噴水池的水幕邊界方程式

黃光照*　蕭志明

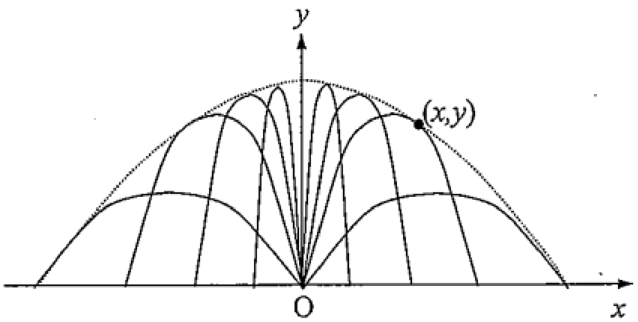
臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

有一道題目是求解有關噴水池的水幕邊界方程式，此題曾出現在 2001 年出版的 200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions 書中的第 40 道題，也是 2005 年第六屆亞洲物理奧林匹亞競賽，和第三十六屆國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊初選考試試題中填充題的第三題，對其所提供的參考答案，部份學生不易懂為何要這樣解題，所以在此另提出一簡單作法給學生參考，以及第二種較複雜作法給老師參考。

一、試題的內容與提供的參考答案

考慮在公園裡的一座噴水池，位於池中央的噴水頭為半球形，其上佈滿許多噴水孔，可使水以同一速率從各個角度和方向噴出，形成水幕，如圖一所示。試求水幕的最大高度和其與圓形底面直徑的比值為何？若從通過噴水頭的鉛直切面來看，該水幕邊界(即包絡線)的曲線方程式為何？



圖一　噴水池噴出的水幕

【參考答案】

水幕在鉛直方向是軸對稱的，因此只要考慮一個截面即可。令噴嘴在 xy 平面上的原點，則噴出的水沿著從原點出發的拋物線路徑，我們的任務就是要找這些拋物線族的包絡線。設水幕內某一條拋物線上的點坐標為（x,y），則斜拋的軌跡方程式為

$$y=\tan\theta\cdot x-\frac{g\,x^2}{2(v_0\cos\theta)^2}=\tan\theta\cdot x-\frac{g\,x^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta) \tag{1}$$

*為本文通訊作者

式中θ為水從噴頭噴出時的仰角。令 $\tan\theta = u$ ，則斜拋的軌跡方程式可改寫為

$$\frac{g\,x^2}{2v_0^2}u^2 - xu + \left(y + \frac{g\,x^2}{2v_0^2}\right) = 0 \tag{2}$$

如果點（x,y）固定，則上式為關於 u 的二次方程。對 u 而言，上式有實數解的條件為

$$x^2 - 4\cdot\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) \ge 0$$

即有

$$y \le \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{3}$$

這個不等式將 xy 平面用一條拋物線分成兩部分。水可以達到在拋物線下的點，但是不能達到拋物線以上的點。這條拋物線 $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ 就是待求的包絡線(實際上水幕在三維空間是一個拋物面)。

可以很容易得出，水幕的最大高度為 $y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$。水幕在池水的表面形成一個圓，其半徑可藉由 $y = 0$ 得出 $R = \frac{v_0^2}{g}$ 。進一步得出 $\frac{y_{max}}{2R} = \frac{1}{4}$ 。

二、由 $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$ 的條件，得出水幕邊界的包絡線方程式

將(2)式改寫為

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}u^2 + xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{4}$$

由(4)式和圖一可以發現，對一固定的 x 而言，在所有的拋物線族（即對所有不同的 u 值）中，與水幕包絡線相交的點，所對應 y 具極大值，應該符合 $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$ 的條件，即

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{gx^2}{v_0^2}u + x = 0 \tag{5}$$

解得 $u = \frac{v_0^2}{gx}$ 。將此條件代入軌跡方程式(4)式，得

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 + x\cdot\frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \tag{6}$$

(6)式即為該水幕邊界(即包絡線)的曲線方程式

三、由幾何解法，得出水幕邊界的包絡線方程式

現用一種幾何解法，所用的數學只是簡單的三角代數。這個解法的關鍵在於做出拋體的位移、速度和加速度的向量幾何關係圖。首先寫出速度和位移的向量形式：

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{g}t \tag{7}$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{8}$$

式(7)和式(8)中的 $\vec{v}$ 、 $\overrightarrow{v_0}$ 、 $\vec{r}$ 、 $\vec{g}$ 分別是拋體的末速度、初速度、位移和重力加速度。將式(8)除以時間，得平均速度 $\overline{\vec{v}}$

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\vec{r}}{t} = \overrightarrow{v_0} + \frac{1}{2}\vec{g}t \tag{9}$$

