等腰梯形與平行四邊形的邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值

李政豐[1*] 陳昭地[2]

[1]國立竹南高級中學

[2]國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

三角形三邊上或形內任一點，到其三頂點距離和的極值，是很熱門且眾所周知，具高難度或技巧的初等幾何問題。(李政豐、朱啟台、陳昭地(2014))，這個極值的存在性，在稍微高等的分析學中是保證有極值。但存在歸存在，真正求出來還是有些困難，尤其想利用中學生數學能力範圍內的方法找出來應屬難題。

同樣的，對凸四邊形邊上或形內一點到四頂點距離和的最大值或最小值也是被保證存在的，惟其最小值相對容易求得，國中學生在二、三分鐘利用三角形兩邊之和大於第三邊，即可知道其最小值是兩條對角線長之和，至於最大值問題一般人可能只敢猜測，至今尚未看到真正的用初等數學加以詮釋，因其難度應比三角形的情況更難。

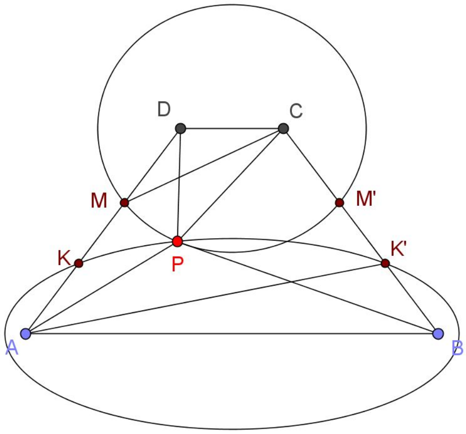
為此近半年來，我們花了很大的功夫，從前一篇文章，引進橢圓的技術改進，得到兩種特殊四邊形：等腰梯形、平行四邊形(含矩形、菱形)的情況，是可以利用初等數學的巧思得到簡潔的答案，這就是本文的主要目的。

貳、幾個基本性質

以上所指的四邊形：矩形、等腰梯形、平行四邊形。很自然地以矩形為最簡單，等腰梯形次之，而平行四邊形難度最高，不過若能有效地解決矩形的困難，或許對平行四邊形就減輕很大的負擔，後來發現依我們前一篇文章(2014)之情境略為改進，就可以解決等腰梯形的情況，而平行四邊形的情況確實難度頗高，利用前一篇文章(2014)，再利用橢圓介入的技巧，底下我們先引進主要的引理：

引理 1.設 ABCD 為等腰梯形如圖(1)，兩底 $\overline{AB}>\overline{CD}$，P 為其內的任一點，則在 $\overline{AD}$ 上存在 K、M 且 A−K−M−D，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{KA}+\overline{KB}$，$\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{MC}+\overline{MD}$，且在 $\overline{BC}$ 上存在 K′、M′且 B−K′−M′−C 使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{K'A}+\overline{K'B}$， $\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{M'C}+\overline{M'D}$

*為本文通訊作者



圖(1)

解說：若 P 在等腰梯形的內部

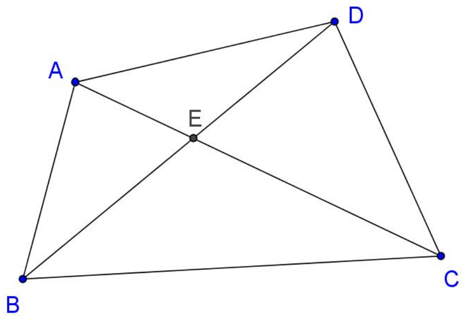
則以 A，B 為焦點且過 P 的橢圓交 $\overline{AD}$ 於 K 交，$\overline{BC}$ 於 K′，此時 P 比 K，K′略高

且 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{KA}+\overline{KB}=\overline{K'A}+\overline{K'B}$

則以 C，D 為焦點且過 P 的橢圓交 $\overline{AD}$ 於 M，交 $\overline{BC}$ 於 M′，此時 P 比 M，M′略低

且 $\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{M'C}+\overline{M'D}$

引理 2 設 ABCD 為任意四邊形如圖(2)，則對角線長度的和會大於任意一組對邊長度的和。亦即 $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{BC}+\overline{AD}$ 且 $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{CD}$

