

# 探索地心的重力場

陳其威<sup>1\*</sup> 邱薇如<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立科學工業園區實驗高級中學

<sup>2</sup> 桃園市立大園國際高級中學

生活在這美麗的地球上，除了陽光、空氣、水是我們人類生存不可或缺的三元素外，還有一個隱而未現，但卻深深影響著我們生活的要素，那就是來自地球的『引力』。被喻為現代科學之父的牛頓，在 1679 年提出了萬有引力，奠定了此後天文學的基礎，並且開展了我們對宇宙有更深入的认识。自此我們知道，凡有質量的兩物體，彼此間有著彼此互相吸引的作用力，而使我們能夠站立於地球表面，即為地球對我們的吸引力造成結果。

為了更清楚描述兩物質間的引力，我們想像在一個具有質量的星球在其周圍會建立重力場，此重力場會和此星球質量大小成正比。當另一個具有質量的物質靠近，就會受到此星球的重力場作用，使得物質受到一個來自星球的吸引力。所以我們將重力場強度定義為單位質量物體在重力場中所受的重力，而我們可以由牛頓第二運動定律的關係式可以推倒出，其實地球表面的重力場強度就是我們常聽到的重力加速度，而地球外部的重力場會因距離而改變，距地心越遠處，其位置的重力加速度會越小，與距離的平方成反比，可由式子

$$g_{out} = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GMm}{r^2}}{m} = \frac{GM}{r^2} \quad (M: \text{地球質量、} r: \text{觀測點至地心距離、} G: \text{重力常數})$$

得知，我們將重力加速度和距離的關係畫出來，如圖 1。

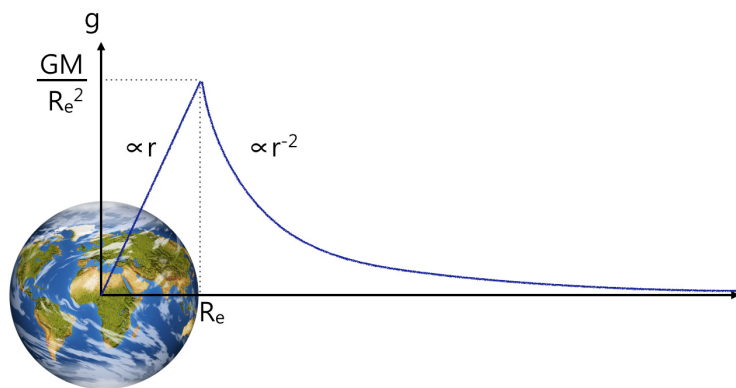


圖 1：重力場在地球外部與距離的平方成反比，在內部與距離成正比

\*為本文通訊作者

那在地球的內部呢？若將地球內部的密度視為均勻(密度當作定值)，利用球殼定理，在地球內部任一點的重力場，其值只與該點的環切球殼內部的質量有關，與該點的環切球殼外的質量無關，其值可以推得

$$g_{in} = \frac{GM_{in}}{r^2} = \frac{GM}{r^2} \times \frac{r^3}{R_e^3} = \frac{GM}{R_e^3} \times r \quad (R_e : \text{地球半徑})$$

若將地球質量以

$$M = \rho_{av} \times \frac{3}{4} \pi R_e^3 \quad (\rho_{av} : \text{地球的平均密度} = 5.51 \text{ g/cm}^3)$$

代入，則可表示成

$$g_{in} = \frac{3}{4} \pi G \rho_{av} \times r \dots\dots\dots (1)$$

其值與地球半徑成正比。換句話說，地球的重力場，在地表附近有最大值，在地表外與距離的平方成反比遞減，在地表內部，往地心方向則線性遞減至零。

但真實的情況下，地球內部的重力場真的是如此分布嗎？我們知道地球內部大致可分成地核 (Core)、地函 (Mantle) 與地殼 (Crust) 如圖 2，其密度分別為  $\rho_1 = 10.7 \text{ g/cm}^3$ 、 $\rho_2 = 4.5 \text{ g/cm}^3$  與  $\rho_3 = 2.8 \text{ g/cm}^3$ ，而分布的範圍，地核是從地心到  $a_1 = 3480 \text{ km}$ ，地函分布於  $a_1 = 3480 \text{ km}$  至  $a_2 = 6300 \text{ km}$ ，地殼只分布在  $a_2 = 6300 \text{ km}$  至  $a_3 = 6370 \text{ km}$ ，很明顯地，若只使用均勻密度的想法，來計算地球內部的重力場，這樣的模型似乎太過簡化。

