平行四邊形、梯形與三角形內一點到各頂點距離和的最小上界

李政豐 [1*] 陳昭地 [2]

[1] 國立竹南高級中學

[2] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

接續前三篇文章：

1. 三角形三個極小值的探討(李政豐、傅淑婷、陳昭地(2014)).
2. 三角形的三個最大值定理的迴響(李政豐、朱啟台、陳昭地(2014)).
3. 等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值(李政豐、陳昭地(2015)).

其中有兩篇文章「三角形的三個最大值定理的迴響」，以及「等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值」，已經證明最大值的存在性，這個最大值也就是本文所討論的最小上界(least upper bound)。且在這些圖形中 P 點到各頂點距離和有最大值時，P 點的位置都發生在這些圖形中的某些頂點。

其中主要用到的手法有兩種：平行線法與橢圓法。其中有用到橢圓上一點到兩焦點的距離和為定長之性質，但是橢圓的性質，學生要到高二下才會學到，如果我們想要進一步推廣到不等腰梯形，畢竟它與等腰梯形是一線之隔，理論上能沿用等腰梯形的方法加以改進,只是繁度較高。

我們希望能以初等數學的技巧讓國中學生也能了解。於是再度引用綜合幾何的改進技術，得到平行四邊形、梯形與任意三角形的情形，不需要用到橢圓法，也可一併處理，且可用到比前三篇文章更為簡單的初等數學方法,證出它的結論。

這個綜合幾何的技巧，用到與橢圓法相似的性質，但不需要出現橢圓圖形，就可以利用綜合幾何將它證明出來，包含不等腰梯形在內都可以，這是撰寫本文的主要目的。

在本文中，我們先證明了四個引理當作工具，再證明了三個主要定理：

(1) 平行四邊形 ABCD，P 為形內任一點，則 P 到四頂點的距離和的最小上界是:長對角線加半周長的和。(如圖(七))

*為本文通訊作者

(2) 梯形 ABCD，其內部一點 P 到四頂點的距離和的最小上界為：（大底邊+長對角線+長腰）三者的和。（如圖(八)(九)(十)）

(3) ΔABC 中，P 是三角形內部一點，則 P 到三頂點的距離和的最小上界為：兩較長邊之和。(如圖(十一))

這都是國中學生能看懂的方法，也一步一步的逼近了我們想要達成的近程目標：鳶形與任意凸四邊形內部或邊上一點到四頂點距離和的最大值要如何求得？要如何證明？

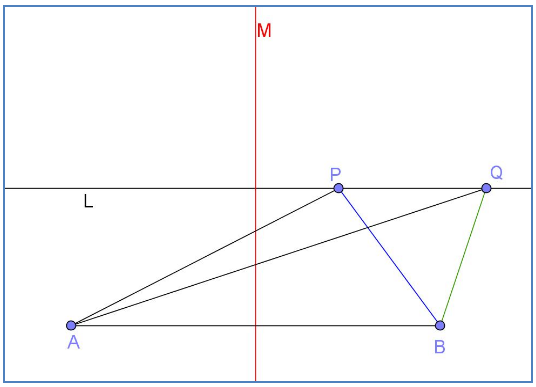
相信這是很基本且老少咸宜的有趣情境,中學生及許多國高中數學老師都曾經想到過,但卻很難下手的問題。我們經過了一段時間的努力，以 Geogebra 為工具,探索了各種不同的四邊形，逐步觀察、實驗、作圖與計算，似乎得到了一點線索,也掌握了初步探究的方向,期待在多一些時間的實驗、證明與整理之後，能有一些具體的成果展示。

