雞與蛋在演化上的循環數列

許耕福

國立成功大學 工程科學系

壹、前言

「到底先有雞？還是先有蛋？」2008 年加拿大一位古生物學者澤勒尼茨基（Darla Zelenitsky）宣稱，他對七千七百萬年前的恐龍蛋化石進行研究，發現恐龍先建造類似鳥窩的巢穴，並產下類似鳥蛋的蛋，之後恐龍再進化成鳥類（雞本屬鳥類的一種）。因此推論「先有蛋，後有雞」，雞是由這些產下類似雞蛋的肉食性恐龍進化而成。（參考資料 1）

另根據 2010 年英國《太陽報》報導，英國雪菲爾大學（Sheffield Universities）以及華威大學（Warwick Universities）的科學家研究發現，蛋殼的組成中具有一種僅存於母雞卵巢中的蛋白質（ovocledidin-17, OC−17），因為蛋殼的重要作用是為小雞提供安全的生存空間，因此他們斬釘截鐵表示，絕對是「先有雞，後有蛋」。

在邏輯上「先有雞？先有蛋？」是一個循環論證，由於各人對此命題的根本意義解讀不一，加上追溯年代遙遠，不易取得直接證據，所以這個話題即使眾說紛紜或爭論不休，至今都難以得到定論。不過，若能給出一個明確命題，想當然「先有雞」或「先有蛋」必恰有其一成立。因此筆者藉由練習程式語言的機會，自創「雞生蛋，蛋生雞」（或「蛋生雞，雞生蛋」）的簡單數列（以下以「生存數列」稱之），試圖以數學觀點，描述所有可能雞種「生生不息」的關係。

貳、生存數列

首先任選一個二位以上的正整數 N，並以 $L(N)$表示由高位值部所形成之數，$R(N)$表示由低位值部所形成之數，且以 $D(N)$、$D(L(N))$、$D(R(N))$分別表示 N、$L(N)$、$R(N)$的位數。當我們準備對 N 進行運算以得到下一個數時，先要將 N 依其位數拆成 $L(N)$與 $R(N)$兩個數，但必須符合以下要求：

若 $D(N)$ 為偶數，則 $D(L(N)) = D(R(N))$；

若 $D(N)$ 為奇數，則 $D(L(N)) = D(R(N)) + 1$

例如，當 N=1234 時，則 $L(N) = 12$，$R(N) = 34$，$D(N) = 4$，$D(L(N)) = 2$，$D(R(N)) = 2$；當 N=12345 時，則 $L(N) = 123$，$R(N) = 45$，$D(N) = 5$，$D(L(N)) = 3$，$D(R(N)) = 2$。

至於生存數列$\langle a_n \rangle$之首項選定及其任意相鄰兩項間的運算規則如下：

(1) 首項 a_1 必須是一個二位數以上的偶數

(2) 當 n 為奇數，若 $L(a_n)$ 為奇數，則 $a_{n+1}=a_n+1$；

若 $L(a_n)$ 為偶數，則 $a_{n+1}=(L(a_n)+1)\times 10^{D(R(a_n))}+R(a_n)+1$

(3) 當 n 為偶數，則 $a_{n+1}=\dfrac{L(a_n)+R(a_n)}{2}\times 10^{D(|L(a_n)-R(a_n)|)}+|L(a_n)-R(a_n)|$

例 1：若 $a_1=32$，

由規則(2)得 $a_2=32+1=33$，由規則(3)得 $a_3=\dfrac{3+3}{2}\times 10+|3-3|=30$，

由規則(2)得 $a_4=30+1=31$，由規則(3)得 $a_5=\dfrac{3+1}{2}\times 10+|3-1|=22$，……

所以這個生存數列$\langle a_n\rangle$為 32，$\boxed{33}$，30，31，22，$\boxed{33}$，30，……

例 2：若 $a_1=56$，

由規則(2)得 $a_2=56+1=57$，由規則(3)得 $a_3=\dfrac{5+7}{2}\times 10+|5-7|=62$，

由規則(2)得 $a_4=(6+1)\times 10+2+1=73$，由規則(3)得 $a_5=\dfrac{7+3}{2}\times 10+|7-3|=54$，…

所以這個生存數列$\langle a_n\rangle$為 56，57，62，73，54，55，50，51，34，35，$\boxed{42}$，53，$\boxed{42}$，53，……

例 3：若 $a_1=132$，

由規則(2)得 $a_2=132+1=133$，由規則(3)得 $a_3=\dfrac{13+3}{2}\times 10^2+|13-3|=810$

由規則(2)得 $a_4=810+1=811$，由規則(3)得 $a_5=\dfrac{81+1}{2}\times 10^2+|81-1|=4180$，……

所以這個生存數列$\langle a_n\rangle$為 132，133，$\boxed{810}$，811，4180，4181，6140，6141，5120，5121，3630，3731，346，357，2128，2129，258，259，1716，1717，170，171，916，917，4984，4985，6736，6737，5230，5231，4222，4323，3320，3321，2712，2713，2014，2015，186，197，1312，1313，130，131，712，713，3768，3769，5332，5333，4320，4321，3222，3323，2810，2911，2018，2119，203，213，1218，1319，166，177，1210，1311，122，133，$\boxed{810}$，811，……