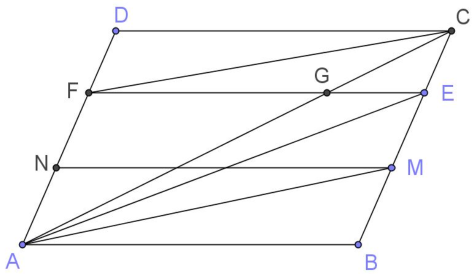


圖(2)

解說：因為 $\overline{EA}+\overline{ED}>\overline{AD}$ 且 $\overline{EB}+\overline{EC}>\overline{BC}$（由三角不等式），故 $\overline{EA}+\overline{ED}+\overline{EB}+\overline{EC}>\overline{AD}+\overline{BC}$

亦即 $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{BC}+\overline{AD}$， $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AB}+\overline{CD}$ 同理可證

引理 3.設 ABCD 為平行四邊形 $\overline{AC}>\overline{BD}$（此時 $\angle B=\angle D>180°$），將它分割成三個平行四邊形 ABMN，NMEF，FECD，連接四條對角線 $\overline{FC},\overline{AC},\overline{AE},\overline{AM}$ ，如圖(3)。則有不等關係 $\overline{AC}+\overline{AB}>\overline{CF}+\overline{AM}$ 。



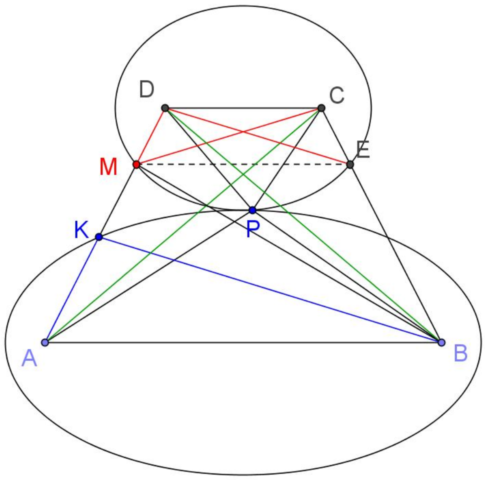
圖(3)

解說：由 $\overline{AE} > \overline{AM}, \overline{AB} = \overline{EF}$ ，則有 $\overline{AC} + \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{EF} > \overline{CF} + \overline{AE} > \overline{CF} + \overline{AM}$ （由引理 2）。

我們現在開始，就可利用引理來幫助解說下節的主要定理 1。

參、主要結果

定理(1) 如圖(4)，設等腰梯形 ABCD 之兩底 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 點，P 為形內任一點，則連接 P 與四頂點的距離和 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$ 。



圖(4)

解說：由引理 1.知道當 P 是形內任一點，由橢圓的性質在 $\overline{AD}$ 上，存在兩點 K,M

使得 $\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{KA} + \overline{KB}$, $\overline{PC} + \overline{PD} = \overline{MC} + \overline{MD}$ ，且由下而上是 A-K-M-D

過 M 作平行底邊 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{BC}$ 於 E，則 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = \overline{KA} + \overline{KB} + \overline{MC} + \overline{MD}$

則 $\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} + (\overline{KA} + \overline{KM} + \overline{MD})$

$= \overline{BD} + \overline{AB} + (\overline{KA} + \overline{KM} + \overline{MD})$ (因為 $\overline{AC} = \overline{BD}$)

$> \overline{BD} + \overline{ME} + (\overline{KA} + \overline{KM} + \overline{MD})$ (因為 $\overline{AB} > \overline{ME}$)

$> \overline{DE} + \overline{MB} + (\overline{KA} + \overline{KM} + \overline{MD})$ (由引理 2)

$= \overline{MC} + \overline{MB} + (\overline{KA} + \overline{KM} + \overline{MD})$ (因為 $\overline{DE} = \overline{MC}$)

$= \overline{MC} + (\overline{MB} + \overline{KM}) + (\overline{KA} + \overline{MD}) > \overline{MC} + \overline{KB} + (\overline{KA} + \overline{MD})$ (三角不等式)

$= \overline{MC} + \overline{MD} + (\overline{KA} + \overline{KB})$

$= \overline{PC} + \overline{PD} + \overline{PA} + \overline{PB}$

亦即 $\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD} > \overline{PC} + \overline{PD} + \overline{PA} + \overline{PB}$