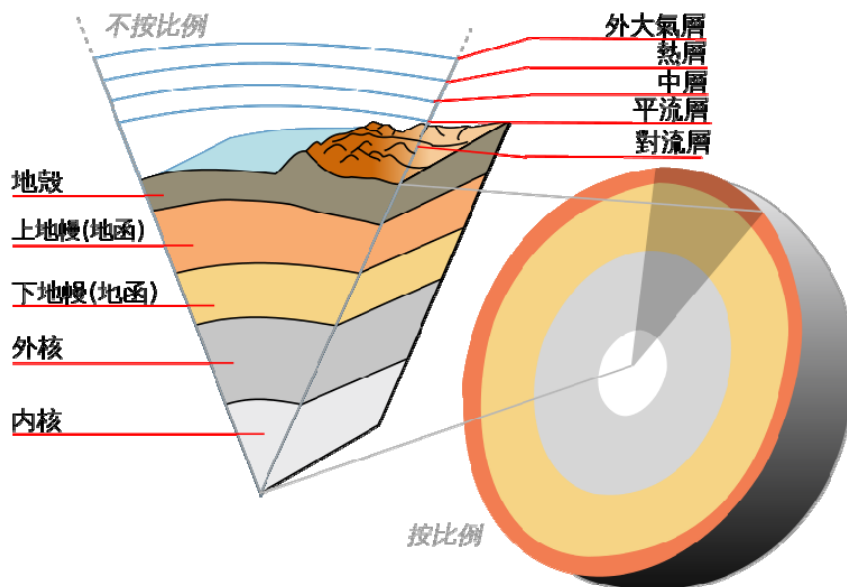


圖 2：地球內部構造，大致可分成地核、地函與地殼

若從真實情況下分析，我們將模型分成三種（地核、地函與地殼）均勻密度的情況，此時就不能直接使用地球的平均密度 = 5.51 g/cm<sup>3</sup>，而是要將密度分成地核、地函與地殼的密度分別代入，最後得到的重力場會變得較為複雜以下我們來進行深入的討論：首先地核中的重力場可以利用第(1)式

$$g_m = \frac{3}{4}\pi G \rho_{av} \times r$$

以  $\rho_1$  取代  $\rho_{av}$ ，則地核中的重力場可表示成

$$g_1 = \frac{3}{4}\pi G \rho_1 \times r \quad (\text{範圍：} 0 \leq r \leq 0.55R_e)$$

到這裡讀者也許會有疑問，討論地核之重力場難道不需考慮地核外部的物質嗎？是的！我們同樣用球殼定理可以得知，當我們討論一球形物體內之重力場，只需考慮該點至球心內的質量。所以若視地函為均勻，地函內的重力場強度分析就容易許多。

接下來我們看地函中的重力場，其重力場受到地核與部分地函的影響，

$$g_2 = g_{\text{地核}} + g_{\text{地函}} = \frac{3}{4}\pi G \left[ \frac{\rho_1 a_1^3}{r^2} + \frac{\rho_2 (r^3 - a_1^3)}{r^2} \right] \quad (\text{範圍：} 0.55R_e \leq r \leq 0.99R_e)$$

註： $\frac{3}{4}\pi(r^3 - a_1^3)$  為地函之體積，其值必須扣除地核體積]地函的重力場涵蓋之範圍就必須

考慮從地函到地心，故需再加上地核造成的影響。最後，同理可以得到地殼內部的重力場，其值受到地核、地函與部分地殼的影響，地殼中的重力場表示成

$$g_3 = g_{\text{地核}} + g_{\text{地函}} + g_{\text{地殼}} = \frac{3}{4}\pi G \left[ \frac{\rho_1 a_1^3}{r^2} + \frac{\rho_2 (a_2^3 - a_1^3)}{r^2} + \frac{\rho_3 (r^3 - a_2^3)}{r^2} \right] (\text{範圍：} 0.99R_e \leq r \leq R_e)$$

註： $\frac{3}{4}\pi(a_2^3 - a_1^3)$  為地函之體積， $\frac{3}{4}\pi(r^3 - a_2^3)$  為地殼之體積]最後，利用 mathematica 軟體可

