數學臆測探究教學實務分析
--以二進位數字樣式探索活動為例

劉致演* 秦爾聰

國立彰化師範大學　科學教育研究所

摘　要

本研究旨於透過個案教師在二進位樣式探究活動的教學實務觀察，分析個案教師教學策略運用情形。研究結果發現，個案教師數學臆測探究教學主要脈絡是以特殊化、系統化、一般化、類比作為主要佈題策略，藉由融入生活中數學素養之分析性鷹架，透過數學概念及程序的引導，幫助學生根據過程紀錄進行樣式推論及一般化結果之論證，並在全班性的論述中藉由詮釋、檢驗及歸納形成一致性的結論。

關鍵詞：二進位、分析性鷹架、數學探究教學、臆測

壹、前言

最近興起「翻轉教室」(flipped classroom)風潮，引起教育社群對於教學改革的關注，而改革教學的旨趣在於將學習責任交還給學生，教學的活動應以學生自主學習為中心，教師則應專注於建構促進學生理解的課室環境(Anderson, 2002; NCTM, 2000)。探究教學則符應這樣的旨趣，相關研究發現數學探究教學，足以提升學生數學學習的理解與思維(Fennema, et al., 1996; Wood & Seller, 1997)，同時亦能強化學生的創造力與問題解決能力(Kwon, Park, & Park, 2006)。解題是數學探究的主要活動(Baroody, 1993)，又一般化(generalizing)、特殊化(specializing)及類比等數學臆測思維是解題的重要策略(Polya, 1954)，故數學臆測與探究是一交織的整體(Cañadas, Deulofew, Figuerias, Reid, &Yevdokimov, 2007)。研究結果(Becker & Rivera, 2007; Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall; 1998)發現當學生參與樣式問題的解題活動時，不僅能夠根據特殊化的策略提出一般化的結果，更能發展出不同的認知處理過程。同時，數學中充滿科學的樣式與關係，因此，探索樣式及關係對於數學學習來說是極其重要的議題之一 (American Association for the Advancement of Science [AAAS], 1990;NTCM, 2000)。有鑑於此，本研究旨於策劃一個二進位數字樣式的數學臆測探究教學活動，透過對於一位長年致力於發展融入臆測思維之小組探究教學教師，進行臆測探究教

* 為本文通訊作者

學實務之觀察與分析，藉以提供正處於教育改革行動（旨於培養概念理解及複雜的解題）與傳統教學（強調培育演算程序的效能及準確）不可調和張力(Gravemeijer, 1997)間之教師，進行教學改變之參考。

貳、文獻探討

探究是一種動態過程，此過程的開端源自於對自然現象的好奇，並努力透過探索拼湊出真知的全貌(Branch& Oberg, 2004)。因而，數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化(generalization)將錯綜複雜的片段關係，加以整合成和諧而可理解的整體(Kent, 1997; Peirce, 1955)。此外，數學探究活動的核心是針對欲探討現象設置及建立假說或猜想(Meyer, 2010)，但這些假說與猜想必須經過驗證，驗證的方法是透過假設－演繹(hypothetic-deductive)的系統化過程(Lakatos, 1976)。簡言之，數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學 (doing mathematics)」，在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並藉由反駁加以修正並與他人進行溝通與論述(Baroody, 1993;Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 1991, 2000; Peirce, 1955)。然而，「學生不會意外地成為主動的學習者，除非經由計畫性的設計，始能讓學生進行結構性的探究」(Richards, 1991, p.38)，因此探究教學的重要旨趣之一即於幫助學生將經驗與問題研究連結(Dewey, 1938)，在與他人彼此協商中主動建構數學知識。此外，探究教學是一個具有多元定義且難以把握的概念(Aulls& Shore, 2008)，因而存在不同詮釋面向，如 Lee(2001)認為數學探究教學應協助學生起始數學臆測歷程，Jaworski(1994)認為數學探究教學旨於在課室中佈建社會性脈絡，使學生在溝通論述中探索數學問題建構數學知識，Franke、Kazemi 和 Battey(2007)更以整體觀點來看待數學教學，他們認為數學教學旨於建構一個學習環境，教師應於其中激發學生做數學、致力協助學生主動發現學科知識獨有的表徵，並且能夠詮釋學生的想法。綜上所述，教師在探究教學活動中應協助學生在其佈建的問題脈絡中，如同數學家般進行數學問題的研究(AAAS, 1993)，進而探索其背後所蘊含的數學樣式及知識。實際上，「數學家很少直接解決問題，通常他們會先將問題特殊化、提出猜想，然後不斷的修正直到問題能解決為止」(Mason, Burton, & Stacey, 2010, p.141)，此種在問題探究中尋找高解釋力的猜想或假定，再以最嚴格的方式找尋反駁的可能例證的想法，即是數學臆測思維的本質(Lakatos, 1976)。綜上所述數學臆測是數學探究的核心，兩者在諸多面向上是為一個交織的整體(Cañadas, et al., 2007)。此外，面對非例行性問題時通常我們會將問題加以簡化，並透過簡單的試驗來檢驗，經過多次的試驗後將結果加以擴充並形成一般性通則；簡化問題以及試驗的過程即是特殊化，形成通則的過程稱為一般化。由於一般化、特殊化及類比通常協同解決問題(Polya,