在圖(4)中，若 P 的位置在四個頂點，由 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 易知

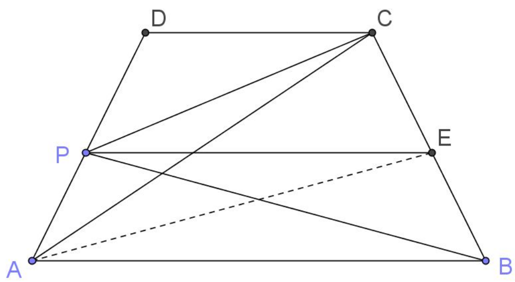
$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} \leq \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$

且等號成立之充要條件為 P 在 A 或 B

若 P 在等腰梯形邊上但非頂點時 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$ 仍然成立，

如下引；

引理 4.設等腰梯形 ABCD 之兩底 $\overline{AB} > \overline{CD}$，點 P 為兩腰上任一點,但非頂點，則連接 P 與四頂點的距離和 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$，仍然成立



圖(5)

解說：如圖(5) 設 P 在 $\overline{AD}$ 上，過 P 作 $\overline{PE}$ 平行 $\overline{AB}$，交 $\overline{BC}$ 於 E

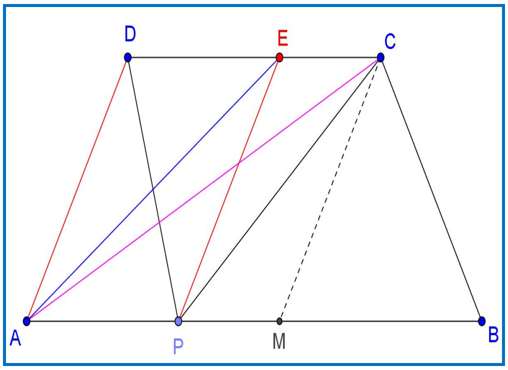
則 $\overline{PC} + \overline{PB} = \overline{PC} + \overline{AE} < \overline{AC} + \overline{PE} < \overline{AC} + \overline{AB}$（由引理 2）

故 $\overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$

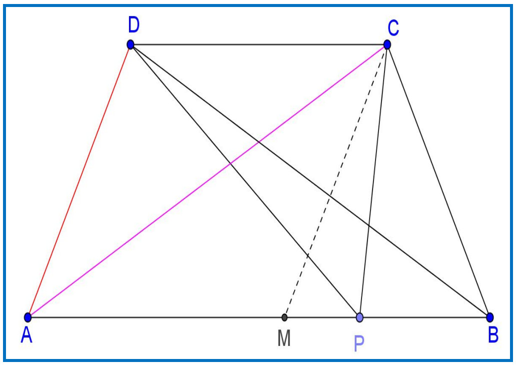
設 P 在 $\overline{BC}$ 上，$\overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$，同理可證

引理 5.設等腰梯形 ABCD 之兩底 $\overline{AB} > \overline{CD}$，點 P 在下底 $\overline{AB}$ 或上底 $\overline{CD}$，但非頂點，則連接 P 與四頂點的距離和 $\overline{PC} + \overline{PB} + \overline{PA} + \overline{PD} < \overline{AC} + \overline{AB} + \overline{AD}$ 仍成立

證明方法 1：當點 P 在下底 $\overline{AB}$ 上（感謝審稿教授提供簡潔的邊角關係方法來證明）



圖(6)



圖(7)

(1) 如圖(6)，作 $\overline{CM}$ 平行於 $\overline{AD}$，若 $P \in \overline{AM}$，由 P 作 $\overline{PE}$ 平行於 $\overline{AD}$

則 $\overline{AD}+\overline{AC} = \overline{PE}+\overline{AC} > \overline{AE}+\overline{PC}$（由引理 2）

由 APED 是平行四邊形，$\overline{AE}$ 是長對角線 $\left(\angle A < 90^\circ\right)$，可得 $\overline{PD} < \overline{AE}$，

