} \dots(2)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{T_{out}}{T_{in}} \Rightarrow V_{in} = \frac{T_{in}}{T_{out}} V_{out} \dots(3)$$

所以天燈內外空氣密度比例為：

$$\rho_{in} = \rho_{out} \frac{T_{out}}{T_{in}} \dots\dots\dots(4)$$

而整個天燈的重量，就是紙袋與酬載的重量(設為 mg)加上熱空氣的重量 $V\rho_{in}g$

$$W = mg + V\rho_{in} \cdot g \dots\dots\dots(5)$$

只要浮力大於整個天燈的重量：

$$V\rho_{out}g > V\rho_{in} \cdot g + mg \quad \text{即} \\ V(\rho_{out} - \rho_{in})g > mg \dots\dots\dots(6)$$

也就是：

$$V\rho_{out} \left(1 - \frac{T_{out}}{T_{in}} \right) g > mg \dots\dots\dots(7)$$

氣球即能升空。

肆、天燈為什麼鼓鼓的

忽略緩緩上升天燈的加速度就可以進一步探討天燈受力的若干細節；如前所述，天燈內外的空氣密度分別為 ρ_{in} 、 ρ_{out} ，在天燈燈體高度範圍內差異的比例也都只約萬分之一，所以可視為定值。已知下方開口處天燈內外的壓的均為 P_0 ，在

天燈外部高度每上升 L ，則氣壓下降 $\rho_{out}gL$ ，各個高度 ($i=1,2,3,4,5$) 的氣壓就分別是

$$P_i = P_0 - \rho_{out}giL \dots\dots\dots(8)$$

在天燈內部，因為熱空氣密度較小，高度每上升 L ，氣壓只減少 $\rho_{in}gL$ ，各高度的氣壓分別是

$$P_i = P_0 - \rho_{in}giL \dots\dots\dots(9)$$

由此可知，在各個高度，天燈內部的氣壓事實上大於天燈外部的氣壓，

$$P_0 - \rho_{in}giL - (P_0 - \rho_{out}giL) = (\rho_{out} - \rho_{in})giL \dots\dots\dots(10)$$

這也就是為什麼天燈總是鼓鼓的原因。若依圖 1 所示分為五段，在天燈頂部的壓力差即達

$$\Delta P = (\rho_{out} - \rho_{in})5Lg = (\rho_{out} - \rho_{in})hg \dots\dots\dots(11)$$

所以作用在天燈紙袋與酬載上的向上淨力為

$$A(\rho_{out} - \rho_{in})gh = V(\rho_{out} - \rho_{in})g \dots\dots(12)$$

只要此力大於天燈紙袋與酬載的重量 mg ，天燈即可騰空，與利用阿基米得原理求出的結果相同。參見方程式(6)。

如果天燈外的空氣溫度 $T_{out}=300K$ ，天燈內空氣的溫度 $T_{in}=370K$ ，則可以發現：

$$\rho_{in} = \rho_{out} \frac{T_{out}}{T_{in}} = 1.01 \text{ 公斤/立方公尺}$$

天燈內空氣密度明顯減少約 25%。

但天燈內部，下方開口處與一公尺高的天燈頂處的氣壓相差無幾：

$$P_0 \approx 100000 \text{ 牛頓/平方公尺}$$

$$\approx P_{\text{天燈頂部}} \approx 99990.1 \text{ 牛頓/平方公尺}$$

天燈外面，下方開口處與一公尺高的天燈頂處的氣壓也相差無幾：

$$P_0 \approx 100000 \text{ 牛頓/平方公尺}$$

$$\approx P_{\text{天燈頂部}} \approx 99987.75 \text{ 牛頓/平方公尺。}$$

這自洽(self consistent)地說明；忽略天燈內外空氣密度隨天燈尺寸高度的變化，是合理的(實測結果也確是如此)。在這條件之下，本文中才可以很簡單應用理想氣體方程式，求出天燈內外的空氣密度；並且很簡單求出隨天燈尺寸高度變化而變化的氣壓、與天燈所受的空氣浮力。

伍、影響天燈浮力的因素

不等式(7)中， V 代表天燈紙袋的體積， mg 為紙袋與酬載的重量，天燈紙袋的體積增大 8 倍，紙袋重量只增加 4 倍(如前所述)，紙袋與酬載的重量增加的比例明顯較小。所以天燈體積越大，不等式(7)就越容易滿足，天燈就越能成功升空。此外，雖然天燈紙的導熱係數不高，但很薄，會很快的散熱(作者利用天燈表面散熱，創作出一款能夠轉動的天燈，因為既像走馬燈，又似天燈，稱之為走馬天燈，參見圖 2)，天燈的體積越越大，表面積相對越小，反而有助於天燈內的空氣保持高溫 T_{in} ，使天燈更易於升空。同樣的道理，身軀龐大的大象，能散熱的表面積相對不足，只好演化出大大的耳朵幫忙散熱了。



圖 2 走馬天燈。

不等式(7)也顯示： ρ_{out} 越大，不等式越容易滿足。意思是說：天燈所在位置的空氣密度越高，天燈也越容易升空。雖然在天燈尺寸高度範圍內(只有一、兩公尺)，空氣密度變化的確不大，但是在天燈飛行的高度範圍內(約幾百公尺)，空氣密度的變化就較明顯。筆者有實際經驗，同樣大小的天燈，在臺灣平地能飛，在海拔約 1000 公尺的蒙古高原上就飛不起來了。民間方便製做、尺寸高度在一兩公尺的天燈，在海拔不高的地區才能夠升空，所以放天燈的習俗多流行在低海拔地區。

陸、無所不在的熱對流

熱氣球可謂現代版天燈，連主要部件都十分雷同，熱氣球包括氣球本身、吊籃(裝載燃料和燃燒器及乘客)。熱氣球是人類最早的飛行工具，第一次熱氣球載人飛行的壯舉完成於 1783 年 11 月，比萊特兄弟的飛機載人飛行整整早了一百二十年。1999 年瑞士人皮卡德和英國人布萊恩·瓊斯駕駛 Breitling Orbiter 3，一舉打破熱氣球飛行距離與飛行時間兩項世界紀錄，首

次完成不落地環球飛行。2005 年印度富商則創造了飛行高度 21027 公尺的世界紀錄。

說穿了，天燈、熱氣球，與許多自然現象都源自於熱對流。煮湯時，爐火(即高溫發光的燃燒產物與空氣)向上熱對流，加熱鍋子，鍋中的水因熱對流迅速升溫並混合，把食物均勻地煮熟。風力發電的風(包括全球規模的大氣環流)，就是因太陽加熱地表不均勻而引起熱對流所造成的。當然，大氣的熱對流還常伴隨水蒸汽凝結時釋出潛熱，更加速熱對流。利用相同的原理，人們製成熱管，用伴隨相變的工作流體來傳熱。甚至有些科學家利用人造熱對流，設計出太陽能煙囪(solar chimney)的太陽能發電系統。地球上液態的水卻發生奇異的熱對流，溫度逐漸降至冰點以下的水，反而向上對流到水面並形成浮冰。太陽對流層中激烈的熱對流，在太陽表面形成密密麻麻的米粒結構。更令人驚奇的是：軟的地函也進行極慢的熱對流，造成板塊(只有幾大塊)漂移和地震。

天燈、熱氣球也許只是大人的科學玩具，無處不在的熱對流現象，卻與我們的生活，甚至地球的生命起源息息相關。

參考文獻

周鑑恆，走馬天燈，海峽前鋒文化事業有限公司，2014 年。