

不一樣的十分逼近的取法就是錯嗎？

楊惠后

臺中市私立曉明女子高級中學

真理有三部分：

考查，即求取它；認識，即它已存在；信心，即運用它。

～蘇格拉底

壹、緣由

近日，國二的第一次學習評量有一道非選擇題的題目是「以十分逼近法求 $\sqrt{11}$ 的近似值到小數點後第二位」，有極少數的幾個學生有如下的寫法：

1. $\because 3^2=9, 4^2=16 \therefore 3 < \sqrt{11} < 4$
2. $\because 3.3^2=10.89, 3.4^2=11.56 \therefore 3.3 < \sqrt{11} < 3.4$
3. $\because 3.31^2=10.9561, 3.32^2=11.0224 \therefore 3.31 < \sqrt{11} < 3.32$
4. $\because 3.32^2-11=11.0224-11=0.0224, 11-3.31^2=11-10.9561=0.0439, \text{又} \because 0.0224 < 0.0439$
 $\therefore \sqrt{11} \approx 3.32$

現在問題的關鍵點是出在第四個步驟上，學生的想法是「11 離 3.32 的平方比較近，所以 $\sqrt{11}$ 靠近 3.32，因此直接取 $\sqrt{11}$ 的近似值是 3.32。」遑論學生先前是否有旁人協助指點，如今因為答案是正確的，可是絕大多數學校的老師不是這麼教的，所以引起了一番唇槍舌戰，務求一定要導正學生的觀念，回歸正規的做法。所謂正規的做法如下：

1. $\because 3^2=9, 4^2=16 \therefore 3 < \sqrt{11} < 4$
2. $\because 3.3^2=10.89, 3.4^2=11.56 \therefore 3.3 < \sqrt{11} < 3.4$
3. $\because 3.31^2=10.9561, 3.32^2=11.0224 \therefore 3.31 < \sqrt{11} < 3.32$
4. $\because 3.316^2=10.995856, 3.317^2=11.002489, \therefore 3.316 < \sqrt{11} < 3.317, \therefore \sqrt{11} \approx 3.32$

若是要利用四捨五入法求至小數點後第二位的近似值，我們也可以利用 3.31 及 3.32 的中點 3.315 的平方與 11 比較。因為 $3.315^2=10.989225 < 11$ ，所以 $3.315 < \sqrt{11} < 3.32$ ，故依四捨五入法得 $\sqrt{11} \approx 3.32$ 。

貳、討論

事實上，上述的學生做法是正確的。請看下面的說明：

已知 $a < \sqrt{x} < a + 10^{-n}$ ，(其中 x 非完全平方數，且 a 的小數位數有 n 位)

若 $(a + 10^{-n})^2 - x \leq x - a^2$ ，則 $[(a + 10^{-n}) - \sqrt{x}][\sqrt{x} + a] \leq [\sqrt{x} + a][\sqrt{x} - a]$

$$\Rightarrow [(a + 10^{-n}) - \sqrt{x}] \leq \frac{[\sqrt{x} + a][\sqrt{x} - a]}{[\sqrt{x} + a] + \sqrt{x}} \quad (\because \frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} + (a + 10^{-n})} < 1)$$

$$\Rightarrow (a + 10^{-n}) - \sqrt{x} < \sqrt{x} - a \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{a + (a + 10^{-n})}{2}$$

結論：若 x 距離 $(a + 10^{-n})^2$ 比較近或 x 是中間值，則 \sqrt{x} 均會距離 $(a + 10^{-n})$ 比較近，所以 \sqrt{x} 的 n 位小數近似值必為 $a + 10^{-n}$ 。

不過，若 x 距離 a^2 比較近，那麼 \sqrt{x} 的 n 位小數近似值是否為 a ，則需要做進一步的確認。請再看底下的說明：

已知 $a < \sqrt{x} < a + 10^{-n}$ ，(其中 x 非完全平方數，且 a 的小數位數有 n 位)