我們一直努力的方向就是利用基礎數學的手法，以站在國高中學生觀點的角度，將這個網路上似乎還找不到基本證法的問題，能呈現在學生的面前，這就是本文的主要內容。

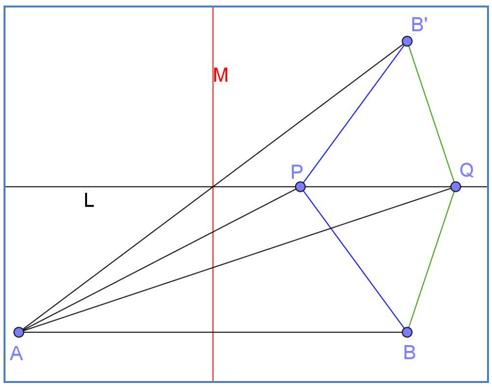
貳、本文

在證明「平行四邊形、梯形與三角形內一點到四頂點距離和的最小上界」之前,我們打算先證明四個引理當作輔助工具.其中第一個引理,是本文排除橢圓,以初等綜合幾何來證明,其餘引理部分已出現在參考文獻(李政豐、朱啟台、陳昭地(2014).)或(李政豐、陳昭地(2015).)中,為方便讀者,特與列出,以方便往後的定理(1)(2)(3)的證明。

引理(1) 如圖(一)所示，直線 M 是線段 $\overline{AB}$ 的中垂線，直線 L 平行於 $\overline{AB}$。如果點 P，Q 為 L 上的兩點，且 P 與 M 的距離小於 Q 與 M 的距離，則 $\overline{QA}+\overline{QB}>\overline{PA}+\overline{PB}$ 。



圖（一）



圖（二）

證明：

1. 如果點 P，Q 為 L 上且在 M 同側的兩點

   如圖(二)所示，作點 B 關於 L 直線的對稱點 B' 連 $\overline{PB'}$，$\overline{QB'}$，$\overline{AB'}$

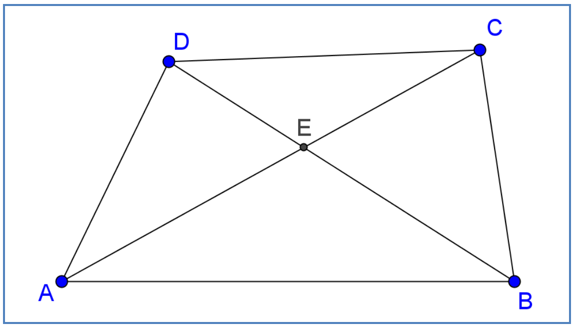
   則 $\overline{QB}=\overline{QB'}$，$\overline{PB}=\overline{PB'}$，$\Delta AQB'$ 中，P 是內部一點，則 $\overline{QA}+\overline{QB'}>\overline{PA}+\overline{PB'}$

   於是 $\overline{QA}+\overline{QB}=\overline{QA}+\overline{QB'}>\overline{PA}+\overline{PB'}=\overline{PA}+\overline{PB}$

2. 如果點 P，Q 為 L 上且在 M 異側的兩點，可以找 P 關於中垂線 M 的對稱點 P'，使得 P'，Q 為 L 上且在 M 同側，則 $\overline{P'A}+\overline{P'B}=\overline{PA}+\overline{PB}$，同理可證。

於是不論 P，Q 是在 M 的同側或異側，只要 P 與 M 的距離小於 Q 與 M 的距離，且 P，Q 同在 $\overline{AB}$ 的平行線 L 上，則 $\overline{QA}+\overline{QB}>\overline{PA}+\overline{PB}$ 恆成立。

引理(2) 任意凸四邊形 ABCD，其對角線長的和大於任意兩對邊長的和，亦即：
$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AD}+\overline{BC}$ 且 $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{CD}$



圖（三）

證明：如圖(三)所示

$$\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{AE}+\overline{EC}+\overline{BE}+\overline{ED}=\left(\overline{AE}+\overline{BE}\right)+\left(\overline{EC}+\overline{ED}\right)>\overline{AB}+\overline{CD}$$

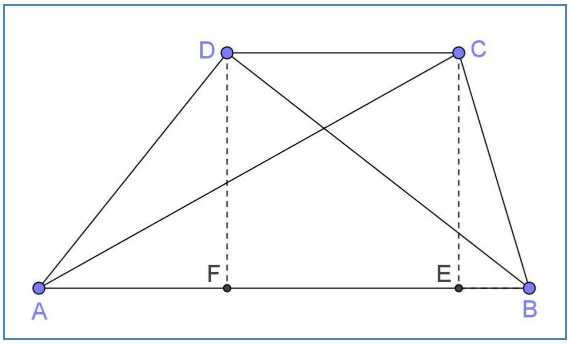
$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AD}+\overline{BC}$ 同理可證