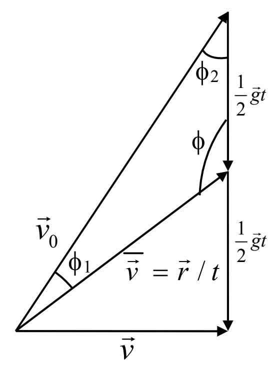
將拋體的初速度 $\overrightarrow{v_0}$、平均速度 $\overline{\vec{v}}$ 和末速度 $\vec{v}$ 三者的向量幾何關係畫在圖二中。圖中 ϕ 是向量 $\vec{r}$ 和 $\vec{g}$ 的夾角， ϕ_1 是初速度 $\overrightarrow{v_0}$ 和 $\vec{r}$ 的夾角， ϕ_2 是 $\overrightarrow{v_0}$ 和 $\vec{g}$ 夾角的補角。根據圖二，由三角形的正弦定理可得

$$\frac{\frac{1}{2}gt}{sin\,\phi_1} = \frac{\frac{r}{t}}{sin\,\phi_2} = \frac{v_0}{sin\,\phi} \tag{10}$$

從而

$$\frac{1}{2}gt = \frac{v_0}{sin\,\phi}sin\,\phi_1 \tag{11}$$

$$\frac{r}{t} = \frac{v_0}{sin\,\phi}sin\,\phi_2 \tag{12}$$



圖二　初速度、平均速度和末速度的向量幾何關係圖

由(11)、(12)兩式相乘，消去時間 t，可得

$$r = \frac{2{v_0}^2}{g}\frac{sin\,\phi_1\,sin\,\phi_2}{sin^2\,\phi} \tag{13}$$

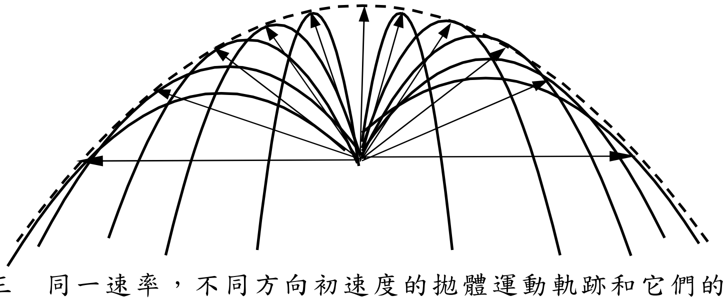
利用三角恆等式，將上式改寫為

$$r = \frac{{v_0}^2}{g}\frac{cos(\phi_1-\phi_2)-cos(\phi_1+\phi_2)}{sin^2\,\phi} \tag{14}$$

由於觀測方向(即向量 $\vec{r}$ 的方向)和初速度數值給定，所以 v_0、ϕ 為定值，從而 $\phi_1+\phi_2=180^o-\phi$ 為定值。因此當 $\cos(\phi_1-\phi_2)$ 取極大值時，r 極大，所以極值條件為 $\phi_1=\phi_2$ 。在觀測方向的最大射程為

$$r_{max} = \frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{1+\cos\phi}{\sin^2\phi} = \frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{1+\cos\phi}{1-\cos^2\phi} = \frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\cos\phi} \tag{15}$$

式(15)若以極坐標 (r,ϕ) 表示，所代表的曲線是一條拋物線[註1]，也就是拋體運動軌跡的包絡線方程，因所有具相同初速率 v_0，方向不同的拋體運動都在它的下面。如圖三所示：圖中箭頭指示的是觀測方向 $\vec{r}$ 的方向，相應的曲線是射程最大時拋射體的運動軌跡，而與所有運動軌跡相切的曲線就是軌跡的包絡線，即式(15)表示的曲線。運動軌跡和包絡線的相切點到拋射點的距離，就是最大射程。



圖三　同一速率，不同方向初速度的拋體運動軌跡和它們的包絡線

接著要求包絡線在直角坐標系中的方程式，參考圖四，設焦點 F(即拋射點)的坐標為(0,0)，焦點 F 到準線 L 的距離為 s，拋物線在極軸上的頂點坐標為$(0,c)$，又拋物線的離心率等於 1 的關係，知準線為 $y=2c$。由於已證得水幕邊界的包絡線就是拋物線，即表示在初速率 v_0固定下，在圖四中 $\vec{r}$ 和 $\vec{g}$ 的夾角為ϕ的觀測方向上的最大射程就是圖中的 r_{max}，進而推得

$$e=\frac{\overline{PF}}{d(P,L)}=\frac{r_{max}}{s-r_{max}\cos(\pi-\phi)}=\frac{r_{max}}{s+r_{max}cos\phi}=1\Rightarrow r_{max}=\frac{s}{1-\cos\phi}$$

