
診斷教學對一位小六生擬題表現之影響 ——以時間計算問題為例

邱微惠¹ 劉祥通^{2*}

¹臺南市立仁光國民小學

²國立嘉義大學 數理教育研究所

摘要

數學擬題乃是以數學計算式子，給學生編製數學應用問題的活動，此活動著眼於建立數學概念與生活情境相結合。學生的擬題表現是一種診斷工具，用以了解數學概念與數學句子的關係是否合理。再者，根據研究者教學經驗，時間計算問題對於高年級學生有很大的困擾，於是先做擬題活動的預試，再挑選出一位對時間計算問題有困擾的國小六年級女學童進行擬題活動及診斷教學的研究。本研究旨在探討個案關於時間計算問題的擬題表現，探討診斷教學的策略，以及診斷教學對個案擬題表現的轉變。

本研究發現：在診斷教學前，個案對擬題的表現不夠理想，「時刻」與「時距」發生混淆；在診斷教學時，研究者利用提問以製造認知衝突，利用數線圖表徵等策略，幫助個案建立了時刻與時距的關係；診斷教學後，個案的擬題表現有顯著的進步。本文又根據研究結果提出五點診斷教學上的建議。

關鍵詞：時間計算問題、數學擬題、診斷教學、數學解題

壹、研究背景與目的

近年來，擬題已獲得數學教育社群更多的重視(Brown 和 Walter, 1993; Silver, 1994)，但研究者發現，在時間方面的擬題研究以往較少被關注。Brown 和 Walter (1993) 認為，就擬題教學方式來說，學童在擬題的過程中，一方面主動理解數學概念，一方面促使數學概念和生活情境結合，同時提供老師一種獨特的診斷工具，

從學生的擬題寫作成果中，顯示出學生數學概念混淆不清的地方。因此，教師若能在課堂上適度調配擬題活動，將有助於學生理解數學概念，進而增進數學相關能力。

然而，根據研究者的教學經驗，學童對於時間計算教材之學習，一旦脫離生活情境，有關文字題的處理，則多以記憶、熟知的計算技巧來解題。因此，研究者將時間計算的問題與生活情境相結合，想關心如「1 時 30 分+2 時 20 分 \times 3」及「(1 時 30 分+2 時 20 分) \times 3」的時間四則運算擬題

* 為本文通訊作者

是否相同？並對於「3 時 10 分—1 時 50 分」的算式是否能擬出「時刻—時刻=時刻」、「時距—時距=時距」或是「時刻—時距=時刻」等文字題，關於「時刻」、「時距」混合的時間概念問題是否有迷思？同時，透過診斷教學策略來釐清學生在時間學習的迷思概念。本研究旨在探討個案關於時間計算問題的擬題表現，並探討診斷教學的策略，以及診斷教學對個案擬題表現的轉變。

貳、文獻探討

一、國小學童時間問題的學習

Piaget (1969) 認為，時間並非一種先驗的概念，而是個體在發展過程中，隨著認知結構的不斷重組而逐漸構設形成的。而 Piaget 更進一步指出，國小六年級學童在時間概念的發展已達精確衡量期，多數學童已能精確計算從開始到終止的時距。

在南一書局(2014)國小數學教科書中，為了釐清觀念，並幫助學童學習，便將時間加減問題的運算進一步分類，也就是將時刻與時距的關係分類，其分類如下：

(一)時間量的加減(時距±時距=時距)

如：叔叔參加賽車，第一場花了 2 小時 16 分，第二場花了 1 小時 58 分，兩場共花了多少時間？

(二)兩時刻間的時間量(時刻—時刻=時距)

如：妹妹從 8 時 45 分開始上數學課，到 9 時 25 分下課，數學課的時間有

多久？

(三)一段時間之前或之後的時刻(時刻±時距=時刻)

如：姊姊下午去聽音樂會，結束時是下午 10 時 5 分，音樂會長 1 小時 56 分，音樂會是在下午幾時幾分開始？

在「時刻」與「時距」的時間概念，鍾靜(1998)指出，若能將時間的表徵直線化後，對「時刻」和「時距」的關連性較易突顯，也就是將整條數線的線段長代表「時距」，「時刻」為時間的位置，即數線上的點。

另外，蕭毓秀和鍾靜(2002)的研究顯示，學生對於時間的應用問題的解題表現上，有下列迷思：(一)以題目的關鍵字來決定算式的運算符號：學生會從題目中的關鍵字來決定所寫算式的運算符號，也常依據題目中數字出現的先後順序，來安排數學問題的運算式。(二)不管題意，會以大的時間量減小的時間量的概念迷思，如：從今日的 22 時 20 分到明日的 6 時 40 分，經過了多久？學生的答案是以 22 時 20 分減去 6 時 40 分，卻沒有顧及題意及跨日的時距問題，研究者尚認為學生可能忽略了在 22 時 20 分和 6 時 40 分之間尚有一 24 時的分界點，若能以此分界點將時距分成兩個時段來計算就容易解決此問題了。此時，對於時間是一個連續流動量的心像及量感的建立是非常需要的。

綜上所述，許多學生不清楚時間是連續不斷的，或無法區分時刻的先後，若先

建立學生時間是流動性的概念，再嘗試使用外在表徵，如：使用時間工具或利用畫線段圖來展現時間的連續性，標出時刻的位置並明白時間量，讓學生了解時刻和時距的關係，應可獲得完整的時間概念。

二、數學擬題

梁淑坤（1994）根據 Reitman 所提出的四種問題結構，「問題條件與目標皆已定義清楚」、「問題條件已定義清楚，問題目標未定義清楚」、「問題條件未定義清楚，問題目標已定義清楚」和「問題條件與目標皆未定義清楚」來將數學擬題活動分類。梁淑坤（1994）強調：「自己想出一個題目來就是『擬題』。在擬題的過程中，擬題者會將自己的數學知識和生活經驗連結起來，並且把既有的情境、人物、事件、數字、圖形等條件建立關係，組織關係擬出一個新的數學題目。」例如：給一個算式「9時30分+40分」，可以擬出「上午9時30分上課，一節課是40分鐘，下課是幾時幾分？」的數學文字題來。

Lin 和 Leng（2008）的研究顯示，擬題任務不只為學生提供機會去說明他們所知的數學知識，也讓教師觀察學生數學學習和思考模式。因此，透過學生所形成的數學題目，可以讓教師看到孩童的學習困難處，也可幫助學生了解數學概念。