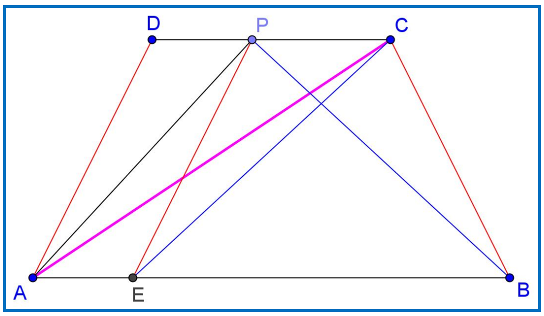
故 $\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AE}+\overline{PC} < \overline{PE}+\overline{AC} = \overline{AD}+\overline{AC}$

亦即 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

(2) 如圖(7)，當 $P \in \overline{BM}$，ΔCMB 中，$\overline{PC}<\max\{\overline{CM},\overline{CB}\}$，但是 $\overline{AD}=\overline{CB}=\overline{CM}$

即 $\overline{PC} < \overline{AD}$，$\overline{PD} < \overline{BD} = \overline{AC}$，

故 $\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AD}+\overline{AC}$，亦即 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$



圖(8)

當點 P 在上底 $\overline{CD}$ 上，但非頂點如圖(8)，過 P 做 $\overline{AD}$ 的平行線 $\overline{PE}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E，

則 $\overline{PE}=\overline{AD}$，PEBC 仍然是等腰梯形，故對角線等長，$\overline{CE}=\overline{PB}$，

則 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{CE} < \overline{PE}+\overline{AC} = \overline{AD}+\overline{AC}$（由引理 2）

故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AD}+\overline{AC}+\overline{CD} < \overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$ 成立

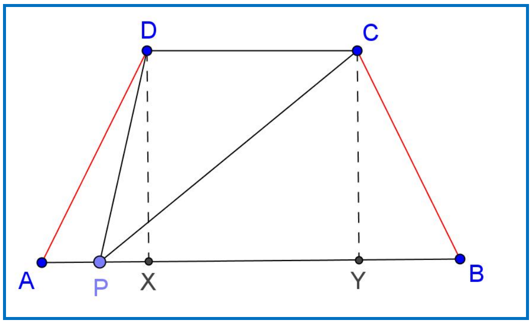
我們也可由 P 在上底 $\overline{CD}$ 上的結果，來證明:當點 P 在下底 $\overline{AB}$ 上的情形

如圖(9-1)，由 D 向 $\overline{AB}$ 做垂線垂足為 X，由 C 向 $\overline{AB}$ 做垂線垂足為 Y，當 P 在 $\overline{AX}$ 上，$\overline{PD} < \overline{AD}$，$\overline{PC} < \overline{AC}$，故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} < \overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$. P 在 $\overline{BY}$ 上同理可證

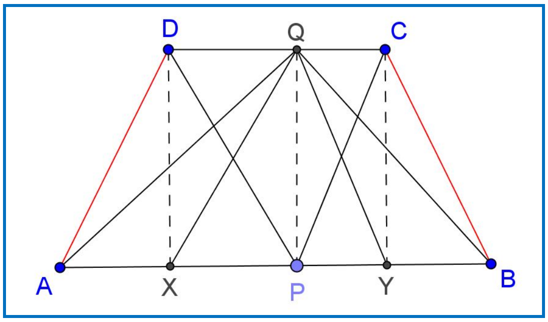
當 P 在 $\overline{XY}$ 如圖(9−2)，由 P 向 $\overline{CD}$ 做垂線垂足為 Q，則 $\overline{PD}+\overline{PC}=\overline{QX}+\overline{QY}$

$\overline{QX}+\overline{QY}<\overline{QA}+\overline{QB}<\overline{AD}+\overline{AC}$（用到圖(8)，P 在上底 $\overline{CD}$ 上的結果）

故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$

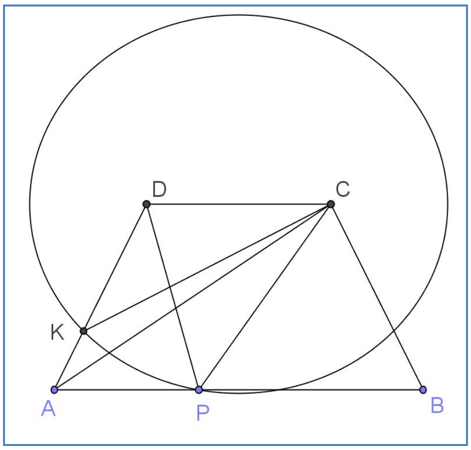


圖(9−1)

