對數律的簡化教學法

王世勛

新北市立新北高級工業職業學校

壹、前言

傳統的對數教學中，對數的定義：$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，若 $a^x=b$，則 $x=\log_a b$，也可說 $a^{\log_a b}=b$，再來可推導出為數不少的對數律：例如在對數存在的條件下有 $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ 或 $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ 或 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$，這些對數律林林總總有十幾條，學生要知道每條對數律及如何正確使用實為一大負擔，尤有甚者還亂用對數律，例如 $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ 或 $\log_a\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$，反正就亂用一通，本文以定義配合兩條對數律：(1) $\dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a$ (2) $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$，可處理所有的對數運算。

貳、由對數的定義證明兩條對數律

(1) $\dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a$　　(2) $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

證明：

(1) 等價於證明 $\log_a b\times\log_b a=1$，$a^{\log_a b\times\log_b a}=(a^{\log_a b})^{\log_b a}=b^{\log_b a}=a$，已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，以證得 $a^{\log_a b\times\log_b a}=a$ 可推得 $\log_a b\times\log_b a=1$。

(2) 左式 $=a^{\log_b c}=(b^{\log_b a})^{\log_b c}=b^{\log_b a\times\log_b c}$，右式 $=c^{\log_b a}=(b^{\log_b c})^{\log_b a}=b^{\log_b c\times\log_b a}$，由 $b>0,$且$b\neq 1$得證左式=右式。

參、由對數的定義證明兩條對數律

例 1：(1) $\log_4 8=x$　(2) $\log_3 y=-2$

(3) $\log_z\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}$，求 x、y、z 的值。

解：(1) $4^{\log_4 8}=4^x\Rightarrow 8=4^x\Rightarrow 2^3=2^{2x}$

$\Rightarrow 3=2x\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$。

(2) $3^{\log_3 y}=3^{-2}\Rightarrow y=\dfrac{1}{9}$。

(3) $z^{\log_z\frac{1}{8}}=z^{\frac{3}{4}}\Rightarrow\dfrac{1}{8}=z^{\frac{3}{4}}\Rightarrow(\dfrac{1}{8})^{\frac{4}{3}}=(z^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow(2^{-3})^{\frac{4}{3}}=z\Rightarrow z=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$。

例 2：求 (1) $\log_6 0.2+\log_6 180$

(2) $\log_2 48-\log_2 3$

解：(1) $6^{\log_6 0.2+\log_6 180}=6^{\log_6 0.2}\times 6^{\log_6 180}$

$=(0.2)\times 180=36=6^2$

$\Rightarrow\log_6 0.2+\log_6 180=2$。

(2) $2^{\log_2 48-\log_2 3}=2^{\log_2 48}\div 2^{\log_2 3}=48\div 3$

$=16=2^4\Rightarrow\log_2 48-\log_2 3=4$。

例 3：求 $\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 8$ 的值。

解：$2^{\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 8}=(2^{\log_2 3})^{\log_3 5\times\log_5 8}$

$=(3^{\log_3 5})^{\log_5 8}=5^{\log_5 8}=8=2^3$

$\Rightarrow\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 8=3$。

例 4：求 $\dfrac{\log_2 9}{\log_4 3}$ 的值

解：$\log_2 9 \times \dfrac{1}{\log_4 3} = \log_2 9 \times \log_3 4$

$\Rightarrow 2^{\log_2 9 \times \log_3 4} = (2^{\log_2 9})^{\log_3 4} = 9^{\log_3 4}$

$= 3^{2\times\log_3 4} = (3^{\log_3 4})^2 = 4^2 = 2^4$

$\Rightarrow \log_2 9 \times \log_3 4 = 4 \Rightarrow \dfrac{\log_2 9}{\log_4 3} = 4$ 。

例 5：解方程式 $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$

解：令 $\log_2 x = t \Rightarrow \log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x} = \dfrac{1}{t}$

$\Rightarrow \log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$

可改寫為 $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 + 2 = 5t$

$\Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow (2t-1)(t-2) = 0$

$\Rightarrow t = \dfrac{1}{2}, 2 \Rightarrow \log_2 x = \dfrac{1}{2}, 2$

$\Rightarrow 2^{\log_2 x} = 2^{\frac{1}{2}}, 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, 4$ 。

例 6：解方程式 $3^{\log x} + x^{\log 3} = 18$

解：$3^{\log x} + x^{\log 3} \Rightarrow 3^{\log x} + x^{\log 3} = 18$ 可改寫成

$3^{\log x} + 3^{\log x} = 18 \Rightarrow 3^{\log x} = 9 \Rightarrow \log x = 2$

$\Rightarrow 10^{\log x} = 10^2 \Rightarrow x = 100$ 。

例 7：解方程式 $x^{\log x} = 100x$

解：$x = 10^{\log x} \Rightarrow x^{\log x} = 100x$ 可改寫成

$(10^{\log x})^{\log x} = 10^2 \times 10^{\log x}$

$\Rightarrow (\log x)^2 = 2 + \log x$

$\Rightarrow (\log x)^2 - \log x - 2 = 0$

$\Rightarrow (\log x - 2)(\log x + 1) = 0$

$\Rightarrow \log x = 2, -1 \Rightarrow 10^{\log x} = 10^2, 10^{-1}$

$\Rightarrow x = 100, \dfrac{1}{10}$ 。

例 8：若 $\log_4 x = \log_9 y = \log_{36} z$ 求 x,y,z 的關係式。

解：$36^{\log_4 x} = 36^{\log_9 y} = 36^{\log_{36} z}$

$\Rightarrow 4^{\log_4 x} \times \underbrace{9^{\log_4 x}}_{9^{\log_9 y}} = \underbrace{4^{\log_9 y}}_{4^{\log_4 x}} \times 9^{\log_9 y} = z$