1954)，並且學生的數學臆測思維模式與數學家相仿皆具有猜測、檢驗、反駁、相信的遞迴歷程（陳英娥、林福來，1998）。因此，本研究主張數學臆測探究教學即是教師建置一個學習環境，引導學生在解題過程中藉由特殊化、一般化、類比等策略啟動數學臆測思維模式，並幫助學生在溝通論述的過程中建構數學知識。

參、研究方法

一、教學活動設計

本研究中的數學臆測探究活動名稱為「魔你的數」，該活動實際實施六週、每週兩節課，研究實施期程前後約一學期。「魔你的數」是以二進位數字樣式原理所設計的數字猜謎遊戲。遊戲方式是開始時請一位同學選定 1 至 63 其中一個數字，然後老師逐次問他這個數字是否依序出現在表格一到六，最後教師透過該學生的回答，以表格一到六的最小數字 1、2、4、8、16、32 作為該表格所代表的基數，若學生回答有則加上該表格所代表的基數，加總的結果即是學生原先選定的數字，如數字 5 會出現在表格一、三，則 1 加 4 即得到 5。

二、研究參與者

本研究個案教師畢業於某師範院校數學系，有十四年教學資歷，大學求學時期受數學臆測及小組探究學習理論啟蒙，在教學生涯中始終相信數學是擬經驗的，並且數學知識存在動態可駁的特質，簡言之個案教師是改革取向教學的具體實踐者。本研究之數學臆測探究活動實作班級，為個案教師的國二班級。

No. 1

17	19	61	43	25	27	57	31
1	51	37	7	9	11	13	15
33	35	5	39	29	23	45	47
49	3	53	55	41	59	21	63

No. 2

50	51	10	43	58	15	62	63
2	27	6	7	54	22	14	38
18	19	11	23	26	3	30	31
34	35	59	39	42	55	46	47

No. 3

15	5	44	37	12	13	39	4
20	21	61	23	28	29	38	53
52	31	54	47	60	22	62	63
36	7	30	14	6	45	46	55

No. 4

46	13	26	63	28	11	30	31
12	62	42	43	44	45	29	47
56	8	58	59	60	61	41	27
57	9	10	24	40	25	14	15

No. 5

61	17	62	60	20	21	22	23
48	49	50	19	52	53	57	55
24	25	26	27	28	29	58	31
56	54	30	59	51	16	18	63

No. 6

58	33	59	32	36	51	41	39
40	38	42	43	56	48	34	47
63	49	50	37	52	57	54	55
44	53	61	46	60	35	62	45

圖一、魔你的數活動表格

三、資料收集

資料蒐集來自多元管道，共有課室錄影、課後討論、教師反思與教師晤談。課室觀察進行全程錄影，錄影聚焦於教師引導學生社群臆測探究、師生論述、學生小組互動情形等。教師反思主要是當次活動實施後，教師針對教學策略、成效與改進之處進行反思。課後討論，課室觀察後與個案教師針對當次課程的教學策略、學生表現、所遭遇的困難及可能的解決方法進行討論。教師晤談則針對活動設計構念、教學方法，對於數學臆測教學的經驗整合及對於未來的預期等議題進行晤談。

四、資料分析

本研究針對教師在活動中策略運用(strategic competence)(NRC, 2001)即針對學生學習所需彈性運用有效策略協助教學進行，依 Glaser 和 Strauss(1976)持續比較分析方法，以及 Strauss 和 Corbin (1990)對於質性資料進行開放性譯碼及主軸譯碼，再根據現象觀察結果加以有系統性的歸納，分析出支持教師臆測探究教學策略範疇。

(一)研究信度

本研究信度建構主要藉由「資料來源」與「分析者」進行三角校正(triangulation)。本研究共蒐集四種質性資料，藉由資料間的交叉比對及分析形成研究結果。另資料分析的三角校正，是由研究團隊（研究者、兩位師資培育專家）針對資料譯碼、範疇形成進行反覆磋商直到形成共識。