引理(3) 如圖(四)(五)所示，梯形 ABCD 下底 $\overline{AB}>$ 上底 $\overline{CD}$，左腰 $\overline{AD}>$ 右腰 $\overline{BC}$，已知 $\angle A<90°$，則對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$

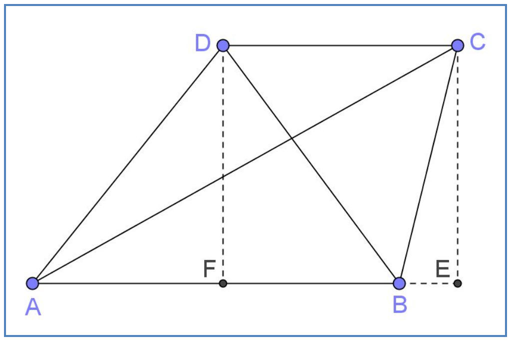
證明：由 D，C 分別向 $\overleftrightarrow{AB}$ 做垂線，垂足為 F，E 則滿足上述條件的梯形有兩種，

(1)　$\angle B<90°$，如圖(四)所示

(2)　$\angle B\geq 90°$，如圖(五)所示



圖（四）



圖（五）

(1) $\angle B < 90°$，如圖(四) $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \left(\overline{AF} + \overline{FE}\right)^2 + \overline{CE}^2$

$\overline{BD}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{DF}^2 = \left(\overline{BE} + \overline{FE}\right)^2 + \overline{DF}^2$

但是 $\overline{CE} = \overline{DF}$

在直角三角形 ΔAFD 與 ΔBEC 中，斜邊 $\overline{AD} > \overline{BC}$，高相同，故 $\overline{AF} > \overline{BE}$

因此 $\overline{AC}^2 > \overline{BD}^2$，亦即 $\overline{AC} > \overline{BD}$

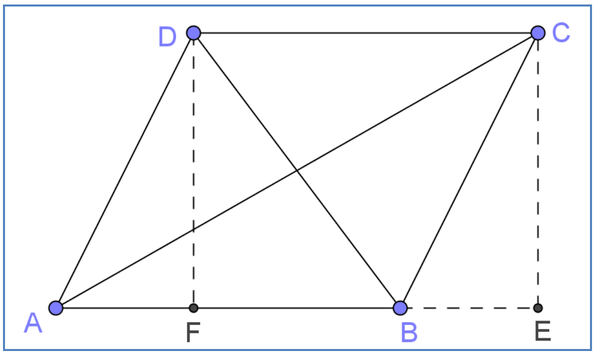
(2) $\angle B \geq 90°$，如圖(五) $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \left(\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{BE}\right)^2 + \overline{CE}^2$

$\overline{BD}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{DF}^2$

但是 $\overline{CE} = \overline{DF}$，且當 $\angle B = 90°$ 時 $\overline{BE} = 0$

因此 $\overline{AC}^2 > \overline{BD}^2$，亦即 $\overline{AC} > \overline{BD}$

引理(4) 如圖(六)所示，平行四邊形 ABCD，$\angle A < 90°$，則對角線 $\overline{AC} > \overline{BD}$



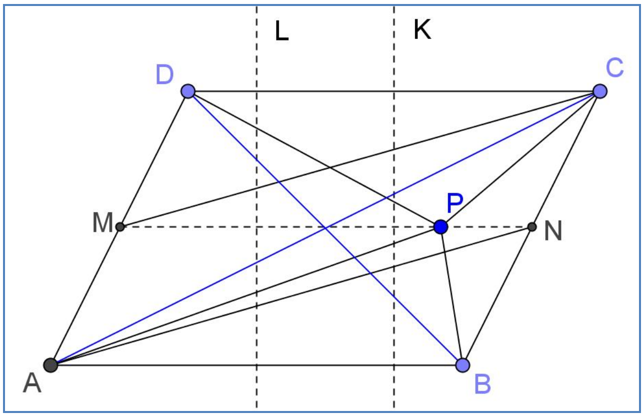
圖（六）

證明： 由 D，C 分別向 $\overleftrightarrow{AB}$ 做垂足為 F，E

$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 > \overline{BF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{BD}^2$，亦即 $\overline{AC} > \overline{BD}$