$\Rightarrow xy = yx = z \Rightarrow xy = z$

例 9：若 a,b,c 是相異正數，求

$a^{\log\frac{b}{c}} \times b^{\log\frac{c}{a}} \times c^{\log\frac{a}{b}}$ 的值。

解：$a^{\log\frac{b}{c}} = (\dfrac{b}{c})^{\log a}, b^{\log\frac{c}{a}} = (\dfrac{c}{a})^{\log b}, c^{\log\frac{a}{b}} = (\dfrac{a}{b})^{\log c}$

$\Rightarrow a^{\log\frac{c}{b}} \times b^{\log\frac{c}{a}} \times c^{\log\frac{a}{b}}$

$= (\dfrac{b}{c})^{\log a} \times (\dfrac{c}{a})^{\log b} \times (\dfrac{a}{b})^{\log c}$

$= \dfrac{b^{\log a}}{a^{\log b}} \times \dfrac{c^{\log b}}{b^{\log c}} \times \dfrac{a^{\log c}}{c^{\log a}} = \dfrac{b^{\log a}}{b^{\log a}} \times \dfrac{c^{\log b}}{c^{\log b}} \times \dfrac{a^{\log c}}{a^{\log c}}$

$=1$ 。

例 10：求 $(\log_3 15)(\log_5 15) - \log_3 5 - \log_5 3$ 的值。

解：$3^{\log_3 15} = 15 = 3\times 5 = 3 \times 3^{\log_3 5}$

$\Rightarrow \log_3 15 = 1 + \log_3 5$

$5^{\log_5 15} = 15 = 3 \times 5 = 5^{\log_5 3} \times 5$

$\Rightarrow \log_5 15 = 1 + \log_5 3$

$\Rightarrow (\log_3 15)(\log_5 15) - \log_3 5 - \log_5 3$

$= (1+\log_3 5)(1+\log_5 3) - \log_3 5 - \log_5 3$

$= 1 + \log_3 5 \log_5 3 + \log_3 5$

$\quad + \log_5 3 - \log_3 5 - \log_5 3$

$= 1 + \log_3 5 \log_5 3$..(1)

$3^{\log_3 5 \log_5 3} = 5^{\log_5 3} = 3 \Rightarrow \log_3 5 \log_5 3 = 1$

$\Rightarrow$ 代入(1)=1+1=2。

例 11：試證明 $\log_4 6>\log_3 4$ 。

解：等價於證明 $\log_4 6>\log_3 4$ 即 $6>2^{2\log_3 4}$

即 $2\times 3>2^{2\log_3 4}$ 即 $2\times 2^{\log_2 3}>2^{2\log_3 4}$，再來要證明 $1+\log_2 3>2\log_3 4$，左右同乘 $\log_3 2$ 這個正數，等價於

$\log_3 2+1>2\log_3 4\times\log_3 2$ ....(1)

令 $\log_3 2=t$ ，則 $3^{\log_3 2}=3^t\Rightarrow 2=3^t$

$\Rightarrow 4=3^{2t}\Rightarrow 3^{\log_3 4}=3^{2t}\Rightarrow\log_3 4=2t$

$\Rightarrow$ (1) 式即 $t+1>2(2t)t$

$\Rightarrow$ 最後要證明 $4t^2-t-1<0(t=\log_3 2)$

$\Rightarrow$ 令 $f(t)=4t^2-t-1=0$ 可得

$$t=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}\Rightarrow 0<t=\log_3 2<1$$

$$\Rightarrow\frac{1-\sqrt{17}}{8}<t<\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$f(t)$ 的函數圖形是開口向上的拋物線，已知 $f(\frac{1-\sqrt{17}}{8})=f(\frac{1+\sqrt{17}}{8})=0$

$\Rightarrow$ 在 $\frac{1-\sqrt{17}}{8}<t<\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 的條件下，可以確定 f(t)<0，得證。

參、對數律的誤用

傳統教學中，學生使用對數律常有誤用，例如：誤以為 $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ 這個錯誤可以定義檢視，假設 $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y\Rightarrow a^{\log_a(x+y)}=a^{\log_a x+\log_a y}\Rightarrow x+y=xy$ (此式不恆真，產生矛盾)，原假設錯誤，所以 $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ 不恆成立。

肆、結論

將對數視為指數，則在國中已建立的指數律運算基礎上可以處理對數的運算，免除另外再使用對數律，減輕學生負擔之外也避免學生誤用。

參考文獻

程崇海(2014):數學 C3。新北市:龍騰出版社。

洪萬生(2013):數學 C3。台北市:東大圖書有限公司。

姚敏庭(2012):數學 C3。台中市:信樺文化事業有限公司。

陳吳煜(2013):數學 C3。新北市:泰宇出版社。

林鴻鳴(2014):數學 C3。台北市:啟芳出版社。