將平面上的直線由斜率觀點
回溯到移動量觀點

王世勛

新北市立新北高級工業職業學校

壹、前言

在坐標平面上的直線常以斜率為中心,建構出直線方程式,在探討直線的平行或垂直關係時,有兩個重要結論

(1) 兩直線的斜率依序為 m_1 及 m_2 ，若兩直線平行，則 m_1=m_2

(2) 兩直線的斜率依序為 m_1 及 m_2，若兩直線垂直，則 $m_1m_2=-1$

這兩個結論必須在斜率存在的前提下才能適用,以兩鉛直線 x=1 及 x=2 為例，是兩平行線,但不遵守斜率相等(事實上，兩直線斜率皆不存在)；再以兩直線 x=1 及 y=2 為例，兩直線互相垂直，但不遵守斜率相乘為 -1（事實上鉛直線 $x=1$ 的斜率不存在，而水平線 y=2 的斜率為 0），有沒有可能,可以找到一個觀點，可以適用所有直線？這個課題可以由“直線上兩點的移動量”的觀念得到解決。

貳、移動量的意義

首先說明，何謂“直線上兩點的移動量”？以坐標平面上 A(1,1)，B(4,3)為例，由 A(1,1)移動到 B(4,3)，此時 x 坐標增加 3，y 坐標增加 2，移動量記作 3　2；由 B(4,3)移動到 A(1,1)，此時 x 坐標減少 3，y 坐標減少 2，移動量記作−3　−2，由上述知 AB 兩點的移動量為 3　2 或−3　−2。

一般而言，考慮 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，則 AB 兩點的移動量可為 x_1-x_2　y_1-y_2 或 x_2-x_1　y_2-y_1。知道“直線上兩點的移動量”如何計算之後，要來探討一直線上任意兩點的移動量有何關係,分成三種情形說明如下：

情形一：直線為斜線(如圖 1)

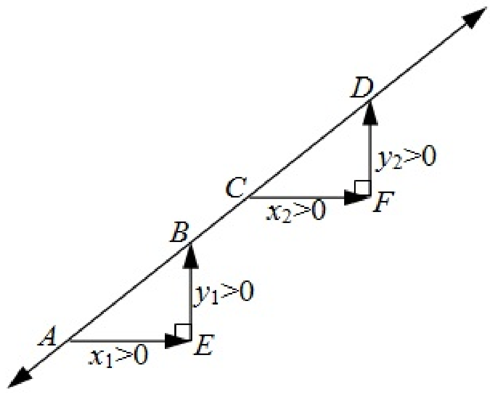

圖 1

ΔAEB 相似於ΔCFD

$\Rightarrow \overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{FD}$

$\Rightarrow x_1:y_1=x_2:y_2 \Rightarrow x_1y_2=x_2y_1$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$，

亦即同一直線的兩組移動量所成行列為 0。

情形二：直線為水平線

(圖 1 中 $y_1=0$ 且 $y_2=0$)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

情形三：直線為鉛直線

（圖 1 $x_1=0$ $x_2=0$）

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

由上述知，同一直線的兩組移動量所成行列式為 0 恆成立。

參、移動量與斜率的關係

考慮直線上點的移動，在 x 坐標移動量為 1 的條件，此時 y 坐標的移動量稱為斜率。由上述定義知水平線的斜率是 0，而鉛直線因為無法達成 x 坐標移動量為 1 的條件，所以斜率不存在。直線的斜率若為 m，則可視此直線有一組移動量為 1 m，若斜率為 m 的直線過 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 兩點，AB 兩點的移動量可為 x_1-x_2 y_1-y_2 或 x_2-x_1 y_2-y_1 現在再加上移動量 1 m，已證得同一直線上兩組移動量所成行列式為 0 恆成立，所以

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_1-y_2)-m(x_1-x_2)=0$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

再以直線 $y=ax+b$ 為例，因為過 $A(0,b)$及 $B(1,a+b)$，所以斜率 $m=\dfrac{b-(a+b)}{0-1}=a$，而一般式 $ax+by+c=0(b\neq 0)$ 整理為 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ 也可得知其斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。以直線 $17x+196y=223$ 為例，並不需要找兩點來計算直線上的移動量，可以藉斜率 $\dfrac{-17}{196}$ 找到一組移動量為 1 $\dfrac{-17}{196}$，將此移動量放大為 196 倍，可得另一組移動量為 196 -17。

肆、移動量與平行線的關係

兩直線 L_1與 L_2 平行，要探討點的移動量有何關係，分成三種情形說明如下：

情形一：兩條斜線平行（如圖 2）

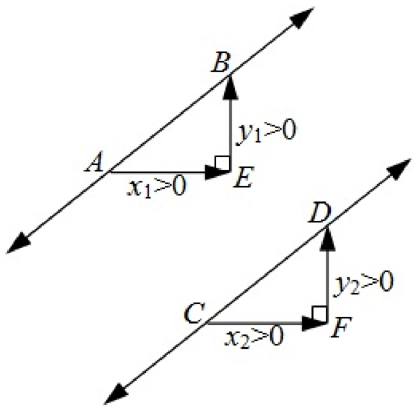

圖 2

$$\Delta AEB \text{相似於} \Delta CFD \Rightarrow \overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{FD}$$

$$\Rightarrow x_1:y_1=x_2:y_2 \Rightarrow x_1y_2=x_2y_1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