若 $(a + 10^{-n})^2 - x > x - a^2$ ，則 $[(a + 10^{-n}) - \sqrt{x}][\sqrt{x} + a] > [\sqrt{x} + a][\sqrt{x} - a]$

$$\Rightarrow [(a + 10^{-n}) - \sqrt{x}] > \frac{[\sqrt{x} + a][\sqrt{x} - a]}{[\sqrt{x} + a] + \sqrt{x}}$$

因為 $\frac{\sqrt{x} + a}{\sqrt{x} + (a + 10^{-n})} < 1$ ，所以無法確認 $(a + 10^{-n}) - \sqrt{x}$ 一定大於 $\sqrt{x} - a$ ；換句話說，也就是

不能肯定 \sqrt{x} 的 n 位小數近似值就是 a 。

所謂「眼見為憑」，現在舉一個例子來驗證：

已知 $\sqrt{5.929225} = 2.435$ ，所以 $2.43 < \sqrt{5.929225} < 2.44$ ，因為 $2.43^2 = 5.9049$ ， $2.44^2 = 5.9536$

$$\Rightarrow 5.929225 - 5.9049 = 0.024325 < 5.9536 - 5.929225 = 0.024375$$

雖然 5.929225 距離 2.43^2 比較近，然而取二位小數近似值是 $\sqrt{5.929225} \approx 2.44$

參、後言

其實，各位讀者只要眼尖就不難發現上面特殊例子的端倪，知道箇中玄機。現在，我們再來談談為何國中生要學十分逼近法？我查詢到的相關知識背景是國中階段教「十分逼近法」的主要目的是透過有限小數來培養無理數的數感，也就是藉由操作十分逼近法的步驟，讓學生感受到 \sqrt{N} (N 是非完全平方數的自然數) 的小數位數可以為所欲為的求取出來，

沒有重覆循環的現象，知道其可以化為無限不循環小數，以此引領學生入門無理數的世界。而十分逼近法最重要的理論基礎就是連續函數的韋根定理，在國中階段求 \sqrt{N} 的近似值時，以十分逼近法做到規定的第 n 位小數時，再引進這個長度為 10^{-n} 的區間中點數，來判斷 \sqrt{N} 應在區間的左半部或右半部，以決定近似值為何。也就是說，這個階段的十分逼近法搭配二分法(四捨五入)是個非常有效且具明確理論依據的方法。

網路上有一則學生留言：「奇怪！學校老師不是這麼教的，如果用這個解法，我覺得真的比較容易懂。」基於這個動機，我想對國中生而言，因為 N 所討論的範圍是 1~100 的自然數，甚至為了方便操作十分逼近法，老師們會將 N 值限定在更小的範圍內；所以我才會發想：透過在附錄中所整理出來的資料來呈現，即使在「最後一步驟」改寫成「設 a 是二位小數，已知 $a < \sqrt{N} < a + 0.01$ ，當 N 靠近 a^2 時，就取 $\sqrt{N} \approx a$ ；當 N 靠近 $(a + 0.01)^2$ 時，就取 $\sqrt{N} \approx a + 0.01$ 」的做法是可行的。

雖然這些表格資料純粹只是一種數學實驗，不能當作嚴謹的證明，但是我常自覺在實際教學現場上，對於不同年齡層的孩子們，我會努力嘗試在他們既有的預備知識前提下，運用他們能理解的語彙、方式、經驗…等引導他們學習數學概念。「最後一步驟」這個不一樣的做法，在國中階段的確可以減輕某些學生在繁瑣計算上的厭煩感，我也希望經由這次的討論分享，今後若有學生有這樣的寫法，老師們能不吝惜給分！

參考文獻

南一書局 (2014 年):十分逼近法 國中數學 2 上 P.65~P.66

附錄

N	\sqrt{N}	a	a^2	$N - a^2$	$a + 0.01$	$(a + 0.01)^2$	$(a + 0.01)^2 - N$
1	1.00						
2	1.41	1.41	1.9881	0.0119	1.42	2.0164	0.0164
3	1.73	1.73	2.9929	0.0071	1.74	3.0276	0.0276
4	2.00	2.00					
5	2.24	2.23	4.9729	0.0271	2.24	5.0176	0.0176
6	2.45	2.44	5.9536	0.0464	2.45	6.0025	0.0025
7	2.65	2.64	6.9696	0.0304	2.65	7.0225	0.0225
8	2.83	2.82	7.9524	0.0476	2.83	8.0089	0.0089
9	3.00						
10	3.16	3.16	9.9856	0.0144	3.17	10.0489	0.0489