(二)資料編碼說明

研究者根據資料來源，將質性資料賦予編碼，編碼說明如下：課室觀察轉錄，CO；課後討論，CD；教師晤談，TI；教師反思，TR。另質性資料摘錄中，研究者代號為“研”、個案教師為 T、學生為 S。

肆、研究結果

一、活動設計構念

「魔你的數」對個案教師而言是一個很重要的臆測探究活動，因為內含溯因(abduction)的數學臆測認知發展歷程；即根據已知的事實推論現象背後所蘊含的數學原理(Peirce, 1955)。由於魔你的數是以遊戲情境為起始，除能引起學生學習動機外，更能充分展現學生平時所養成的數學素養。

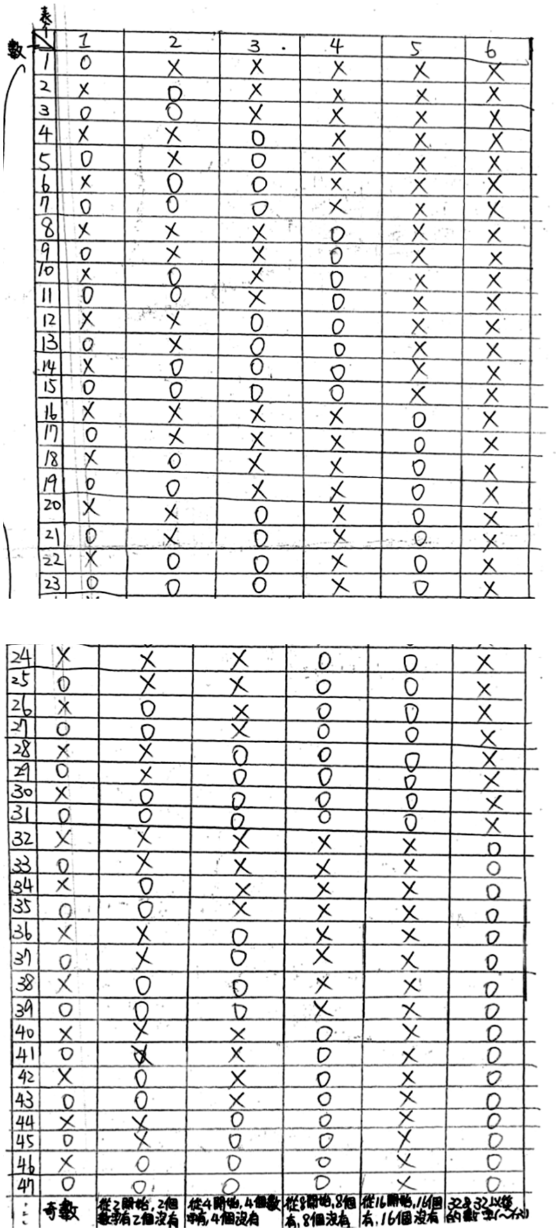
> 研：我記得那時候在做之前，你就說魔你的數可以讓他們展現豐富的數學素養，那你覺得這活動的設計理念是什麼？
>
> T：設計理念喔？背後理念當然是二進位。應該說我一開始遇到這個題目可能是 10 幾年前我就遇到一個學長，他就拿一個表格問我有沒有、有沒有...，那時候我就已經在想這到底是為什麼？後來思考滿久自己也嘗試去整理裡面一些規律，發現其實原理是二進位。【TI-20141112】

像是說魔你的數這個活動好了，它

> 可以藉由這個情境啊，把脈絡一些背景去掉把數學東西用出來、抽取出來，比如說有些同學會列那個表格，他應該知道它自己想要發現一些東西。【TI-20100525】

二、紀錄、觀察與系統化

「系統化」(systematization)是有系統地特殊化 (Mason, et al., 2010)，系統化是連結特殊化與一般化兩策略的重要歷程。面對非例行性問題時通常我們會將問題加以簡化，並透過簡單的試驗來檢驗，經過多次的試驗後將結果加以擴充並形成一般性通則即一般式或公式；簡化問題以及試驗的過程即是特殊化，形成通則的過程稱為一般化。系統化是從「舉例」、「有系統地多舉幾個例子」直到形成一般式的過程，因此在數學臆測探究教學中是很重要的教學策略。由於國二學生通常未具有二進位的概念，因此，透過表格中數字的整理、觀察及分析即是此活動的敲門磚。本活動中僅有學生 S21 發想表格化整理，透過該表格的規律發現，表格一是奇數，表格二從 2 開始兩個連續數字出現、兩個不出現（即 2、3…6、7…10、11 以此類推），表格三則為連續 4 個數字一個群組(即 4、5、6、7….12、13、14、15..以此類推)，依此類推表格四是 8 個連續數字一個群組、表格五是 16 個連續數字一個群組、表格六則為 32 個連續數字一個群組。此數字樣式規律與往後的十進位轉換成二進位後的數字樣式有關，如十進位數字 2 轉換成二進位數字為 000010、十進位數字 3 轉換成二進位數字為 000011，從末位數開始二進位數字 1 表示會出現在表格一而 0 則否，於是數字 2 不會出現在第一個表格，而數字 3 則會。同樣地，往前一位數（即類似十進