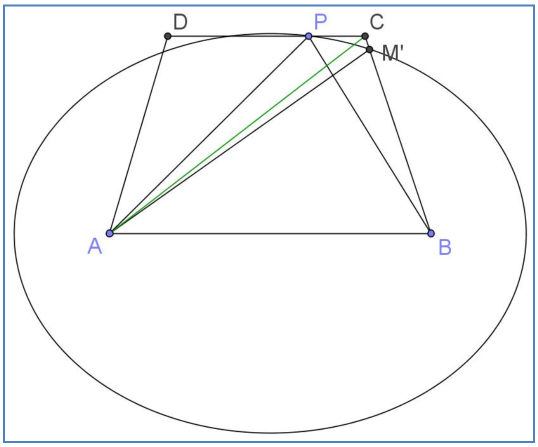


圖(9−2)

證明方法 2：(這是以橢圓方法一致性的證明)，如圖(10−1) 設 P 在 $\overline{AB}$ 上，且在 $\overline{AB}$ 中垂線上或左方，兩焦點連線 $\overleftrightarrow{CD}$ 下方的 CDP 橢圓(C，D 為焦點且過 P 的橢圓)是凹口向上的圖形，P 在橢圓上，A 在 P 的左邊，則 A 在橢圓外，D 是橢圓的焦點在橢圓內，故 $\overline{AD}$ 與 CDP 橢圓會交在一點 K，$\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{KC}+\overline{KD}<\overline{AK}+\overline{AC}+\overline{KD}=\overline{AC}+\overline{AD}$（三角不等式)，亦即 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}<\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$，若 $\overline{AB}$ 上的點 P，在 $\overline{AB}$ 中垂線上或右方，會用到 $\overline{BC}$ 與 CDP 橢圓的交點 K'，同理可證。



圖(10−1)



圖(10−2)

如圖(10−2)，當 P 在 $\overline{CD}$ 上，且在 $\overline{CD}$ 中垂線右方，焦點連線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上方的 ABP 橢圓(A，B 為焦點且過 P 的橢圓)是凹口向下的圖形，P 在 ABP 橢圓上，C 在 P 點的右方，故 C 在 ABP 橢圓之外，B 在橢圓內，故 CB 與 ABP 橢圓一定會交在一點 M'

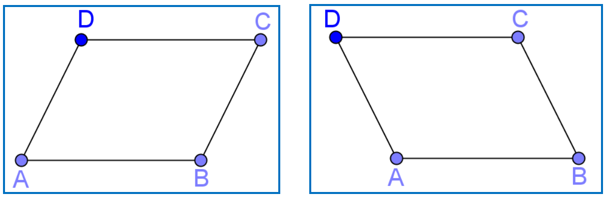
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{M'B}+\overline{M'B}<\overline{AC}+\overline{CB}$，故 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{CD}<\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AB}$

若 $\overline{CD}$ 上的點 P，在 $\overline{CD}$ 中垂線左方，會用到 $\overline{AD}$ 與 ABP 橢圓的交點 M,同理可證。

綜合以上我們得到定理(2)

定理(2) 設等腰梯形 ABCD 之兩底 $\overline{AB} > \overline{CD}$，點 P 為四邊或形內任一點，則連接 P 與四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 的最大值為 $\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$，且有最大值時 P 在 A 點或 B 點。

接著我們來討論平行四邊形：平行四邊形的圖形有兩類：∠A 是銳角，或∠A 是鈍角，如下圖：



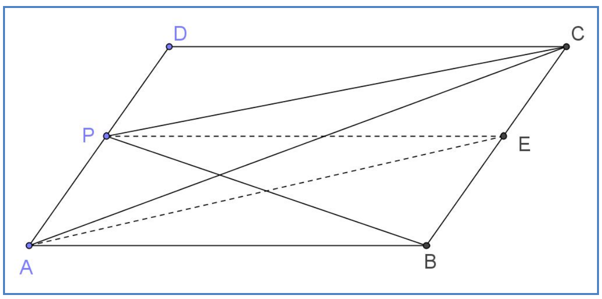
不失一般性，我們只討論∠A 是銳角的情形，因此貫穿本文的平行四邊形都是對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$ 的情形。