研究者將擬題定義為：學生根據教師的佈題，依照佈題中所給予的條件，再連結自己已具備的數學知識和生活經驗，創造出一個新的數學題目。

三、擬題在數學學習的角色

荷蘭的數學教育改革致力於發展真實數學教育（Realistic Mathematics Education, 簡稱 RME），強調真實情境中的數學學習，也就是數學教育應與真實世界相連結（Freudenthal, 1971）。Freudenthal(1971)認為 RME 的論點是將數學視為是人類的活動，數學是從做數學中（doing mathematics）而獲得的，數學是幫助學習者與周遭環境產生意義的一種工具，而真實情境是用來作為學習數學的起始點。

數學建模強調現實世界與數學世界之間的連結（connections），是一種知識統整的數學能力。數學建模是藉由模式來探究現象的規律，其中必定包含介於待建模的真實情境和此模式的數學表徵之間的轉變(Mason & Davis, 1991)。左台益和胡政德(2009)在研究中指出如果再利用解題時的元素(問題，答案)將現實世界和數學世界各區分成兩個部分，分別是情境模式、情境結果、數學模式與數學結果等四個元素。其中現實世界與數學世界之間的交互作用和複雜的轉換與推論關係如圖 2-1。

Blum(2002)在研究中指出，數學建模的歷程主要包含了四個層面：理想化、數學化、數學操作和解釋評估，而且數學建模是在這四個層面中循環。

(一)數學化：情境模式=>數學模式(問題)

一般的時間應用題解題的擬定計畫，如：「下午2點開始寫功課，每樣寫30分鐘，寫了3樣，寫完是何時？」=>「 $2+0.5\times 3$ 」

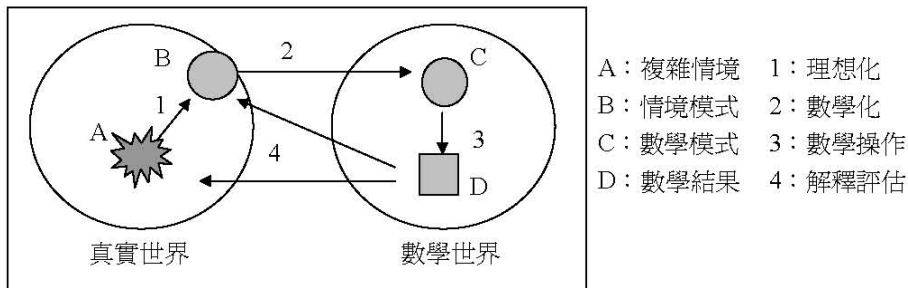


圖 2-1 數學建模循環模式

資料來源：左台益、胡政德(2009)。準教師從真實情境中建構數學模式的認知因素分析與機制。當代教育研究季刊，17(4)，61-101。

(二) 數學操作：數學模式(問題) \Rightarrow 數學結果

一般的時間應用題解題的執行計畫，如：「 $2+0.5\times 3$ 」 \Rightarrow 「3.5」

(三) 解釋評估：數學結果 \Rightarrow 真實情境

回顧答案的合理性，如：解釋與評估「下午 2 點開始寫功課，每樣寫 30 分鐘，寫了 3 樣，寫完是何時？」，此答案是否為「下午 3.5」？此答案是否合理？

研究者認為，以上數學建模的三個過程，與擬題的過程有緊密的關係。當學生依據教師所佈置的計算問題進行擬題活動時，先要擬出題目，然後依照解題策略進行解題活動。在規劃解題策略時，學生有時候會發現，已擬好的題目中有些條件不完整，所以無法順利進行解題策略，這時就必須再重新檢視已擬好的題目，做修正或重新進行擬題活動。

本研究之擬題乃屬於將「數學模式」轉換成「情境模式」的歷程，也就是上圖數學化的逆向過程，如：「 $2+0.5\times 3$ 」 \Rightarrow 「下

午 2 點開始寫功課，每樣寫 30 分鐘，寫了 3 樣，寫完是何時？」；或將「數學結果」據以「解釋評估」的歷程，於真實情境中解釋數學結果的意義，並檢查模式是否合理，如：擬出數學文字題「下午 2 點開始寫功課，每樣寫 30 分鐘，寫了 3 樣，寫完是何時？」之後，檢查答案是否為下午 3 點半？，是否合理？

三、診斷教學

國外學者 Bell (1993) 指出，數學教師在教學時，如能針對學生出現的迷思概念，提供診斷教學策略，設計能引起認知衝突的活動，將有效地根除學生的迷思概念。

近年來，國內外教育學者（林福來、黃敏晃和呂玉琴, 1996; Bell, 1994）將「診斷」的概念應用在數學教學上，強調在教學過程中，教師需先診斷出學生的迷思概念，再針對迷思概念製造出認知衝突的情境，使學生察覺、承認自己的錯誤，進而調整其原有的認知。溫世展(2011)的研究

指出診斷教學法除了能製造學童的認知衝突，進而達到概念澄清與糾正的效果，有效改善學童的迷思概念之外，並能節省教師設計教學活動所需花費的時間。

而鄭淑珍(2003)在國小五年級學童時刻與時間量概念之診斷教學研究中，其教學策略則是利用認知衝突的方式使學生重新對時刻與時間量這兩個概念重新思考，並使用數線同構的方式突顯時間量的概念，使學生瞭解時刻和時間量的關係。結果顯示採用認知衝突診斷教學策略有助於學生釐清時刻與時間量方面的迷思概念。

因此，本研究的診斷教學步驟為：先診斷學生在擬題時所犯的迷思概念，再針對學生的迷思概念製造認知衝突，讓學生發現所編擬的文字題是否合理，最後調整認知，評估擬題改變的成效。

參、研究方法

本研究是為了解國小六年級學童在時間計算問題的擬題表現，以及透過診斷教學策略，來探討個案在擬題表現的轉變。本研究採個案研究法，而研究者為主要研究工具，並以立意取樣的方式，選取臺南市某國小六年級學童一班進行時間計算問題的擬題預試，預試的目的在挑選研究對象並充實擬題經驗。預試後，研究者利用週三下午進行一次正式擬題施測及兩次晤談，並於兩次晤談時加入診斷教學，每次晤談歷時 1.5 小時，並於診斷教學三週後，再進行一次結構相同但數字不同的類似題來檢驗個案的擬題表。