和(15)式比較，得 $s=\dfrac{v_0^2}{g}$，從圖四可以看出 $s=2c$，因此

$$c=\frac{s}{2}=\frac{v_0^2}{2g} \qquad (16)$$

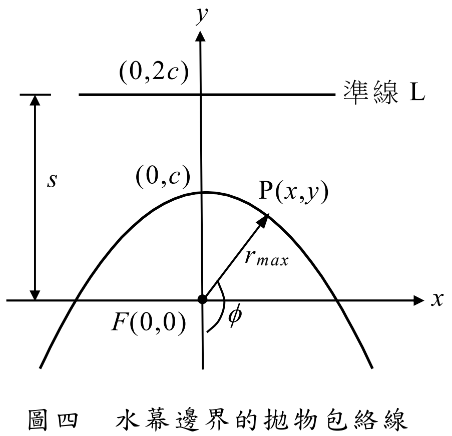
又在直角坐標系中，拋物線的方程式為

$$e=\frac{\overline{PF}}{d(P,L)}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2c-y}=1\Rightarrow y=c-\frac{1}{4c}x^2 \qquad (17)$$

將 $c=\dfrac{v_0^2}{2g}$代入(17)式，得

$$y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

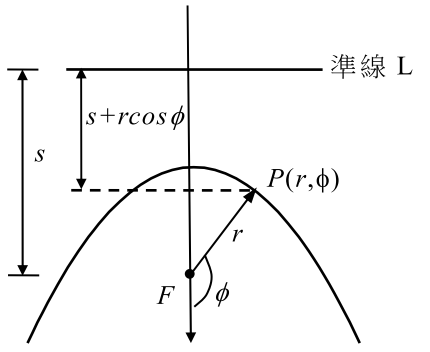
上式即為水幕邊界的曲線方程式[註2]。



圖四　水幕邊界的拋物包絡線

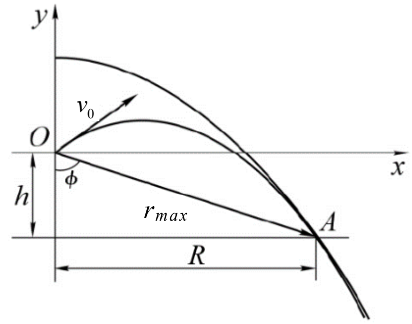
貳、備註

註 1：參考圖五，平面上到一定點 F 和一條定直線 L(F∉L)的距離比等於一個常數 e 的動點 P 的軌跡，稱為圓錐曲線Γ，即Γ={ $P|\overline{PF}=e\cdot d(P,L)$ }，其中 F 稱為Γ的焦點，直線 L 稱為Γ的準線，常數 e 稱為Γ的離心率。現在想要用極坐標來推導出代表圓錐曲線Γ的極坐標方程式。設極軸以 F 為極(焦)點，垂直極軸的定直線為準線 L，極點 F 到準線 L 的距離為 s。設Γ上的動點 P 的極坐標為(r,ϕ)，由定義 $\overline{PF}=e\cdot d(P,\mathrm{L})\Rightarrow r=e\cdot(s+r\cos\phi)\Rightarrow r=\dfrac{es}{1-e\cos\phi}$，此式稱為圓錐曲線Γ的極坐標方程式。當 $e=1$時，$r=\dfrac{s}{1-\cos\phi}$表示拋物線。



圖五　拋物線的極坐標

註 2：水幕邊界的曲線方程式可以用來求鉛球投擲的最大射程。將鉛球視為質點，忽略空氣阻力，設鉛球從距地面 h 的高度投出，初速度大小為 v_0，落地點 A，距投擲點 O 的水平距離為 R，如圖六所示。如果 A 點為最遠的落地點，則 A 點在包絡線上，而 r 和 R 都將達到最大值。將 A 點坐標$(-h,R)$代入包絡線方程式 $y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$ 中，得 $-h=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{g}{2v_0^2}R_{\max}^2$ $\Rightarrow R_{\max}=\dfrac{v_0}{g}\sqrt{(v_0^2+2gh)}$，在 v_0固定下，可見運動員越高，最大水平投擲距離越遠。



圖六　鉛球投擲

參考文獻

物理奧林匹亞國家代表隊選訓工作小組(2012)：1994-2012 IPhO 初選試題及解答彙編。台北市：台師大物理系。

劉麗峰(2012)。拋體運動極值問題的幾何解法。大學物理第 31 卷第 7 期，21-23 頁。

P. Gnädig, G. Honyek, K. F. Riley(2001). 200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions.(p8 & pp98-99) Cambridge University Press.