數＼表	1	2	3	4	5	6
1	O	X	X	X	X	X
2	X	O	X	X	X	X
3	O	O	X	X	X	X
4	X	X	O	X	X	X
5	O	X	O	X	X	X
6	X	O	O	X	X	X
7	O	O	O	X	X	X
8	X	X	X	O	X	X
9	O	X	X	O	X	X
10	X	O	X	O	X	X
11	O	O	X	O	X	X
12	X	X	O	O	X	X
13	O	X	O	O	X	X
14	X	O	O	O	X	X
15	O	O	O	O	X	X
16	X	X	X	X	O	X
17	O	X	X	X	O	X
18	X	O	X	X	O	X
19	O	O	X	X	O	X
20	X	X	O	X	O	X
21	O	X	O	X	O	X
22	X	O	O	X	O	X
23	O	O	O	X	O	X
24	X	X	X	O	O	X
25	O	X	X	O	O	X
26	X	O	X	O	O	X
27	O	O	X	O	O	X
28	X	X	O	O	O	X
29	O	X	O	O	O	X
30	X	O	O	O	O	X
31	O	O	O	O	O	X
32	X	X	X	X	X	O
33	O	X	X	X	X	O
34	X	O	X	X	X	O
35	O	O	X	X	X	O
36	X	X	O	X	X	O
37	O	X	O	X	X	O
38	X	O	O	X	X	O
39	O	O	O	X	X	O
40	X	X	X	O	X	O
41	O	X	X	O	X	O
42	X	O	X	O	X	O
43	O	O	X	O	X	O
44	X	X	O	O	X	O
45	O	X	O	O	X	O
46	X	O	O	O	X	O
47	O	O	O	O	X	O
⋮	奇數	從2開始，2個數字有2個沒有	從4開始，4個數字有，4個沒有	從8開始，8個有，8個沒有	從16開始，16個有，16個沒有	32＆32以後的數字(~[illegible])

圖二、系統化例證

位的十位數)，二進位數字 0 與 1 同樣代表該十進位數字是否出現在表格中，由於十進位數字 2、3 的第二位數皆為 1，因此皆出現在表格二中。由於十進位數字轉換成二進位數字後，可以觀察出該十進位數字是否出現在表格中的規律，因此紀錄、觀察樣式及系統化是此活動的關鍵。

T： 好，S21 那個表格很重要。老師幾乎帶每一屆的學長姊就是利用這個表格。可是我們班，老師看一看，好像只有 S21 有列這個表格。這個表格其實就是什麼？有沒有人可以講？

S03：系統化。

T： 答對了！表格其實就是系統化地舉例子。【CO- 20140515】

伍、符號表徵與心智壓縮

心智壓縮意謂在複雜現象中，將重複性的過程壓縮成符號表徵，即是可思考概念(thinkable concept)(Gray & Tall, 2007; Tall, 2013)，此表徵同時表示為可操作的數學過程與可思考的數學概念。在上述系統化的過程中，教師引導學生觀察到表格中個數字與出現在各表格與否有關，如數字 23 出現在第 1、2、3、5 個表格，並幫助學生連結學生 S21 的發現，引導學生連結符號表徵與冪次方和的數學概念，進入此活動的核心。