情形二：兩條水平線平行

（圖 2 中 $y_1=0$ 且 $y_2=0$）

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

情形三：兩條鉛直線平行

（圖 2 中 $x_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$）

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

由上述知,若 L_1 與 L_2 平行，則兩組移動量所成行列式為 0 恆成立。

以下由例題來說明移動的使用

例 1： 已知 $A(1,3)$，$B(2,6)$，$C(3,5)$，直線 L 過 A 點且與 BC 直線平行，求 L 的直線方程式為何？

答： 線 L 上動點 $P(x,y)$，已知 L 過 $A(1,3)$，移動量為 $x-1 \quad y-3$，BC 直線移動量為 $2-3 \quad 6-5$，可整理為 $-1 \quad 1$，因為兩直線平行，所以移動量所成行列式為 0 可得 $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，展開得 $x-1+y-3=0$，可再整理為 $x+y-4=0$。

伍、移動量與垂直線的關係

兩直線 L_1 與 L_2 垂直，要探討點的移動量有何關係，分成三種情形說明如下：

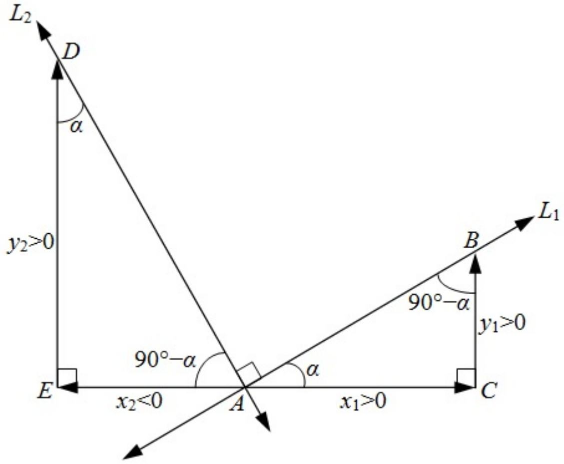

圖 3

情形一：兩條斜線垂直(如圖 3)

ΔACB 相似於 ΔDEA

$\Rightarrow \overline{AC}:\overline{CB} = \overline{DE}:\overline{EA}$

$\Rightarrow x_1 : y_1 = y_2 : -x_2 \Rightarrow y_1 y_2 = -x_1 x_2$

$\Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

$\Rightarrow$ 定義內積式 $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)$

$= x_1 x_2 + y_1 y_2 \Rightarrow (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = 0$

情形二：水平線與鉛直線垂直

（不失一般性，可取圖 3 中 $y_1 = 0$ 且 $x_2 = 0$）

$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1, 0)\cdot(0, y_2)$

$= x_1 \times 0 + 0 \times y_2 = 0$

由上述知，若 L_1 與 L_2 垂直，則兩組移動量的內積式為 0 恆成立。

以下由例題來說明移動量的使用

例 1： 直線 L 上動點 $A(1,3)$點且與直線 $2x+3y=5$ 垂直，求 L 直線方程式為何？

答： 直線 L 上動點 $P(x,y)$，又已知 L 過 $A(1,3)$，移動量為 $x-1 \quad y-3$，直線 $2x+3y=5$ 之斜率為 $\frac{-2}{3}$，移動量為 $1 \quad \frac{-2}{3}$，可調為 $3 \quad -2$，因為兩直線垂直，所以移動量的內積式為 0 可得 $3(x-1)-2(y-3)=0$，可再理為 $3x-2y+3=0$

陸、結論

目前的數學體系中處理坐標平面上直線的平行或垂直是採斜率觀點，結論如下：兩直線的斜率依序為 m_1, m_2，若兩直線平行則 $m_1 = m_2$；若兩直線垂直則 $m_1 m_2 = -1$。

此斜率結論其實是移動量觀念的必然結果，也可以說移動量是比斜率更根本的觀念，以直線平行為例，兩組移動量所成行列式為 0，亦即 $\begin{vmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$；而兩直線垂直，兩組移動量的內積式為 $0 \Rightarrow$ $(1, m_1) \cdot (1, m_2) = 0 \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$，斜率結論需在“斜率存在”的前提下才可使用，它不是恆成立，它不適用於涉及鉛直線(斜率不存在)的課題。然而移動量觀念的使用不需要“移動量存在”這個前提，它是恆成立的(因為任何直線取兩點,則此兩點的移動量必存在)，移動量在坐標平面的任何直線都可以適用，它才真正展現了坐標平面上直線的數學內涵。

如果將直線平行或垂直的課題比喻成一幅風景畫，斜率觀點讓學生看到的是部份風景，而移動量觀點則讓學生看到了完整的全貌。