定理(1) 平行四邊形 ABCD，$\angle A < 90°$，P 為形內任一點，則 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 的最小上界是 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$，亦即為長對角線加半周長的和。（請參看:李政豐、陳昭地(2015).平行四邊形部分的證明）

證明：由引理(4)，$\angle A < 90°$，可知對角線 $\overline{AC} > \overline{BD}$



圖（七）

如圖(七)所示，直線 L 是 $\overline{AB}$ 線段的中垂線，直線 K 是 $\overline{CD}$ 線段的中垂線，過 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{AD}$ 於 M，交 $\overline{BC}$ 於 N。

在線段 $\overline{MN}$ 中 N 是距離 $\overline{AB}$ 線段的中垂線 L 最遠的點，故

　　由　引理(1)　$\overline{PA}+\overline{PB} < \overline{NA}+\overline{NB}$ …………………… ①

在線段 $\overline{MN}$ 中 M 是距離 $\overline{CD}$ 線段的中垂線 K 最遠的點,故

　　由　引理(1)　$\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{MC}+\overline{MD}$ …………………… ②

①+② $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

　　由　引理(2)　$\overline{MC}+\overline{NA} < \overline{AC}+\overline{MN}$

　　且　$\overline{NB}+\overline{MD} = \overline{AD}$

　　又　$\overline{MN} = \overline{AB}$

　故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$（即為長對角線加半周長的和）

且當 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 為最小上界時，P 在 A 或 C 點。

　任意梯形 ABCD，都可經由左右翻轉，上下翻轉，使得它們的下底 $\overline{AB} >$ 上底 $\overline{CD}$，左腰 $\overline{AB} \geq$ 右腰 $\overline{BC}$，且依形狀可以分成三類：

(1) 等腰梯形，如圖(八)

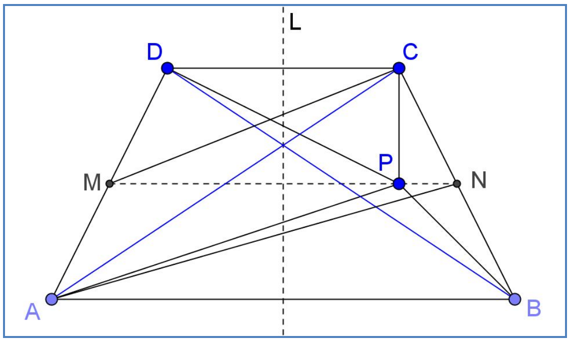
(2) 左腰 $\overline{AD} \geq$ 右腰 $\overline{BC}$，$\angle A < 90°$，$\angle B < 90°$ 的非等腰梯形，如圖(九)

(3) 左腰 $\overline{AD} \geq$ 右腰 $\overline{BC}$，$\angle A < 90°$，$\angle B \geq 90°$ 的非等腰梯形，如圖(十)

定理(2) 梯形 ABCD，下底大於上底 $\overline{AB}>\overline{CD}$，左腰不小於右腰 $\overline{AD}\geq\overline{BC}$，其內部一點 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 的最小上界為 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$，亦即為(大底邊+長對角線+長腰)的和。

證明：我們想將梯形分三類來加以證明

(1) 等腰梯形：(請參看：李政豐、陳昭地(2015).等腰梯形的證明)，如圖(八)。P 為等腰梯形 ABCD 內部一點，L 是 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中垂線，過 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{AD}$ 於 M，交 $\overline{BC}$ 於 N



圖（八）

在線段 $\overline{MN}$ 中 N (或 M)是距離 $\overline{AB}$ 線段的中垂線 L 最遠的點，故

由引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{NA}+\overline{NB}$ …………………… ③

在線段 $\overline{MN}$ 中 M (或 N)是距離 $\overline{CD}$ 線段的中垂線 L 最遠的點，故

由引理(1) $\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{MC}+\overline{MD}$ ………………… ④