T： 剛剛 S2 提出一些關鍵數字 1、2、4、8、16、32…，這個東西我們叫做什麼？

S： 等比數列。

T： 這叫做 2 的冪次方。冪是什麼？次方啊！所以這個表格，很可能跟 2 的冪次方有關係，對不對？23 跟第幾個表格有關係？

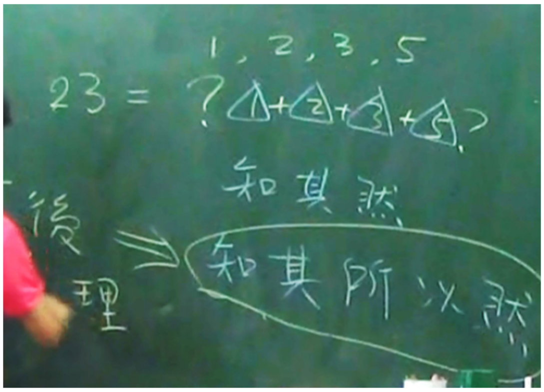
S： 1、2、3、5…

T： 我如果寫 1＋2＋3＋5，各位覺得恰當嗎？

S： 錯

T： 除非我再給他一個符號，假設三角形代表一個符號代表表格的一個象徵

好了！這三角形 1 代表第一個表格，三角形 2 代表第二個表格，四個表格加起來，這樣個為覺得有沒有比較恰當？但是如果有的話，背後的道理是什麼？你現在是知其然喔！然後背後的道理叫什麼？要什麼？也要知其所以然。好現在請你開始討論，怎樣找出知其所以然，背後的道理。開始吧！【CO-20140515】



圖三　冪次方表徵

真正的教育是透過經驗得來，經驗價值是建立於經驗的連續性的意向與經驗交互作用的調適原則之上(Dewey, 1938)。在本活動，個案教師會利用符號表徵的創作

來表徵數學概念與過程的壓縮，前述以三角形 1 表示表格一、三角形 6 表示表格六，教師利用前述的符號基礎，再次發想符號表徵來表示表格中的最小數字，以利後續將十進位數字轉換成 2 的冪次方和，學生便能發現二進位數字與表格內十進位數字的關係。例如三角形 6’ 代表第六個表格中的最小數字。

T： 我們之前講三角形 7，譬如說這個叫做表六，那剛才這叫表三。他剛剛提到兩個字，定義，看你怎麼定義。所以你可以加一個「’」(prime)。定義，剛剛 S03 提到，你可以定義三角形 6’為…來你講…最小的？數字嘛！我們就定義三角形 6’，最小的數。我現在要考各位的是…如果有一個東西較 x，請問我有沒有辦法寫成某個東西 n’加三角形 m’？加加看。來，能不能表示？給各位思考個一分鐘再小組討論。

S03：我觀察表格的時候發現因為第一個是…最小的數字，然後第二個的最小…

T： 要不要寫三角形 1’等於 1？我們已經定義好了就拿來用，符號的表達方式要一致。仔細看喔！他要推出三角形跟 prime 囉！你看他在系統化！

S03：好，就是這樣。

T： 所以，你這裡要……，三角形 prime 好！看這邊，第 n 個表的最小的數，你如果按照這樣的規律，就是 2 的 n-1 次方。【CO- 20140529】

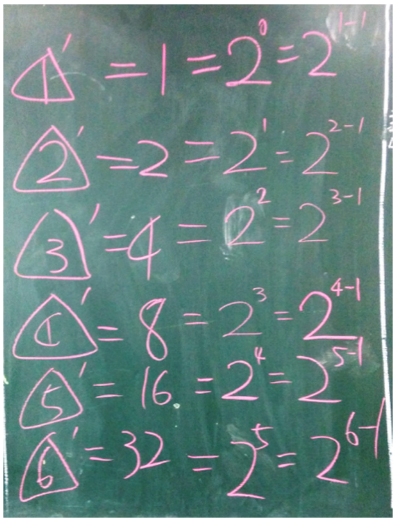


圖 3 符號表徵、表格與 2 的冪次方之關係

陸、教師的經驗是最好的教學鷹架

當學生遭遇挫折時，或是在已知的狀態下遭遇困境時，除協助學生提出試探性的解決方案，透過不斷的試誤，找到可用的解法外(Popper , 1972)，教師分析性鷹架的介入(analytic scaffolding)能幫助學生達成概念性的理解。分析性鷹架包含實體操作、模型、隱喻、表徵、解釋、或辯證，幫助學生更能理解數學任務及解題方式，分析性鷹架的提供目的是為了協助學生完成教師交付的數學任務(Baxter & Williams, 2010)。為幫助學生能夠理解二進位原理及與十進位間的轉換，個案教師根據其生活經驗，為學生建置學習二進位系統概念的分析性鷹架，如利用風扇開關的概念、自創短簡法與符號表徵等。