N	\sqrt{N}	a	a^2	$N - a^2$	$a + 0.01$	$(a + 0.01)^2$	$(a + 0.01)^2 - N$
11	3.32	3.31	10.9561	0.0439	3.32	11.0224	0.0224
12	3.46	3.46	11.9716	0.0284	3.47	12.0409	0.0409
13	3.61	3.60	12.96	0.04	3.61	13.0321	0.0321
14	3.74	3.74	13.9876	0.0124	3.75	14.0625	0.0625
15	3.87	3.87	14.9769	0.0231	3.88	15.0544	0.0544
16	4.00						
17	4.12	4.12	16.9744	0.0256	4.13	17.0569	0.0569
18	4.24	4.24	17.9776	0.0224	4.25	18.0625	0.0625
19	4.36	4.35	18.9225	0.0775	4.36	19.0096	0.0096
20	4.47	4.47	19.9809	0.0191	4.48	20.0704	0.0704
21	4.58	4.58	20.9764	0.0236	4.59	21.0681	0.0681
22	4.69	4.69	21.9961	0.0039	4.70	22.09	0.09
23	4.80	4.79	22.9441	0.0559	4.80	23.04	0.04
24	4.90	4.89	23.9121	0.0879	4.90	24.01	0.01
25	5.00						
26	5.10	5.09	25.9081	0.0919	5.10	26.01	0.01
27	5.20	5.19	26.9361	0.0639	5.20	27.04	0.04
28	5.29	5.29	27.9841	0.0159	5.30	28.09	0.09
29	5.39	5.38	28.9444	0.0556	5.39	29.0521	0.0521
30	5.48	5.47	29.9209	0.0791	5.48	30.0304	0.0304
31	5.57	5.56	30.9136	0.0864	5.57	31.0249	0.0249
32	5.66	5.65	31.9225	0.0775	5.66	32.0356	0.0356
33	5.74	5.74	32.9476	0.0524	5.75	33.0625	0.0625
34	5.83	5.83	33.9889	0.0111	5.84	34.1056	0.1056
35	5.92	5.91	34.9281	0.0719	5.92	35.0464	0.0464
36	6.00						
37	6.08	6.08	36.9664	0.0336	6.09	37.0881	0.0881
38	6.16	6.16	37.9456	0.0544	6.17	38.0689	0.0689
39	6.24	6.24	38.9376	0.0624	6.25	39.0625	0.0625
40	6.32	6.32	39.9424	0.0576	6.33	40.0689	0.0689