③+④ $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{MC}+\overline{MD}$

由引理(2) $\overline{MC}+\overline{NA}<\overline{AC}+\overline{MN}$

且 $\overline{NB}+\overline{MD}=\overline{AD}$

又 $\overline{MN}<\overline{AB}$

故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$ 即為(大底邊+對角線+腰)的和

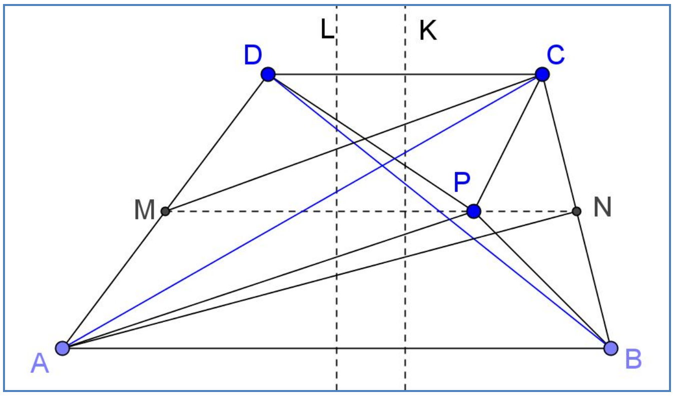
且當 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 為最小上界時，P 在 A 或 B 點。

(2) 左腰 $\overline{AD}>$ 右腰 $\overline{BC}$，$\angle A<90^\circ$，$\angle B<90^\circ$ 的非等腰梯形，如圖(九)

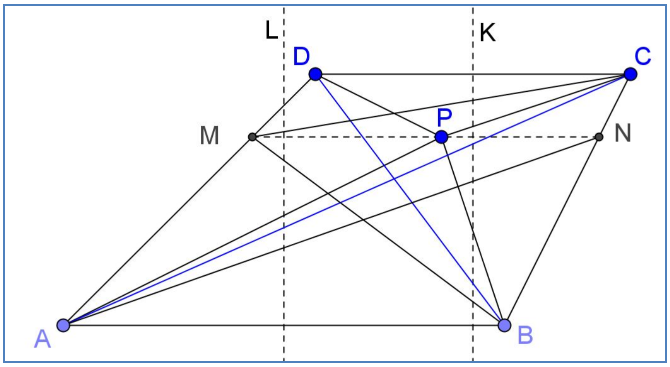
(3) 左腰 $\overline{AD}>$ 右腰 $\overline{BC}$，$\angle A<90^\circ$，$\angle B\geq90^\circ$ 的非等腰梯形，如圖(十)

上面兩種情形，證明過程相同，在此一併解說。

設 P 為梯形 ABCD 內部一點，L 是 $\overline{AB}$ 的中垂線，K 是 $\overline{CD}$ 的中垂線，過 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{AD}$ 於 M，交 $\overline{BC}$ 於 N



圖（九）



圖（十）

梯形 ABNM 中，由平行線截等比例線段定理，及 $\overline{AD} > \overline{BC}$ 知 $\overline{MA} > \overline{NB}$ ，在線段 $\overline{MN}$ 中，N 是距離 $\overline{AB}$ 的中垂線 L 最遠的點，故

由引理(1)　$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{NA} + \overline{NB}$ ………………………… ⑤

梯形 MNCD 中 $\overline{MD} > \overline{NC}$ ，在線段 $\overline{MN}$ 中 M 是距離 $\overline{CD}$ ，的中垂線 K 最遠的點，故

由引理(1)　$\overline{PC} + \overline{PD} < \overline{MC} + \overline{MD}$ ……………………… ⑥

⑤+⑥　$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{NA} + \overline{NB} + \overline{MC} + \overline{MD}$

由引理(2)　$\overline{MC} + \overline{NA} < \overline{AC} + \overline{MN}$

且　$\overline{NB} + \overline{MD} < \overline{MA} + \overline{MD} = \overline{AD}$

又　$\overline{MN} < \overline{AB}$

故 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$ 即為(大底邊+長對角線+長腰)的和。

(由引理(3) 可知 $\overline{AC} > \overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$ 是長對角線 $\overline{AD}$ 是長腰)