底下在討論平行四邊形之前，我們先介紹引理 6.引理 7。

引理 6. 設平行四邊形 ABCD 之兩對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$，點 P 在 $\overline{AD}$，或 P 在 $\overline{AB}$ 上，但非頂點，則連接 P 與四頂點的距離和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

解說： 如圖(11)，設 P 在 $\overline{AD}$ 上則 $\overline{PC}+\overline{PB}<\overline{PC}+\overline{AE}<\overline{AC}+\overline{PE}=\overline{AC}+\overline{AB}$（由 $\overline{AC}>\overline{BD}$ 可得 $\overline{PB}<\overline{AE}$，由引理 2. $\overline{PC}+\overline{AE}<\overline{AC}+\overline{PE}$），故 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

設在 P $\overline{AB}$ 上， $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}<\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$ 同理可證

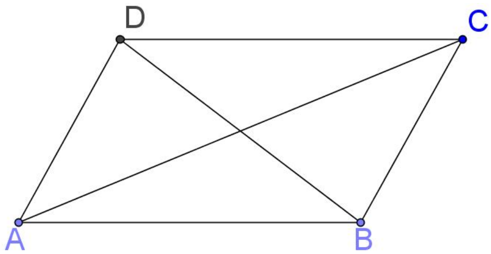


圖(11)

引理 7. 設平行四邊形 ABCD 之兩對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$，如圖(12)點 P 是平行四邊形的頂點

(1) 當 P=A 或 C 時 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

(2) 當 P=B 或 D 時 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BD}<\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$



圖(12)

解說：(1) 當 P=A 時， $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

同理當 P=C 時， $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{AD}$

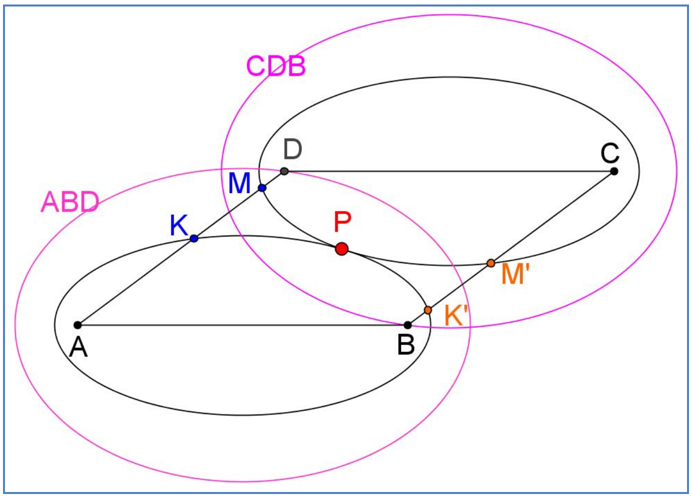
(2) 當 P=B 時， $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BD}<\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AC}$

同理當 P=D 時不等式也成立

符號說明(如圖 13−1)：CDB 橢圓：以 C，D 為兩焦點且通過 B 點的橢圓。

ABD 橢圓：以 A，B 為兩焦點且通過 D 點的橢圓。

平行四邊形 ABCD：當 $\overline{AC}>\overline{BD}$ 不成立，則讓圖形左右翻轉，以滿足上面情形。



圖(13−1)

我們按照 P 點在平行四邊形 ABCD 內部的位置，分成三類：

第一類：如圖(13−1)，P 點在平行四邊形 ABCD，CDB 橢圓，ABD 橢圓的交集內部，不論 P 點移動到這三者交集內的任一點，ABP 橢圓、CDP 橢圓都會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 K, M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 交在 K′, M′ 點。