一、擬題活動的安排

本研究乃採用 Reitman 的第二種結構「問題條件已定義清楚，問題目標未定義清楚」，還有梁淑坤(1997)的「算式類」擬題類型來進行研究與討論，更有特色的是在預試工作單中引用坪田耕三(Tsubota)的「模仿法或類題法」(引自梁淑坤，1994)給學生擬題，以彌補擬題經驗的不足。例如：姐姐看偵探小說上下冊，看完上冊花了 2 時 48 分，看完下冊只花了 1 時 54 分，請問她總共花了多少時間看完偵探小說？請模仿上述的方法寫一個「2 時 35 分 + 1 時 50 分」的數學文字題。大多學生對於時間計算的解題幾乎能掌握，但在擬題的部分，預試時，學生擬出與工作單較類似且情境相仿的數學文字題。

二、受試個案

從預試的表現中選取一名具有時間計算問題迷思，且表達能力佳者為研究的對象，進行訪談與診斷教學。此研究對象為女生，活潑開朗，與研究者互動良好，亦敢於表達內心的想法，但對數學較沒信心。在預試時，研究者發現個案在時間計算問題的解題幾乎都能掌握，但對時間計算問題的擬題卻存有一些概念的迷思與觀念的誤解，如：擬「10 時 20 分 - 6 時 50 分」的數學文字題時，個案擬出「妹妹從上午 10 時 20 分開始看電影，下午 6 時 50 分看完電影，請問妹妹共看了多久？」，研究者認為個案有起始時刻與結束時刻混淆的情形，因而引起研究者想深入探討的興趣。

三、研究工具

個案研究是質性研究的一種，研究者是最主要的研究工具。茲分述研究者的角色如下：

(一)負責擬題工作單

本研究的擬題工作單乃依據教育部(2008)九年一貫課程綱要中，關於時間計算問題的能力指標：「4-n-13 能解決複名數時間量的計算，以及時刻與時間量的加減問題。」和「5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。」，再參考康軒版於五下時加入時間的雙步驟(四則運算)計算問題，因此，研究者以時間的計算問題將工作單分為兩大層次，分別為「單步驟題」五題及「雙步驟題」五題，各個層次又依不同的時間概念的內涵而有「時間的加法」、「時間的減法」、「時間的乘法」、「時間的除法」及「時間的四則運算」五類子問題，並分別以擬題「算式類」的題型呈現。例如：第 1 題的單步驟題為「請擬出 2 時 45 分 +1 時 55 分的數學文字題」及第 9 題的雙步驟題為「請擬出(5 時 20 分—3 時 10 分) \times 9 的數學文字題」。

1. 內容效度：

擬題工作單含有單步驟與雙步驟題，涵蓋國小範圍各式時間計算問題，包括時間的加減、時間的乘除法、時間的四則計算等內容，所以此份工作單是有內容效度的工作單。

2. 專家效度：

為確認工作單問題的適切性，於工作單擬定後，特別請數學教育學者及具有多年任教數學課程經驗的教師，審視每道題目，來做適度地修正，例如原先工作單設計的第一題，「108 秒 +1 時 32 分 15 秒」，因考量個案尚無擬題經驗，不宜以多階單位的時間問題做為擬題的初始活動，因而將此題目修改為兩階單位的算式擬題「2 時 45 分 +1 時 55 分」。

3. 信度：

因考慮到擬題表現受個人擬題經驗的影響甚鉅，個案的擬題會因學習經驗與診斷教學人的作用而有很大的進步可能，故本研究工作單的信度並未列入考慮。但是教學前的擬題表現，與診斷教學後個案的改變是否有穩定？本研究將以類似題持續考驗個案，以增進資料分析的信度。

(二)擔任診斷教學工作

研究者利用診斷教學的時機，提供診斷教學的策略，包括認知衝突、數線圖表徵、解自己擬的文字題等，藉以提升個案的擬題能力，而研究者的提問策略與品質會影響研究結果，所以研究者是本研究的主要研究工具。

四、資料來源與分析

學童進行擬題的正式施測，主要透過擬題工作單的資料收集，來了解學童的擬題表現，再進行晤談，期望在學童擬出文字題之後，能進一步瞭解學童的背後想法

及進行診斷教學，所以工作單、晤談、以及診斷教學的對話是本研究的資料來源。

資料分析主要靠資料來源的三角交叉比對，例如，原案 2-9 請擬出「(5 時 20 分 - 3 時 10 分)×9」的數學文字題，個案在工作單上寫出「媽媽早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分才回來，連續做了 9 天？」，此種擬題，似乎透漏了她有起始時刻與結束時刻錯置的迷思，但是她在受訪時卻說，「媽媽從早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分」，就是下午 3 時 10 分減 5 時 20 分」，以上「所寫」與「所說」並不一致，研究者最後又發現，個案不會處理下午 3 時 10 分減 5 時 20 分的問題，也就是她不會將下午 3 時 10 分轉成 15 時 10 分，所以才有初始擬題時時間錯置的現象出現。

再者，資料的持續比對，例如在原案 2-6，個案在診斷教學後，似乎改善了擬題表現，研究者為了確認個案是否真正的進步，有給她一個類似題的計算式子，如：

「4 時 30 分 + 20 分 × 5」，請她再次擬題，她寫出如下的應用問題：「妹妹從下午 4 時 30 分開始寫功課，每樣功課要花 20 分鐘，一共有 5 樣，她什麼時候才能寫完功課？」，可見她已由診斷教學，改進了擬題表現，此乃資料的持續比對。

肆、研究結果與討論

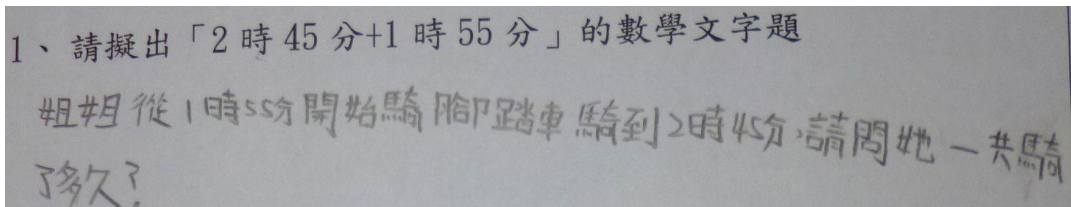
本研究結果與討論將分成「診斷教學前」、「診斷教學時」、「診斷教學後檢驗」三階段，分別探討個案的擬題表現與迷思概念。

一、診斷教學前的擬題表現

在教學前，研究者以時間計算問題中的單步驟題及雙步驟題，來考驗個案對於時間計算的擬題能力，個案能以「包含除」及「等分除」的結構來呈現時間的除法計算問題，但是擬題表現有下列缺失：

(一)受加法運算符號的影響，忽略了時刻不能相加，仍用「一共」的字眼來擬題

題目：請擬出「2 時 45 分 + 1 時 55 分」的數學文字題



原案 2-1

0101T：請你唸第一題的題目。

0102S：姐姐從 1 時 55 分開始騎腳踏車騎到 2 時 45 分，請問她一共騎了多久？

0103T：請你解釋一下你出的題目。

0104S：姐姐從 1 時 55 分開始騎腳踏車，然後騎到一個地方是 2 時 45 分，然後就問他總共騎了多久？

.....

