已知四面方程式之四面體體積公式

陳建燁

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

「科學教育月刊」第 362 期，阮瑞泰老師的一篇文章(阮瑞泰(2013)，「已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式」)，有相當於如下的結果：

在坐標平面上，已知兩兩不平行的三直線方程式分別為：

$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 與 $L_3: a_3x+b_3y+c_3=0$，令 A 為 L_2 與 L_3 的交點，B 為 L_3 與 L_1 的交點，C 為 L_1 與 L_2 的交點，則有

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\left|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|}$$

，其中 $S_{\Delta ABC}$ 代表 ΔABC 的面積。

筆者透過將兩矩陣相乘後，取行列式值的手法，得到了另一個證明。沈澱一段時間後，忽然有所領悟，同樣的手法，推廣到四面體的情形會如何呢？於是有了本篇文章的探索。

貳、預備工作

先假設讀者可接受以下的記號與引用的公式：

1. 在空間中，已知某一四面體 $ABCD$ 的四個面所在的平面方程式分別為：
   $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，$E_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$，$E_4: a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$。
2. 令 $A(x_1,y_1,z_1)$ 為 E_2,E_3,E_4 三平面的交點，$B(x_2,y_2,z_2)$ 為 E_1,E_3,E_4 三平面的交點，$C(x_3,y_3,z_3)$ 為 E_1,E_2,E_4 三平面的交點，$D(x_4,y_4,z_4)$ 為 E_1,E_2,E_3 三平面的交點。
3. 將 $ABCD$ 的體積記為 V_{ABCD}，則 V_{ABCD} 可用四階行列式加以表達，即

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

4. 四階行列式對第一列展開：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\cdot\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

5. 四階克拉瑪公式。

參、本文

真正開始本文的工作：

首先，考慮兩矩陣 $S=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$ 與 $T=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的乘積：

$$S\cdot T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

($\because A(x_1,y_1,z_1)$ 為 E_2,E_3,E_4 三平面的交點

$\Rightarrow a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2=0$，$a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0$，且 $a_4x_1+b_4y_1+c_4z_1+d_4=0$，矩陣中其餘的「0」同理可得。)

式子中的 K 為何？可由如下的方法確定：

只看 K 所在的行，可得 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$，由克拉瑪公式，

可得 $1=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & K \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-K\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow K=\dfrac{-\Delta}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$，

同理可得 $L=\dfrac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$，$M=\dfrac{-\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$，$N=\dfrac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

接著，將矩陣等式 $S\cdot T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}$之中的各矩陣取行列式值，可得

$$\det(ST)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=K\cdot L\cdot M\cdot N$$

將此等式取絕對值，可得

$$|\Delta|\cdot(6V_{ABCD})=\left|\frac{-\Delta}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}\cdot\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}\cdot\frac{-\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}\cdot\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}\right|$$

$$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\frac{|\Delta|^3}{\left|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\right|^3}{\left|\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|}$$

到此，得到了已知四面方程式的四面體體積公式。

例：在空間中，已知某一四面體 $ABCD$ 的四個面所在的平面方程式分別為：

$E_1: x+y+z-2=0$，$E_2: x+y-z=0$，$E_3: x-y+z=0$，$E_4: -x+y+z=0$，則

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\left|\begin{vmatrix}1&1&1&-2\\1&1&-1&0\\1&-1&1&0\\-1&1&1&0\end{vmatrix}\right|^3}{\left|\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\right|}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{|-8|^3}{|(-4)\cdot(-4)\cdot 4\cdot(-4)|}=\frac{1}{3}\text{。}$$

肆、結語

推導過程中，用到了四階的行列式性質，稍稍超過現行高中教材的課程內容，有勞老師稍作補充。而最後導出的四面體體積公式，和已知三邊直線方程式的三角形面積公式作一對比，其形式的一致，讓人不禁說聲：「美哉數學！」

參考文獻

阮瑞泰(2013)：已知三角形三邊所在直線方程式之面積公式。科學教育月刊，362 期(9 月號)，p43～48。

陳建燁(2015)：「已知三邊直線方程式之三角形面積公式」的另一種證法。科學教育月刊，第 382 期(9 月號)，p32～34。