解說：(1) 以 C，D 為焦點的橢圓 CDB 與 CDA 相比較，CDB 的長軸(定常和)較短

(2) 以 A，B 為焦點的橢圓 ABC 與 ABD 相比較，ABD 的長軸(定常和)較短

(3) 當 P 在平行四邊形 ABCD，橢圓 CDB，橢圓 ABD，三者的內部

(4) 橢圓 CDP 包含在橢圓 CDB 裡面，橢圓 ABP 包含在橢圓 ABD 裡面

(5) 由(2),C 在橢圓 ABD 外面，由(4),C 在橢圓 ABP 外面，而 B 在橢圓 ABP 裡面，故 $\overline{BC}$ 會與橢圓 ABP 交在 K′，由(4),橢圓 ABP 包含在橢圓 ABD 裡面，$\overline{AD}$ 與橢圓 ABP 會交在一點 K

(6) 由(1)，A 在橢圓 CDB 外面，由(4)，A 在橢圓 CDP 外面而 D 在橢圓 CDP 裡面，故 $\overline{AD}$ 會與橢圓 CDP 交在 M，由(4) 橢圓 CDP 包含在橢圓 CDB 裡面，$\overline{BC}$ 與橢圓 CDP 會交在一點 M′

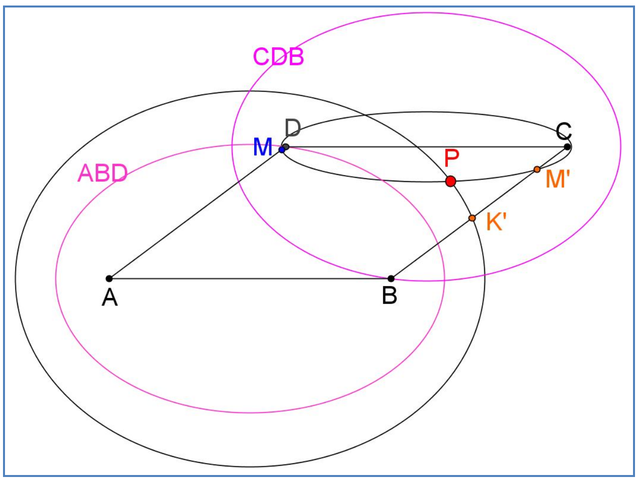
(7) 因此 ABP 橢圓、CDP 橢圓都會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 K，M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 交在 K′, M′ 點。

第二類： 但是當 P 點移動到平行四邊形 ABCD 內且在 ABD 橢圓之外時，如圖(13−2)，ABP 橢圓、CDP 橢圓只會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 交在 K′, M′ 點。

解說： (1) P 在 ABD 橢圓之外,ABD 橢圓包在 ABP 橢圓中，因此 $\overline{AD}$ 與 ABP 橢圓沒交點，但 C 在 ABP 橢圓外面，B 在 ABP 橢圓裡面，故 ABP 橢圓與 $\overline{BC}$ 會交在一點 K′

(2) CDP 橢圓包在 CDB 橢圓之內，A 在 CDB 橢圓之外，則必然在 CDP 橢圓之外，故 CDP 橢圓會與 $\overline{BC}$ 交在 M′，與 $\overline{AD}$ 交在 M

(3) 故 ABP 橢圓、CDP 橢圓只會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 交在 K′, M′ 點。



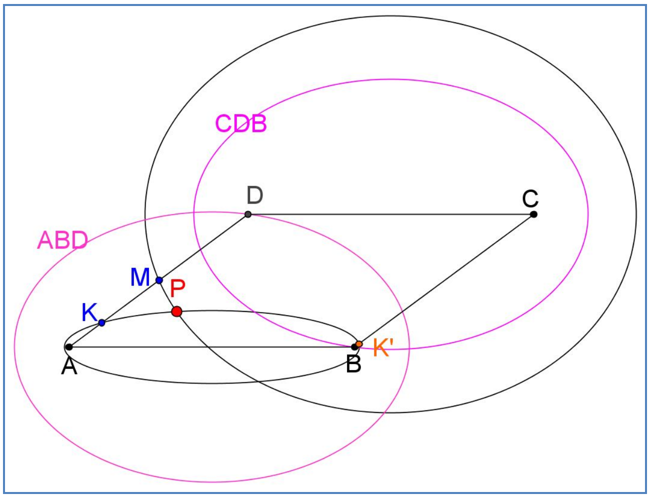
圖(13−2)

第三類：而當 P 點移動到平行四邊形 ABCD 內且在 CDB 橢圓之外時，如圖(13−3)，ABP 橢圓、CDP 橢圓會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 K，M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 只交在 K′點。