0107T: 哪裡怪怪的?

0108S: 一共騎了多久?

.....

0113T: 請你跟我講 1 時 55 分, 你把它當作什麼?

0114S: 是一個時間點! 開始刻!

0115T: 是開始的時刻!

0116S: 嗯!

0117T: 那 2 時 45 分呢?

0118S: 終點!

0119T: 是結束的時刻!

0120S: 嗯!

0121T: 所以, 開始的時刻, 結束的時刻, 這樣怎麼知道騎多久?

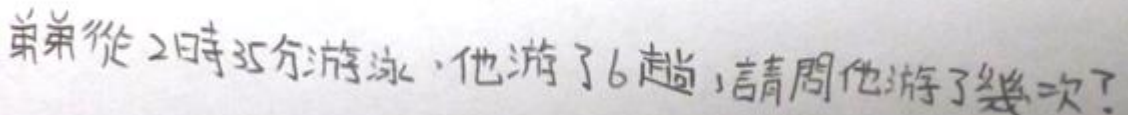
0122S: 就把它加起來, 知道他一共騎了多久?

分析: 個案將算式中的 1 時 55 分及 2 時 45 分視為開始的時刻及結束的時刻(行號 0114、行號 0118), 又因為是加法算式, 所以, 就擬出了「一共騎多久」的數學文字題來(行號 0122)。而蕭毓秀和鍾靜(2002)的研究指出, 在時間計算的解題中, 學童容易以题目的關鍵字來決定算式的運算符號。同樣的, 在擬題中, 本研究的個案仍以算式的加法運算符號, 來決定文字題的擬題應該用「一共」的關鍵字。

(二)「時刻」與「時距」的時間概念混淆(不了解時距可以當成被乘數, 但是時刻不能)

題目: 請擬出「2 時 35 分 \times 6」的數學文字題

3、請擬出「2 時 35 分 \times 6」的數學文字題



弟弟從 2 時 35 分游泳, 他游了 6 趟, 請問他游了幾次?

原案 2-3

0301T: 請你唸第三題的題目。

0302S: 弟弟從 2 時 35 分游泳, 他游了 6 趟, 請問他游了幾次?

.....

0308S: 應該是問他游了幾趟?

0309T: 你題目不是說他游了 6 趟?

0310S:

0311T: 好! 那我問你, 2 時 35 分, 你把他當成什麼?

0312S: 開始的時間!

0313T: 開始的時間? 來回游 6 趟嗎?

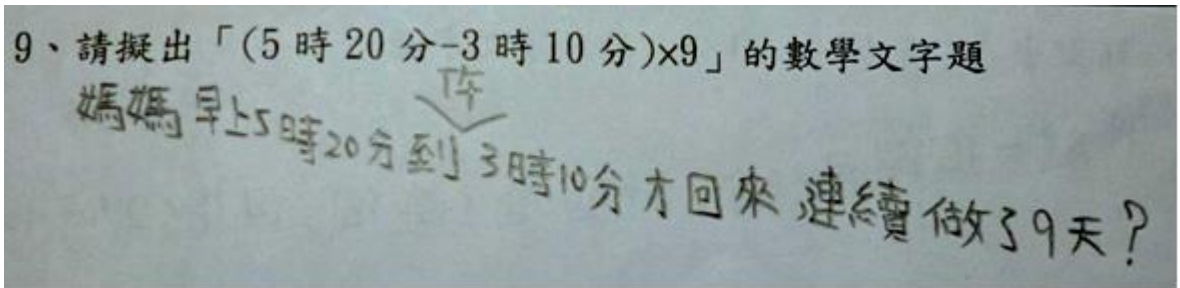
0314S: 對!

分析: 個案起先覺得「游了幾次」這句話問得怪怪的, 因為題目有說游了 6 趟了, 因此, 他覺得問法不對。後來, 他又表示 2 時 35 分是開始的時間(行號 0312),

因而以開始的時間乘以它的倍數，所以，研究者認為個案有時刻、時距混淆的迷思概念，不了解時距可以當成被乘數，但是時刻不能。

(三)個案受算式中時間出現的先後順序，有「起始時刻」及「結束時刻」錯置的迷思

題目：請擬出「(5時20分-3時10分) \times 9」的數學文字題



原案 2-9

0901T：請你唸第九題的題目。

0902S：媽媽早上5時20分到下午3時10分才回來，連續做了9天？

0903T：請你解釋一下這一題。

0904S：媽媽從早上5時20分到下午3時10分，就下午3時10分減5時20分，就是媽媽出去經過了多少時間，再去乘以9。

0905T：為什麼是下午3時10分減5時20分？

0906S：因為從早上5時20分到下午3時10分啊！

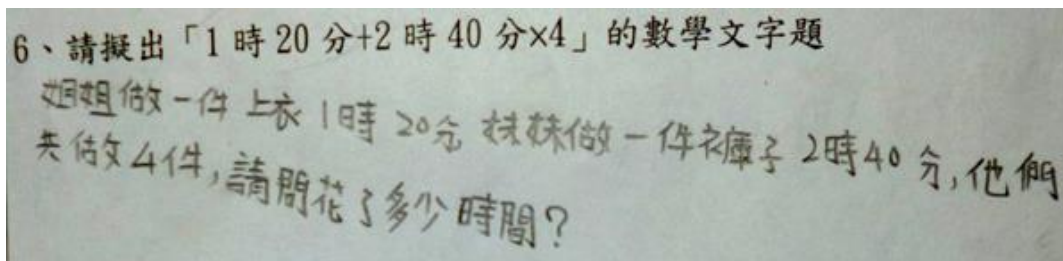
0907T：如何計算下午3時10分減5時20分呢？

0908S：(想了很久)我不會！

分析：個案起初依據算式中時間出現的先後順序，來進行擬題，因而擬出「從早上5時20分到下午3時10分」(行號0902)，當研究者請她解釋一下此題時，個案即說明「從早上5時20分到下午3時10分」計算時就是要用「下午3時10分來減5時20分」(行號0904)。個案雖知道要用下午(結束)時刻減去早上(起始)時刻(行號0906)，但是，她不會將下午3時轉換成15時(行號0908)，所以擬題時，個案有起始時刻及結束時刻錯置的敘述。

(四)不精熟四則運算規則，把「時距+時距 \times 倍數」的算式當成「(時距+時距) \times 倍數」的算式來擬題

題目：請擬出「1時20分+2時40分 \times 4」的數學文字題



原案 2-6

0601T: 請你唸第六題的題目。

0602S: 姐姐做一件上衣 1 時 20 分, 妹妹做一件褲子 2 時 40 分, 他們共做 4 件, 請問花了多少時間?