研：是不是因為學生在二進位的概念和十進位的轉換之間不容易進入，所以你做了很多介入？

T： 那邊的介入喔…那邊的介入大部

分也是引導啦！還有包括我的一些生活遇到的，譬如說電風扇開關的概念。然後，但是我還是保持著沒有直接去講方法。

研：就是舉一些例子嘛！

T：讓他慢慢去靠近那個觀念。【TI-20141112】

當學生能夠用符號表徵所代表最小的數來組合任一表格內或表格外的數字時，教師介紹了一個他自創類似質因數分解短除法的短減法，即找出該數字由大到小的 2 的冪次方，幫助學生快速的將數字拆解成 2 的冪次方和，幫助學生提升程序的流暢(NRC, 2001)，協助概念理解的進行。

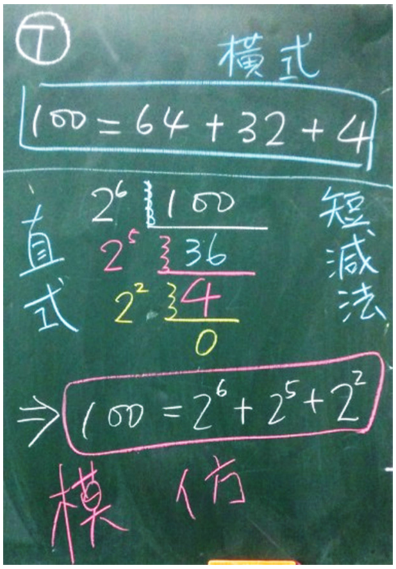


圖 4 短減法

一般化、特殊化和類比往往偕同解決數學問題(Polya, 1954)，一般化是從對向的一個給定集合進而考慮到包含這個給定集合的更大集合，特殊化是從對向的一個給定集合，轉而考慮那包含在這集合內的較小集合，而類比是某種類型的相似性，是一種夠確定的和更概念的相似。總結前述個案教師的臆測探究教學脈絡，我們可以發現教師引導學生在系統化、特殊化間來來回回，最終希望學生能夠找出數字表格背後所隱藏的一般化原理，二進位對於國二的學生而言是比較陌生的進位方式，因此，教師利用生活中電風扇開關的原理作為類比，實證了杜威對於探究教學的想法—經驗是最好的老師(Dewey, 1938)。

T：其實我們生活當中有一些不一定是十進位。在電腦的世界，他怎樣跟機器溝通，他有個機器的語言，用 0 跟 1 跟它溝通。

S03：二進位。

T：我們現在要想辦法把二進位給找出來。二進位的世界怎麼找出來？也許你還是很抽象，但是這幾天我看到了一台電風扇。他有一個定時的功能！我電風扇按下去，每次都按一個小時，一個小時停了如果又比較熱我又再按一個小時。後來我又就給他按兩下、三下、四下，你們猜變什麼？

S03：不知道。

T：第一次 1h 一小時，第二次我想要吹兩個小時的話會顯示什麼？

S：2h。

T：應該沒有問題。第三次會變什麼？我再把他寫小一點，對照第一次一小時會出現，然後這兩個部會出現。第二次會出現什麼？

S：1h、2h…

T：這個 2h，這個不會出現。第三

次，...這裡就困難囉！

S： 前面兩個數相加。

T： 你怎麼那麼厲害？為什麼？

S： 1 加 2，因為 3h...

T： 好你好厲害。按第四次？出現什麼？

S： 前面兩個沒有，後面一個...

T： 四小時對不對？。第五次，你想吹幾個小時啊？

S： 第一個跟第三個。

T： 1 跟...4！這個沒有。第六次？

S： 2、4。

T： 你們都比較厲害！第七次？

S： 1、2、4，全部。

T： 全部亮燈對不對？好，那時候我真的有一種...有一點高興的感覺。這不是二進位嗎？【CO-20140605】

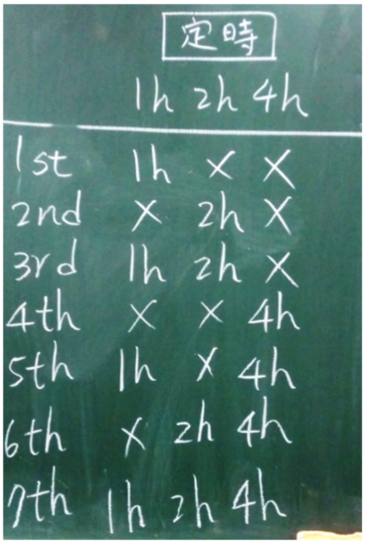


圖 5 以電風扇開關類比二進位

在分析性鷹架介入後，個案教師進行一般化的佈題，目的希望學生能夠在經驗同化(Dewey, 1938)的過程中整合表徵、二進位概念、二進位冪次方和與表格中十進位數字的關係，進而發現十進位與二進位數字的轉換程序，即是本遊戲背後所隱藏的數學原理。如數字 23 出現在表格 1、2、3、5 中，由 2 的冪次方和表示為 $0 \cdot 2^5+1 \cdot 2^4+0 \cdot 2^3+1 \cdot 2^2+1 \cdot 2^1+1 \cdot 2^0$，二進位數字為 010111，0 即表示該數字未出現在位值序所代表的表格中（如首位 0 代表第六個表格），1 則表示有出現。最後，教師透過數字 23 協助學生形成一般化的結論，數字 279 則是在一般化的基礎下再次進行特殊化的佈題鷹架，考驗學生應用及推廣即一般化的能力。