由以上的運算規定以及所舉數列之相鄰兩項間的運算關係可以確定：

當 n 為奇數，且 a_n 為偶數時（即數列的奇數項為偶數），因為由規則(2)：若 $L(a_n)$ 為奇數，則 $L(a_{n+1})=L(a_n)$；若 $L(a_n)$ 為偶數，則 $L(a_{n+1})=L(a_n)+1$，所以可確知數列的偶數項 a_{n+1} 之 $L(a_{n+1})$ 為奇數，又因為 $R(a_{n+1})=R(a_n)+1$，所以 $R(a_{n+1})$ 為奇數，即 a_{n+1} 為奇數，因此 $\left|L(a_{n+1})-R(a_{n+1})\right|$ 為偶數，並得 $R(a_{n+2})$ 為偶數，所以 a_{n+2} 為偶數，故任一生存數列必為下列形式：偶數，奇數，偶數，奇數，偶數，奇數，偶數，奇數，……

如果我們將首項的偶數當成雞，第二項的奇數當成蛋，則第三項是雞，第四項是蛋，第五項是雞，第六項是蛋，……這個數列就是雞、蛋、雞、蛋、雞、蛋、……「雞生蛋，蛋生雞」的生存數列。

如果我們將首項的偶數當成蛋，第二項的奇數當成雞，則第三項是蛋，第四項是雞，第五項是蛋，第六項是雞，……這個數列就是蛋、雞、蛋、雞、蛋、雞、……「蛋生雞，雞生蛋」的生存數列。

且由例 1 與例 2 中，讀者可以了解到數列中某些二位數（偶數或奇數都有可能），在不斷添項情況下，一定會出現重複；再由例 3 中，也可以發現，當出現三位數或四位數的奇數時，其下一個數只可能成為四位數以下的偶數，但因為從偶數產生奇數時，其位數不變，因此即使不斷添項，重複出現同一個數必是遲早的事。

進一步來說，當 n 為奇數，且 $D(a_n)=2k$ ($k\in N$)時，則 $D(a_{n+1})=2k$，再得

$$D\left(\frac{L(a_{n+1})+R(a_{n+1})}{2}\right)=k\text{ ， }D\left(\left|L(a_{n+1})-R(a_{n+1})\right|\right)\le k\text{ ，所以 }D(a_{n+2})\le 2k\text{ ；}$$

當 n 為奇數，且 $D(a_n)=2k+1$ ($k\in N$)時，則 $D(a_{n+1})=2k+1$，再得

$$D\left(\frac{L(a_{n+1})+R(a_{n+1})}{2}\right)\le k+1\text{ ， }D\left(\left|L(a_{n+1})-R(a_{n+1})\right|\right)\le k+1\text{ ，所以 }D(a_{n+2})\le 2k+2\text{ 。}$$

也就是說，若一個生存數列的首項為 $2k$ 位數，則其任一項的位數不可能大於 $2k$；若一個生存數列的首項為 $2k+1$ 位數，則其任一項的位數不可能大於 $2k+2$，所以對於任何一個持續增項的生存數列，在有限產出結果的情況下，終將出現相同的數，也就是會出現循環數列。而且可以很明顯了解，若我們另以其循環部分中的任一偶數當成新數列的首項，則得出的生存數列必是一個完全循環數列。

以下即是在前述所舉三個生存數列中，取其循環部分的其中一個偶數作為新數列的首項，所得出的三個完全循環生存數列：

(a). $\boxed{22}$，33，30，31，$\boxed{22}$，33，……

(b). $\boxed{42}$，53，$\boxed{42}$，53，……

(c). $\boxed{6140}$，6141，5120，5121，3630，3731，346，357，2128，2129，258，259， 1716，1717，170，171，916，917，4984，4985，6736，6737，5230，5231，4222，4323，3320，3321，2712，2713，2014，2015，186，197，1312，1313，130，131，712，713，3768，3769，5332，5333，4320，4321，3222，3323，2810，2911，2018，2119，203，213，1218，1319，166，177，1210，1311，122，133，810，811，4180，4181，$\boxed{6140}$，6141，……

單從數學觀點，筆者認為各雞種的第一代祖先可能是真雞或真雞蛋或非雞或非雞蛋，那些經歷非雞期或非雞蛋期者，演化期有長有短，且期間也可能產成了一些變異，因此我將生存數列連結「雞生蛋」、「蛋生雞」的演化關係分成以下六種情況：一個完全循環的生存數列對應成(1)「先真雞，後真雞蛋」或(2)「先真雞蛋，後真雞」的某雞種演化歷程；一個非完全循環的生存數列，若第一個重複出現的數是偶數，則將它對應成(3)「先非雞，再非雞蛋，再真雞，後真雞蛋」或(4)「先非雞蛋，再非雞，再真雞蛋，後真雞」的某雞種演化歷程；一個非完全循環的生存數列，若第一個重複出現的數是奇數，則將它對應成(5)「先非雞，再非雞蛋，再非雞，再真雞蛋，後真雞」或(6)「先非雞蛋，再非雞，再非雞蛋，再真雞，後真雞蛋」的某雞種演化歷程。

或許有人會提出疑問，如果不強制規定首項只為偶數，不是也能完整討論並總結出前段的六種情況嗎？對於這個說法，我也極表認同。只是我總希望在較精簡的流程下達成目的，並能對這個亙古悠長的謎題，表現出自己的敬畏之心，因此就覺得沒必要以絕對的奇偶數作為雞（或蛋）的原始密碼了。

筆者數學與科學知識淺陋，撰文動機主要是分享自己從發想「生存數列」並連結「雞生蛋」、「蛋生雞」關係所衍生的趣味性，拙文中不周全或不當之處，尚敬請師長、高手們多多包涵指導。

參、致謝

承蒙國立臺灣師範大學數學系洪有情教授費心提供建議，謹此致上萬分謝意。

參考文獻

國立清華大學物理系教授王道維 2010 年 7 月 25 日文章「先有雞還先有蛋？」取自 www.fhl.net/main/eternal_qa/eternal_qa541477.html