畫製成如圖 3。

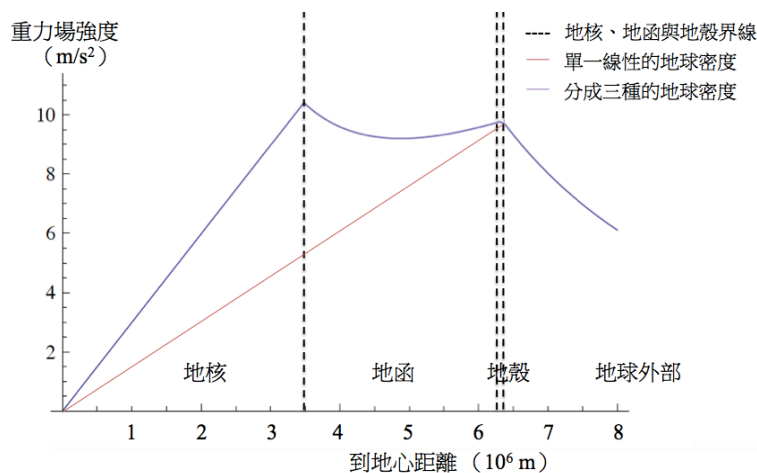


圖 3：將地球內部分成三種密度均勻材質，重力場的分佈情況

從圖 3 中可以看出，內部的重力場並不是線性遞減至零，而且在地表的重力場也並非最大值，最大值出現在地核與地函的交界處，其值大約為  $g = 10.5 \text{ m/s}^2$ 。當然真實地球內部的構造分得更細，密度也不斷地隨著深度而改變。目前，由標準地球模型委員會（Standard Earth Model Committee）所提出的初步參考地球模型（Preliminary reference Earth model, PREM）為目前的主要模型，密度分布與重力場分布可參考圖 4 與圖 5。當然，這是將地球內部結構區分更細的模型，地球內部的構造也許並非如此，或許比你我想像中都還複雜許多！

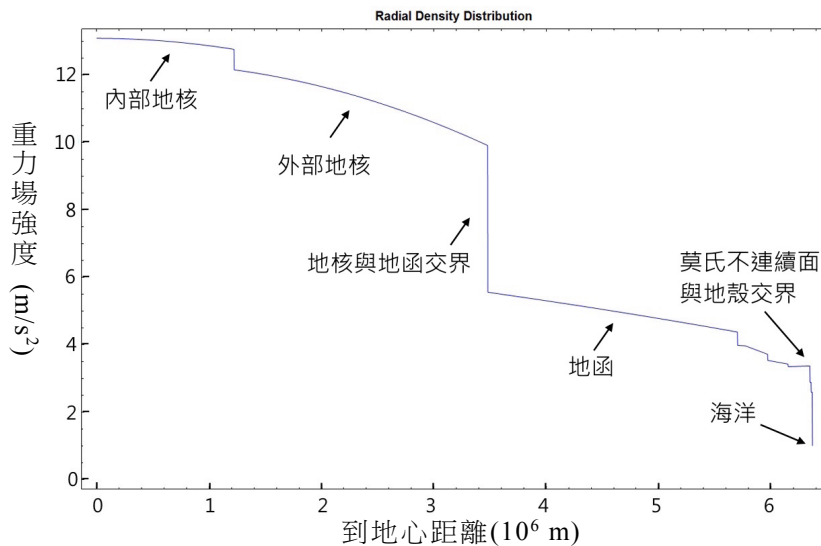


圖 4：初步參考地球模型中內部密度與半徑之關係圖

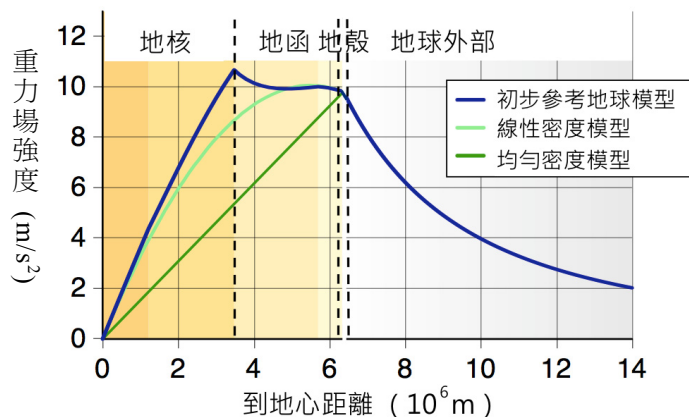


圖 5：初步參考地球模型中重力場與半徑之關係圖

### 參考文獻

Structure of the Earth from [https://en.wikipedia.org/wiki/Structure\\_of\\_the\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Structure_of_the_Earth)  
 Preliminary reference Earth model. Physics of the Earth and Planetary Interiors 25 (4): 297–356.