0603T: 請你解釋一下這一題!

0604S: 做一件衣服 1 時 20 分, 做一件褲子 2 時 40 分, 兩個的時間加起來, 再去乘以 4 件, 就可以知道他們兩個總共花了多少時間。

分析: 個案起初依據算式中時間出現的先後順序, 來進行擬題, 因而擬出「從早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分」(行號 0902), 當研究者請她解釋一下此題時, 個案即說明「從早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分」計算時就是要用「下午 3 時 10 分來減 5 時 20 分」(行號 0904)。個案雖知道要用下午(結束)時刻減去早上(起始)時刻(行號 0906), 但是, 她不會將下午 3 時轉換成 15 時(行號 0908), 所以擬題時, 個案有起始時刻及結束時刻錯置的敘述。

二、診斷教學時的擬題表現

在教學前, 研究者發現個案有「兩時刻相加」、「時刻、時距混淆」及「起始時刻和結束時刻混淆」的迷思, 後來又發現個案對於雙步驟時間計算擬題更不熟悉, 因此, 在進行診斷教學時, 藉由一些診斷教學的策略, 期盼個案能順利擬題成功。

(一)經提問以製造認知衝突, 個案調整認知, 提升了擬題的表現

題目: 請擬出「2 時 45 分+1 時 55 分」的數學文字題

原案 2-1

0123T: 嗯! 時刻和時刻可以相加嗎?

0124S:(笑), 好像不行耶!

0125T: 所以, 要加起來要用什麼?

0126S: 要有時間的量才可以相加! 兩個點是不能相加的!

0127T: 那你要怎麼調整題目?

0128S: 把其中一個點換成時間量!

0129T: 好! 那可以怎麼出?

0130S: 姐姐從這裡開始騎的時候是 1 時 55 分, 經過了 2 時 45 分, 那她總共騎了多久?

0131T: (畫圖表示出的題目)所以, 這題就可以用加的!

0132S: 對!

0133T: 那要問什麼?

0134S: 總共騎了多久?

0135T: 總共騎了多久? 你不是題目有說了嗎?

0136S: 喔! 應該要問騎到的時候!

0137T: 那你再幫我重新整理一下這題!

0138S: 姐姐從 1 時 55 分開始騎腳踏車, 騎了 2 時 45 分, 她騎到的時間是什麼時候?

0139T: 好!

分析: 因研究者質疑「時刻和時刻可以相加嗎?」(行號 0123)個案也認為兩個時刻

是兩個點，所以不能相加(行號 0126)。因此，他便做了調整，把其中一個時刻換成經過的時間量試試看，於是就擬出了「姊姊從 1 時 55 分開始騎腳踏車，經過了 2 時 45 分，她總共騎了多久？」(行號 0130)。接著，研究者畫數線圖解釋題意之後，再度提問，個案經由數線圖，以及自己的擬題，兩方對照之下，發現問得不對，應該是問到達的時候(行號 0136)，於是，便擬出了「姊姊從 1 時 55 分開始騎腳踏車，騎了 2 時 45 分，她騎到的時間是什麼時候？」的文字題。

在此題中，研究者則依據 Bell (1993) 及林福來 (1999) 提出的論點，研究者先診斷出個案的迷思，引起「時刻和時刻是否可以相加？」的認知衝突，個案經過反思之後，重新調整認知，因而擬出正確的數學文字題，破除了部分時間概念的迷思。

(二)經過研究者質疑，經多次提問教學，個案調整認知後，又再度產生迷思概念，以直線表徵重新溝通，建構正確的概念

題目：請擬出「2 時 45 分+1 時 55 分」的數學文字題

原案 2-3

0315T：開始的時間，怎麼算 6 趟？

0316S：.....是游一趟經過的時間！

.....

0319T：所以，題目可以怎麼出？

0320S：弟弟從某個時間開始游泳，經過了 2 時 35 分，他游了 6 趟，請問他游 6 趟花了多少時間？

0321T：這一次請你畫圖解釋一下！

0322S：(畫圖)(將一個線段 2 時 35 分切成 6 塊)弟弟從某個時間開始游泳，然後他經過了 2 時 35 分，他總共游了 6 趟，請問他游了 6 趟花了多少時間？

0323T：(指著線段)經過了 2 時 35 分，這段時間他游 6 趟.....

0324S：那就變成 2 時 35 分除以 6 了！

0325T：對啊！所以，要怎麼調整？

0326S：.....啊！弟弟從某個時間開始游泳，游一趟經過了 2 時 35 分，他游了 6 趟，請問他游 6 趟花了多少時間？

分析：經過研究者質疑「開始的時間可以算 6 趟嗎？」，個案想了又想，認為 2 時 35 分應該是經過的時間才對，於是就擬出了「弟弟從某個時間開始游泳，經過了 2 時 35 分，他游了 6 趟，請問他游 6 趟花了多少時間？」(行號 0320)，然而，研究者便根據個案的第二次擬題，以直線表徵，質疑「是 2 時 35 分的時間游了 6 趟嗎？」，他很快就發現題目就變成「2 時 35 分÷6」了(行號 0324)，因此，再經過第三次的擬題，個案終於可以擬出「弟弟從某個時間開始游泳，游一趟經過了 2 時 35 分，他游了 6 趟，請問他游 6 趟花了多少時間？」的數學文字題。

由此題中，研究者請個案將時間的表徵直線化，再經過幾次的提問後，重新建構正確的概念，因而順利擬題，證實了鍾靜(1998)的論述，將時間的表徵直線化，對解決時間概念的問題是有效的。