N	\sqrt{N}	a	a^2	$N - a^2$	$a + 0.01$	$(a + 0.01)^2$	$(a + 0.01)^2 - N$
41	6.40	6.40	40.96	0.04	6.41	41.0881	0.0881
42	6.48	6.48	41.9904	0.0096	6.49	42.1201	0.1201
43	6.56	6.55	42.9025	0.0975	6.56	43.0336	0.0336
44	6.63	6.63	43.9569	0.0431	6.64	44.0896	0.0896
45	6.71	6.70	44.89	0.11	6.71	45.0241	0.0241
46	6.78	6.78	45.9684	0.0316	6.79	46.1041	0.1041
47	6.86	6.85	46.9225	0.0775	6.86	47.0596	0.0596
48	6.93	6.92	47.8864	0.1136	6.93	48.0249	0.0249
49	7.00	7.00					
50	7.07	7.07	49.9849	0.0151	7.08	50.1264	0.1264
51	7.14	7.14	50.9796	0.0204	7.15	51.1225	0.1225
52	7.21	7.21	51.9841	0.0159	7.22	52.1284	0.1284
53	7.28	7.28	52.9984	0.0016	7.29	53.1441	0.1441
54	7.35	7.34	53.8756	0.1244	7.35	54.0225	0.0225
55	7.42	7.41	54.9081	0.0919	7.42	55.0564	0.0564
56	7.48	7.48	55.9504	0.0496	7.49	56.1001	0.1001
57	7.55	7.54	56.8516	0.1484	7.55	57.0025	0.0025
58	7.62	7.61	57.9121	0.0879	7.62	58.0644	0.0644
59	7.68	7.68	58.9824	0.0176	7.69	59.1361	0.1361
60	7.75	7.74	59.9076	0.0924	7.75	60.0625	0.0625
61	7.81	7.81	60.9961	0.0039	7.82	61.1524	0.1524
62	7.87	7.87	61.9369	0.0631	7.88	62.0944	0.0944
63	7.94	7.93	62.8849	0.1151	7.94	63.0436	0.0436
64	8.00						
65	8.06	8.06	64.9636	0.0364	8.07	65.1249	0.1249
66	8.12	8.12	65.9344	0.0656	8.13	66.0969	0.0969
67	8.19	8.18	66.9124	0.0876	8.19	67.0761	0.0761
68	8.25	8.24	67.8976	0.1024	8.25	68.0625	0.0625
69	8.31	8.30	68.89	0.11	8.31	69.0561	0.0561
70	8.37	8.36	69.8896	0.1104	8.37	70.0569	0.0569

N	\sqrt{N}	a	a^2	$N - a^2$	$a + 0.01$	$(a + 0.01)^2$	$(a + 0.01)^2 - N$
71	8.43	8.42	70.8964	0.1036	8.43	71.0649	0.0649
72	8.49	8.48	71.9104	0.0896	8.49	72.0801	0.0801
73	8.54	8.54	72.9316	0.0684	8.55	73.1025	0.1025
74	8.60	8.60	73.96	0.04	8.61	74.1321	0.1321
75	8.66	8.66	74.9956	0.0044	8.67	75.1689	0.1689
76	8.72	8.71	75.8641	0.1359	8.72	76.0384	0.0384
77	8.77	8.77	76.9129	0.0871	8.78	77.0884	0.0884
78	8.83	8.83	77.9689	0.0311	8.84	78.1456	0.1456
79	8.89	8.88	78.8544	0.1456	8.89	79.0321	0.0321
80	8.94	8.94	79.9236	0.0764	8.95	80.1025	0.1025
81	9.00						
82	9.06	9.05	81.9025	0.0975	9.06	82.0836	0.0836
83	9.11	9.11	82.9921	0.0079	9.12	83.1744	0.1744
84	9.17	9.16	83.9056	0.0944	9.17	84.0889	0.0889
85	9.22	9.21	84.8241	0.1759	9.22	85.0084	0.0084
86	9.27	9.27	85.9329	0.0671	9.28	86.1184	0.1184
87	9.33	9.32	86.8624	0.1376	9.33	87.0489	0.0489
88	9.38	9.38	87.9844	0.0156	9.39	88.1721	0.1721
89	9.43	9.43	88.9249	0.0751	9.44	89.1136	0.1136
90	9.49	9.48	89.8704	0.1296	9.49	90.0601	0.0601
91	9.54	9.53	90.8209	0.1791	9.54	91.0116	0.0116
92	9.59	9.59	91.9681	0.0319	9.60	92.16	0.16
93	9.64	9.64	92.9296	0.0704	9.65	93.1225	0.1225
94	9.70	9.69	93.8961	0.1039	9.70	94.09	0.09
95	9.75	9.74	94.8676	0.1324	9.75	95.0625	0.0625
96	9.80	9.79	95.8441	0.1559	9.80	96.04	0.04
97	9.85	9.84	96.8256	0.1744	9.85	97.0225	0.0225
98	9.90	9.89	97.8121	0.1879	9.90	98.01	0.01
99	9.95	9.94	98.8036	0.1964	9.95	99.0025	0.0025
100	10.00						