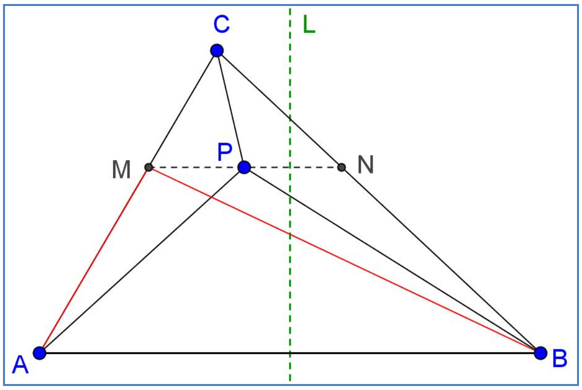
且當 P 到四頂點的距離和 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 為最小上界時，P 在 A 點。

我們一直在想，任意梯形可以做出來，三角形是梯形的退化情形(兩個頂點重合)，照理來說也可以用同樣的手法做出來，於是我們不用前面文章的橢圓法，也可使用中垂線與引理(1)，經由 Geogebra 的實驗探索，將三角形的情況證明出來。

定理(3) ΔABC 中，已知 $\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$ ，P 是三角形內部一點，則

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{AB}+\overline{BC}$ (即兩較長邊之和)

(請參看:李政豐、朱啟台、陳昭地(2014).)



圖（十一）

證明：如圖(十一)所示，作線段 $\overline{AB}$ 的中垂線 L

並過 P 作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{AC}$ 於 M，交 $\overline{BC}$ 於 N

已知 $\overline{BC} \geq \overline{AC}$ ，在線段 $\overline{MN}$ 上的所有點中，M 點是距離 $\overline{AB}$ 中垂線 L 最遠的點

由 引理(1) $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{MA}+\overline{MB}$ ………………… ⑦

ΔCMN 中，P 是 $\overline{MN}$ 上一點，由平行線截等比率線段定理 $\overline{MC} \leq \overline{NC}$ ，

故 $\overline{PC}<\overline{NC}$ ……………………………………… ⑧

由 ⑦+⑧ $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{NC}$

由平行線截等比率線段定理 $\overline{MA} \leq \overline{NB}$

ΔABC 中， $\overline{AB} \geq \overline{BC} \geq \overline{AC}$ ，M 是 $\overline{AC}$ 上一點，則 $\overline{MB}<\overline{AB}$

故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{NC}<\overline{NB}+\overline{AB}+\overline{NC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ 得證。

且當 P 到三頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 為最小上界時,P 在 B 點

參、結語

一個問題常有許多證明的方法，通常我們提出一個證法之後，會不斷思考它的證明過程，然後對先前的證法可能不甚滿意，於是改進的方法就誕生了，這是一個良性的互動，也是數學文明進步的原動力。過去的數學家(如：費瑪)沒有資訊科技的協助，卻能

猜測出問題的結果(如：最大內角不超過 120 度的三角形的內部或邊上一點到三頂點距離和的最小值)，這是很了不起的一件事，事隔四百多年之後的我們，有了很方便的資訊科技 Gsp,Geogebra.可以研究的幾何問題領域更為寬廣，證不出來的數學問題可以藉由動態模擬，可以藉助於計算工具，我們縱然沒有偉大數學家先見之明的智慧，卻能應用資訊科技把問題的結果估算出近似值。這是我們這一代人的幸運與福氣。

在與陳昭地教授一起研究的過程中，最佩服的還是他對幾何問題的猜測與遠見，教授用紙筆驗算，我用電腦繪圖，經常他細緻的手法所得到的結論是正確的。

參考文獻

李政豐、傅淑婷、陳昭地(2014).三角形三個極小值的探討.科學教育月刊 366 期(pp,11-23).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心。

李政豐、朱啟台、陳昭地(2014).三角形的三個最大值定理的迴響.科學教育月刊 367 期(pp,24-34).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心。

李政豐、陳昭地(2015).等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值.科學教育月刊(被接受並安排刊登中)。臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心。