T： 對，這跟科學記號當然有關係。這樣的世界我們叫什麼？

S： 10 進位。

T： 這個叫 10 進位的世界。我希望你們想一想，279 我們已經知道等於什麼？我記得好像是 $2^8+2^4+2^2+2^1+2^0$ 對不對？請問你，他在 10 進位的世界要怎麼寫？很抽象對不對？來 10 進位的世界，他的意思是說這 3 格可以填入 0 到 9，當然這個百位數你如果填入 0 它就變成 79 對不對？就變成兩位數。那二進位的世界，電腦它的機器是 0 跟 1 在溝通，為什麼是 0 跟 1？

S： 最簡單。

T： 二進位的世界，今天十進位世界長這樣，有個東西叫 X。二這叫二進位的世界叫 X，十進位的世界叫 279。等一下我要問你 X 到底是什麼？【CO-20140605】

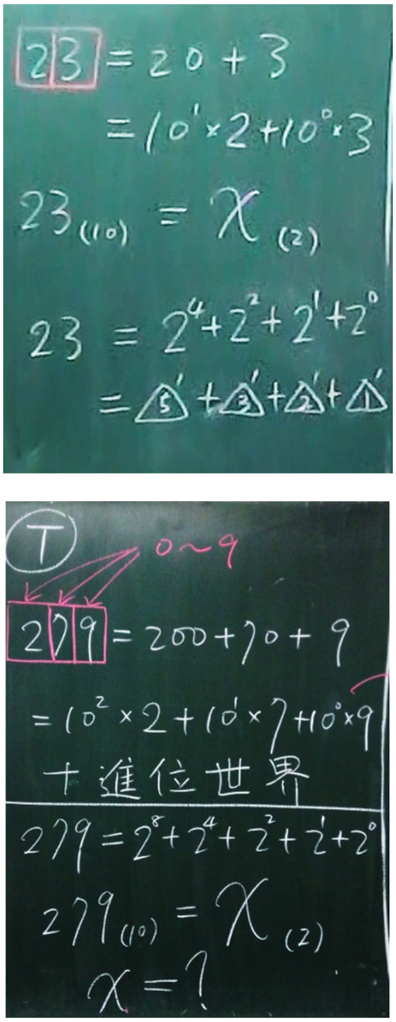


圖 6　二進位一般化佈題鷹架

柒、結論與建議

本研究旨於透過個案教師在二進位樣式探究活動的教學實務觀察，分析個案教師的教學策略運用情形。根據資料分析結果，個案教師數學臆測探究教學主要脈絡是以特殊化、系統化、一般化、類比作為協助引動學生數學臆測思維的鷹架，藉由融入生活中數學素養之分析性鷹架，透過數學概念及程序的引導，幫助學生根據過程紀錄進行樣式推論及一般化結果之論證，並在全班性的論述中藉由詮釋、檢驗及歸納形成一致性的結論。其中系統化過程蘊含學生將重複性程序透過心智壓縮形成可思考概念，並藉由可思考概念進行樣式推論及論證一般化的結果。紀錄的目的，是幫助學生形成樣式推論及論證的依據，如本活動中的系統化表格，即是學生針對數字的樣式規律進行統整分析後的結果。活動進行期間，教師的引導不可或缺，如分析性鷹架的介入，教師除在鷹架中融入生活經驗中的數學素養外，更能幫助學生在同化經驗(Dewey, 1938)的歷程中提升程序的流暢及概念的理解(NRC, 2001)。

總結個案教師在本活動中數學臆測探究教學策略為透過特殊化、系統化、一般化及類比的數學臆測鷹架，引導學生形成猜想、尋找反例以檢驗或反駁猜想，幫助學生在全班性的論述過程中建構數學知識。二進位數字樣式探究活動是學生學習計算機概論的重要基礎，因此建議未來數學及資訊領域的教師可利用此活動協助學生進行學習經驗及知識的統整(Beane, 1996)，幫助學生透過理解的方式學習二進位系統的原理。最後，研究者觀察個案教師的數學臆測探究教學策略是奠基在良好的社會性常規(social norms)與社會性數學常規(socio-mathematical norms) (Ssocio-maGarcio, 2014; Hershkowitz, & Schwarz, 1999; Yackel & Cobb, 1996)基礎之上。如本研究中，個案教師為學生建構一社會性常規系統，利用加分鼓勵學生發現他人論