(三)個案在解自己擬的數學文字題時，發現與原來算式不符合，而調整認知、重新擬題目：請擬出「(5 時 20 分-3 時 10 分) \times 9」的數學文字題

9、請擬出「(5 時 20 分-3 時 10 分) \times 9」的數學文字題

媽媽早上5時20分到下午3時10分才回來，連續做了9天？

原案 2-9

0904S：媽媽從早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分，就下午 3 時 10 分減 5 時 20 分，就是媽媽出去經過了多少時間，再去乘以 9。

0905T：為什麼是下午 3 時 10 分減 5 時 20 分？

0906S：因為從早上 5 時 20 分到下午 3 時 10 分啊！

0907T：如何計算下午 3 時 10 分減 5 時 20 分呢？

0908S：(想了很久) 我不會！

0909T：那你出的題目跟原本算式一樣嗎？

0910S：不一樣！

0911T：為什麼不一樣？

0912S：前後時間要調換！

0913T：前後時間是什麼？

0914S：開始的時間和結束的時間。

0915T：所以，題目可以怎麼出？

0916S：媽媽從下午 3 時 10 分，工作到下午 5 時 20 分才回來，連續做了九天，問這九天一共用了多少時間？

分析：當研究者要求個案試著把自己擬的題目解釋一下，並列成算式時，個案發現與原本的算式不符合，是因為他將起始時刻和結束時刻調換了，重新修正後，便能擬出正確的數學文字題。

題目：請擬出「1 時 20 分+2 時 40 分 \times 4」的數學文字題

原案 2-6

0605T：嗯！所以，這一題算式要怎麼列？

0606S：1 時 20 分加 2 時 40 分，加起來的答案再乘以 4。

0607T：那跟原來的算式一樣嗎？

0608S：(搖頭)

0609T：哪裡不一樣？

0610S：不是加起來乘以 4，而是只有 2 時 40 分乘以 4 而已。

0611T：對啊！所以，題目可以怎麼出？

0612S：姐姐做一件上衣 1 時 20 分，妹妹做一件褲子 2 時 40 分，姐姐做了 1 件上衣，妹妹做了 4 件褲子，請問他們一共花了多少時間？

分析：個案原本擬的題目，經由檢驗後，發現列出的算式為(1 時 20 分+2 時 40 分) × 4(行號 0606)，與原題目算式不符，對照之下，個案發現並非兩個時間量加起來後再乘以 4，而是後者的時間量乘以 4 而已(行號 0610)，經過修正後，個案重新擬題為：姐姐做一件上衣 1 時 20 分，妹妹做一件褲子 2 時 40 分，姐姐做了 1 件上衣，妹妹做了 4 件褲子，請問他們一共花了多少時間？

根據 Blum(2002)的研究指出，數學建模的三個過程中，也就是數學建模中，從「數學模式」轉換成「情境模式」，再從「情境模式」轉換成「數學模式」或「數學結果」，最終再回到「情境模式」的相互循環過程。由以上兩題，研究者請個案依據自己所擬出的題目進行列式解題時，個案便發現列式與原算式不符，因而重新檢視已擬好的題目，再一次修正，獲得了正確的擬題表現。

三、診斷教學後檢驗的擬題表現

經由研究者的診斷教學後，發現個案已能克服「起始時刻和結束時刻混淆」的迷思，因此，再進一步佈類似題予以檢驗。檢驗說明如下：

(一)「時刻+時距×倍數」=時刻，但個案用「時刻+時距×倍數」=時距來擬題，可能是忽略起點的時刻，只專注回答對應於算式「時距×倍數」=時距的應用問題

題目：請擬出「1 時 20 分+2 時 40 分×4」的數學文字題

原案 2-6

0613T：好！但是你還有沒有別的出法？(請你根據剛才的算式「1 時 20 分+2 時 40 分×4」再出另外一個應用問題)

0614S：ㄣ.....

0615T：你剛剛把 1 時 20 分當作什麼？

0616S：做一件上衣的時間。

0617T：你把它當作時間，那可不可以把它拿來當作時刻？

0618S：時刻喔？.....(思考)應該是可以，但是要想一下！

0619T：好！讓你再想想看！

0620S：.....

0621T：請你試著解釋看看！

0622S：(在白紙上畫數線，畫其中一點是 1 時 20 分，接著畫四段，每段是 2 時 40 分)

0623T：所以，你把 1 時 20 分當作時刻？

0624S：嗯！

0625T：那它是開始的時刻？還是結束的時刻？

0626S：開始的時刻！

0627T：好！所以，這一題可以怎麼出？

0628S：姐姐從 1 時 20 分開始做衣服，每做一件衣服花了 2 時 40 分，連續做了 4 件，共花了多久？

0629T: 你的問法對嗎? 請你再想想看。

0630S: 喔哦! 應該是問什麼時候做完?

0631T: 好! 不錯! 那我再出一題讓妳寫寫看!

0632S: 好!

0633T: (在白紙上寫下 $4\text{時}30\text{分}+20\text{分}\times 5$ 的算式) 這一題可以怎麼出?

0634S: 妹妹從下午 4 時 30 分開始寫功課, 每樣功課要花 20 分鐘, 一共有 5 樣, 她什麼時候才能寫完功課?

0635T: 好! 不錯!

分析: 研究者要求個案將 1 時 20 分當作時刻來擬題, 他起初思考許久, 經由研究者的提醒, 請他畫圖再想想看, 他在紙上畫了一條線段, 同時指定其中一點, 並將線段平分四等分, 後來經晤談得知, 個案將 1 時 20 分當作開始的時刻, 並重新擬題為「姐姐從 1 時 20 分開始做衣服, 每做一件衣服花了 2 時 40 分, 連續做了 4 件, 共花了多久?」(行號 0628), 但問法錯誤, 經修正後應為「問結束時刻」才對。此外, 研究者再以類似題「 $4\text{時}30\text{分}+20\text{分}\times 5$ 」考驗個案時, 個案即能很快回答「妹妹從下午 4 時 30 分開始寫功課, 每樣功課要花 20 分鐘, 一共有 5 樣, 她什麼時候才能寫完功課?」(行號 0634), 可見個案的擬題表現進步許多。

在此題中, 研究者為了檢驗個案是否已能克服「時刻」與「時距」時間概念的迷思, 請個案把其中一個時間當作時刻來擬題, 個案於是利用畫數線的策略來擬文字題, 解釋了時刻與時距的關係, 雖然問法有錯誤, 但最終能做修正。

(二) 診斷教學三週後, 以類似題持續考驗, 個案的擬題表現進步許多

題目: 請擬出「10 時 20 分—6 時 50 分」的數學文字題

個案擬題: 「華華從 6 時 50 分開始游泳, 游完是 10 時 20 分, 請問他游了多久?」

原案 2-2-1

1203T: 請你唸一下這一題!