述中的錯誤，或利用扣分控管課室中學生的學習態度或秩序，並在社會性數學常規性統中鼓勵學生透過記錄，發現他組同學的優秀論述，或在學生發表的過程中進行“論述管理”，管理學生的發言次序、內容及品質。因此建議未來有意嘗試實施改革取向教學教師，能夠在教學班級中先行建立社會性及數學性常規，相信必有助益於教學效能之提升。

參考文獻

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，6，191-218

American Association for the Advancement of Science (1990). *Science for all Americans: Project 2061***.** New York, NY: Oxford University Press.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: what research says about inquiry? *Journal of Science Teacher Education*, *13*(1), 1-12.

Aulls, M. W., & Shore, B. M. (2008). *Inquiry in education. Volume I: The conceptual foundations for research as a curricular imperative.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Help children think mathematically*. NY: Macmillan Publishing Company.

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13,* 7-26.

Beane, J. (1996). On the shoulders of giants! The case for curriculum integration. *Middle School Journal*, *28*,6-11.

Becker, J. R. & Rivera, F. (2007). Factors affecting seventh graders' cognitive perceptions of patterns involving constructive perceptions of patterns involving constructive and deconstructive generalizations. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conferences of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129-136). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Branch, J. L., & Oberg, D. (2004). *Focus on inquiry: A teacher's guide to* implementing *inquiry-based learning.* Edmonton, AB: Alberta Learning.

Cañadas, M. C., Deulofew, J., Figuerias, L, Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72.

Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York: Macmillan.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V., & Empson, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403–434.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester, Jr. (Ed), *Second handbook of research o mathematics teaching and learning: A project of the national council o of teachers of mathematics* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Glaser, B. G. & Straussss, A. L. (1970). Discovery of substantive theory. In W. Filstead (Ed.), *Qualitative methodology* (pp. 288-297). Chicago, IL: Rand McNally.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, *7*(4), 389-397.

Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, *19* (2), 23–40.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D, & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, *24*, 315-331.

Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (1999). The emergent perspective in rich learning environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. Educational

Studies in Mathematics, 39, 149–166.

Jaworski, B. (1994). Constructivism: A philosophy of knowledge and learning. In B. Jaworski (Ed.), *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry* (pp. 14-35). London: The Falmer Press.

Kent, B. (1997). The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought. In N. H. Houser, D. Roberts, & J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 445-459). Indianapolis, IN: Indiana University Press.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review*, *7*(1), 51–61.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lee, L. (2001). An inquiry-based mathematics classroom. *Voyages in Mathematics and Science*, *26*, 3-6.

Mason, J., Burton L., & Stacey K. (2010). *Thinking mathematically* (Second Edition). Harlow, England: Pearson Education Limited.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York: Dover.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning Volume 1*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Popper, K. R. (1972). *Objective knowledge: An evolutionary approach*. New York, NY: Oxford University Press.

Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three world of mathematics.* New York, NY: Cambridge University Press.

Wood, T., & Sellers, P. (1997). Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 163–186.

投稿日期：104 年 05 月 01 日

接受日期：104 年 11 月 26 日

An Investigation of Mathematics Conjecturing-Inquiry Practice: A Case of Binary Number Pattern Exploring Activity

Chih-Yen Liu* and Erh-Tsung Chin

Graduate Institute of Science Education, NCUE

Abstract

The purpose of this study is to investigate a junior high school mathematics teacher's conjecturing-inquiry teaching practice by means of the grounded theory. This is a longitudinal panel study over one academic semester. The qualitative data collected from videotaping of teaching practice, in-depth interviews, after-class discussion, and teacher's reflection. In addition, the coding categories and the story line of research results were constructed accordingly by open coding, axial coding, and the constant comparative method of analysis. The results reveal that the teacher initiates the conjecturing-inquiry teaching with strategies of specialising, systematising, generalising and analogy. Further teacher applies analytic scaffolding to help students to justifying and refuting the validity of results of generalizing and pattering, which combined with teacher's personal mathematical proficiency and the guidance of mathematical concept and procedure. Finally, the consistent conclusion was formulated from whole class discussion, interpretation, examination, and induction.

Keywords: analytic scaffolding, binary number system, mathematical inquiry, conjecturing

* corresponding author