1204S: 華華從 6 時 50 分開始游泳, 游到 10 時 20 分, 他花了多久的時間?

1205T: 為什麼是 6 時 50 分開始游泳, 游到 10 時 20 分?

12106S: 6 時 50 分是前面的時刻, 10 時 20 分是後面的時刻, 用後面的時刻減前面的時刻, 就是它要算的時間量。

12107T: 為什麼要用後面的時刻減前面的時刻呢?

1208S: (在白紙上畫數線, 畫其中一點是 6 時 50 分, 另一點是 10 時 20 分)

1209T: 這代表什麼?

1210S: 它要算中間經過的時間量。

1211T: 那為什麼不是從 10 時 20 分開始游, 游到 6 時 50 分呢?

1212S: 10 時 20 分比較慢到啊! 6 時 50 分比較先到! 不可能從後面的時間走到前面的時間, 這樣時間不就倒退走了~~

分析: 研究者請個案擬出時間減法的文字題時, 個案很快就擬出「華華從 6 時 20 分開始游泳, 游完是 10 時 20 分, 請問他游了多久?」, 當研究者詢問為何要

如此擬時，個案即回答「6時50分是前面的時刻，10時20分是後面的時刻，用後面的時刻減前面的時刻，就是它要算的時間量」(行號1206)。研究者再追問，為什麼要這樣減呢？個案於是在紙上畫了一條數線，分別把兩時刻及欲求的未知量表示出來，可見個案已經有直線表徵的概念了。而研究者繼續追問，那為什麼不是「從10時20分開始游，游到6時50分呢？」，個案說明「10時20分比較慢到啊！6時50分比較先到！不可能從後面的時間走到前面的時間，這樣時間不就倒退走了~~」(行號1212)。

由此可知，個案不但對起始時刻與結束時刻的判斷十分正確，甚至還以直線表徵來解釋此題並幫助理解。

題目：請擬出「5時30分+30分 \times 3」的數學文字題

個案擬題：「媽媽從5時30分開始煮飯，每煮一道菜需要花30分鐘，一共煮了3道菜，請問媽媽什麼時候才能煮完？」

原案 2-6-1

1603T：請你唸一下這一題！

1604S：媽媽從5時30分開始煮飯，每煮一道菜需要花30分鐘，一共煮了3道菜，請問媽媽什麼時候才能煮完？

1605T：請你解釋一下！

1606S：(畫數線)(先畫一點是5時30分，再畫三段，每段是30分)

1607T：你可不可以說明一下？

1608S：把5時30分當成時刻，30分鐘是花的時間，一共是三段30分鐘，所以要問什麼時候煮完？

1609T：什麼時候煮完？是什麼意思啊？

1610S：是結束的時間。

分析：研究者請個案擬時間四則運算的文字題時，個案思考了一、兩分鐘就擬出「媽媽從5時30分開始煮飯，每煮一道菜需要花30分鐘，一共煮了3道菜，請問媽媽什麼時候才能煮完？」(行號1604)，當研究者請個案解釋時，個案於是仿造前幾例，運用畫數線來解決問題，「把5時30分當成時刻，30分鐘是花的時間，一共是三段30分鐘，所以要問什麼時候煮完？」(行號1608)，研究者再問，「什麼時候煮完？」是代表什麼意思啊？個案便回答「是結束的時間」，可見個案對時刻與時距的概念已能掌握。

由此可知，個案已能清楚分辨時刻與時距的不同，對於解釋題意已習慣利用直線表徵來說明。類似題的持續考驗，個案的擬題能力也明顯改善許多。

在診斷教學後約三週，類似題的持續考驗之下，研究者認為個案已能克服「時刻」與「時距」時間概念的迷思，並能以時間的流動性來判斷「起始時刻」與「結束時刻」的先後順序，同時並利用畫數線的策略來解釋所擬的文字題，因此，個案的擬題能力進步許多。

伍、結論與建議

根據上述的研究結果與討論，我們對於個案目前的時間計算擬題表現，做出以下幾點結論：

一、結論

在教學前，研究者以時間計算問題中的單步驟題及雙步驟題，來考驗個案對於時間計算的擬題能力，個案能以「包含除」及「等分除」的結構來呈現時間的除法計算問題，但是擬題表現有下列缺失：

(一)教學前的擬題表現，個案表現不夠理想

個案能以「包含除」及「等分除」的結構來呈現時間的除法計算問題，但是研究者發現，她對於四則運算規則不精熟，如原案 2-6，以致影響了擬題表現。再者，她在擬題時有起始時刻與結束時刻錯置的迷思，如：原案 2-9；更有甚者，她有時刻與時俱混淆的困擾，將時刻當成被乘數來擬題，如原案 2-3。

(二)教學時，經由診斷教學策略的介入，個案能順利擬題成功

經由研究者製造認知衝突的介入，如原案 2-1，讓個案察覺錯誤，主動調整認知，並改變迷思概念，提升擬題能力。再者，研究者經由多次提問教學後，也以數線表徵與個案重新溝通，如原案 2-3，建構正確的概念。更甚者，給個案解自己擬的文字題，產生與原算式衝突，

如原案 2-6 和原案 2-9，幫助個案檢視擬題的正確性。

(三)個案在診斷教學後的擬題表現進步許多

診斷教學策略介入後，個案對於起始時刻與結束時刻已能掌握，且能清楚分辨時刻與時距，並能利用數線表徵的策略來編擬文字題，對於類似題的持續考驗也能順利擬題，如原案 2-6、檢驗原案 2-2-1 及檢驗原案 2-6-1。

二、建議

(一)擬題活動融入課室可以發現問題，藉由診斷教學可以破除學生的迷思概念

給個案擬數學文字題時，發現個案在時間概念問題的困惑，例如：在原案 2-1 中，個案忽略了兩個時刻是不能相加的，而用「一共」的字眼來擬題。因此，在教學時，以擬題方式融入課室活動，可以發現學生的可能問題，若能藉用診斷教學，來了解學童的舊經驗或迷思概念，並透過適時地製造認知衝突，使迷思概念產生正向的改變，便能有效幫助學童調整認知。

(二)利用數線表徵「時刻」與「時距」的關係，是提昇擬題表現的有效策略

在研究者請個案擬出「2 時 35 分×6 的數學文字題」時，個案將 2 時 35

分視為開始的「時刻」，而非「時距」，因此在教學上，為了避免學童對時刻和時距產生混淆，可利用鐘面與數線圖，以建立「時刻」與「時距」的時間概念。

因時間是連續不斷的，藉由畫數線圖的過程，來輔助學童釐清時間計算問題的迷思。此種表徵能將抽象的情境轉化為半具體的工具，讓學童試著畫畫看，可了解時刻和時距的關係，並獲得完整時間概念，有助於理解題意與澄清概念。

(三) 教師可讓學童解自己擬的文字題製造認知衝突，以幫助學童擬題表現的提昇

在原案 2-9 中，因為解擬題時，發現學童有起始時刻與結束時刻錯置的迷思，產生了錯誤的擬題，此時教師介入並診斷提問，利用認知衝突的方式，讓學童能反思，以幫助他們建構正確的概念。然而教師在教學現場能否立即發現學童的迷思概念並製造認知衝突、調整童認知，都考驗著教師的臨場反應。

(四) 對甚少接觸擬題的學童，可提供類似題讓其模仿擬題或解同儕擬的文字題

教師在教學時，為了讓學童充實擬題經驗，可多舉例各種時間概念類型和不同情境內容的題目，如預試的擬題工作單題目，來協助學童依循相關脈絡進行擬題，再讓學童將

擬出的問題讓同儕來解題，也是一個極大的誘因與擬題的魅力所在。

(五) 加強閱讀指導與文字寫作，有助於題意的了解與擬題的敘述

在原案 2-6 「(時距+時距) ×倍數」算式的擬題中，個案忽略了題目只有褲子做 4 件，上衣只有做一件，而列出「時距+時距×倍數」算式的擬題，因此在擬數學文字題的歷程中，涉及數學概念、閱讀能力和語文表達，屬於綜合能力的培養，許多學童在擬題產生困難，往往不是因為概念理解錯誤或是數學能力不足，而是理解題意與語文寫作出現了障礙。所以，加強閱讀指導與提高學生的語文理解能力，培養寫作的習慣更能增進擬題的文字敘述。

三、致謝

感謝科技部計畫(代號:104-2511-S-415-003-MY3)的支持與補助，以及匿名審查委員的寶貴意見，使得本文得以完成與更完善。

參考文獻

- 左台益、胡政德(2009)。準教師從真實情境中建構數學模式的認知因素分析與機制。《當代教育研究季刊》，17(4)，61-101。
- 李源順(主編)(2014)。《國民小學數學第八冊課本、備課指引教學篇》。台南：南一書局。
- 林福來、黃敏晃和呂玉琴(1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。《科學教育學刊》，4(2)，161-196。

- 俞筱鈞(1988)。認知發展實驗：理論與方法。台北：中國文化大學。
- 梁淑坤(1994)。「擬題」的研究及其在課程的角色。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會(主編), **國民小學數學科新課程概說**(低年級, 頁 152-167)。臺北：教育部臺灣省國民教師研習會。
- 梁淑坤(1997)。**擬題能力之評量：工具之製作**(NSC 84-2511-S-023-006)。臺北市：行政院國家科學委員會。
- 溫世展(2011)。融入式診斷教學法對國小五年級學生分數學習成效之探究。**科學教育學刊**, 19(5), 383-408。
- 鄭淑珍(2003)。**國小五年級學童時刻與時間量概念之診斷教學研究**。未出版之碩士論文。國立台北師範學院數理教育研究所, 台北。
- 鍾靜(1998)。時間教材與速率教材的設計。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會(主編), **國民小學數學科新課程概說**(高年級, 頁 230-256)。台北：臺灣省國民學校教師研習會。
- 蕭毓秀、鍾靜(2002)。國小學生時間文字題的解題研究。**國教學報**, 14, 21-42。
- Bell, A. W. (1993). Diagnostic teaching. *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*, 19-34.
- Bell, A. W. (1994). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24(1), 115-137.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematical education Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 149-171.
- Brown, S. I. & Walter, M. I. (1993). *Problem posing: Reflection and application*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Freudenthal, H. (1971). *Geometry between the devil and the deep sea*. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.
- Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 147-158.
- Lin, K. M., & Leng, L. W. (2008). Using problem-posing as an assessment tool. *Paper presented at the 10th Asia-Pacific Conference on Giftedness*. Singapore.
- Mason, J. and Davis, D. (1991). *Modeling with mathematics in primary and secondary Schools*. Australia: Deakin University Press.
- Piaget, J. (1969). *The child's conception of Time*. (A. J. Pomerans, trans.) London: Routledge & Kegan Paul.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Thornton, S. J., & Vukelic, R. (1988). Effects of children's undering of time concept on historical understanding. *Theory and Research in Social Education*, 16(1), 69-82.

投稿日期：104 年 12 月 08 日

接受日期：105 年 05 月 16 日

The Intervention Effects of Diagnosis Teaching on a Sixth Grader's Problem Posing Performance: Time Computation Problems as a Research Task

Wei-Hui Chiu^{1*} and Shiang-Tung Liu²

¹ Ren-Guang Elementary School of Tainan City

² Graduate Institute of Mathematic & Science Education, National Chiayi University

Abstract

Mathematics problem posing refers to a kind of activity in which students create mathematical word problems based on time computational problems. Mathematics problem posing can also be used as a sort of diagnostic tool to detect whether students' concepts and statements about math are reasonable. From the authors' teaching experiences, the time computation problems are hard to upper graders of elementary school students. To examine students' difficulty of computation problem, problem posing activities was organized for warming up their experiences and for choosing the research case from the pilot. The purpose of this study was to explore the problem posing performance and the effect of diagnosis teaching intervention of this case. This case had difficulty with computational operations when completing math problems; however, the student had no difficulties responding orally during the interview. The researcher finally monitored the student's performance while providing diagnosis teaching intervention.

The study found the student confused two terms: "interval of time and "point in time", thus causing her to pose incorrect mathematics problems. She was successfully able to adjust some of her misconceptions after the researcher intervened by questioning. In addition, the strategy of using number lines to represent the structure of the problems she posed was found to be an effective method in adjusting her problem posing. Moreover, the strategy of asking her to solve the problems she posed drove her to understand the mistakes she had made.

Key words: time computation problems, mathematics problem posing, mathematics problem solving, diagnosis teaching

* corresponding author