解說：(1) P 在 CDB 橢圓之外，CDB 橢圓包在 CDP 橢圓中，因此 $\overline{BC}$ 與 CDP 橢圓沒交點，但 A 在 CDP 橢圓外面，D 在 CDP 橢圓裡面，故 CDP 橢圓與 $\overline{AD}$ 會交在一點 M。

(2) ABP 橢圓包在 ABD 橢圓之內，C 在 ABD 橢圓之外，則必然在 ABP 橢圓之外，故 ABP 橢圓會與 $\overline{BC}$ 交在 K′，與 $\overline{AD}$ 交在 K。

(3) 故 ABP 橢圓、CDP 橢圓會與左邊 $\overline{AD}$ 交在 K, M 點，與右邊 $\overline{BC}$ 只交在 K′點。



圖(13-3)

觀察以上三個圖，圖(13−1)、圖(13−2)、圖(13−3) ，我們知道，當 P 點在平行四邊形 ABCD 內或邊上移動，ABP 橢圓、CDP 橢圓一定會與左邊 $\overline{AD}$ 在兩點 K、M，或與右邊 $\overline{BC}$ 交在兩點 K′, M′，兩者至少有一成立。於是在此前提下，遂有定理(3)的產生。

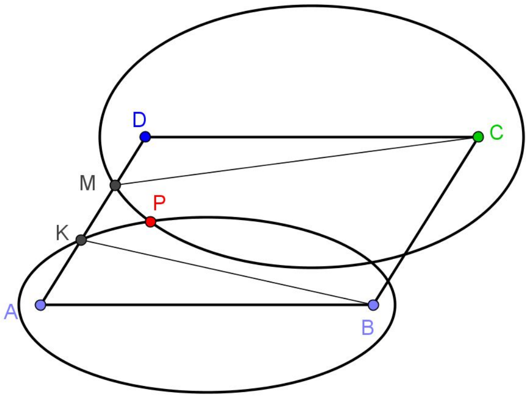
定理(3) 設平行四邊形 ABCD 之兩對角線 $\overline{AC} > \overline{BD}$，點 P 是平行四邊形形內或四邊上一點，則有下列不等式成立 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD} \le \overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AC}$

解說：<u>第一種情形：</u>ABP 橢圓、CDP 橢圓與左邊 $\overline{AD}$ 交在兩點 K, M

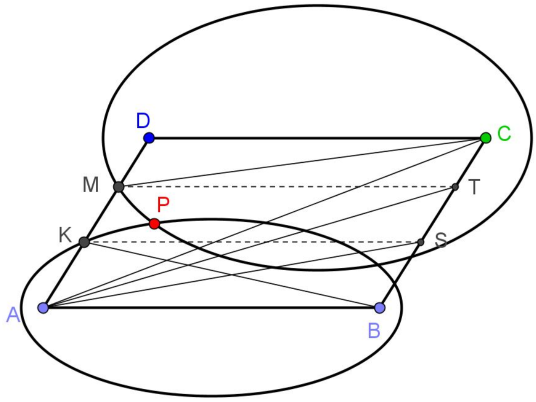
如圖(14−1)，經由 Grogebra 的動態模擬，知道 ABP 橢圓會與 $\overline{AD}$ 交在 K 點，CDP 橢圓會與 $\overline{AD}$ 交在 M 點。此時 $\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{MC}+\overline{MD}$, $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{KA}+\overline{KB}$

如圖(14−2)，過 K,M 分別作 $\overline{AB}$ 的平行線分別交 $\overline{BC}$ 於 S,T。連 $\overline{AC},\overline{AT},\overline{AS}$

則有 $\overline{AT} > \overline{AS} > \overline{KB}$ ……(甲)



圖(14−1)



圖(14−2)

$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}=(\overline{MT}+\overline{AC})+\overline{AD}>(\overline{MC}+\overline{AT})+\overline{AD}$ (引理 2)

$=(\overline{MC}+\overline{AT})+(\overline{MD}+\overline{KA}+\overline{MK})$

$>(\overline{MC}+\overline{KB})+(\overline{MD}+\overline{KA}+\overline{MK})$ 由(甲)

$=(\overline{MC}+\overline{MD})+(\overline{KA}+\overline{KB})+\overline{MK}$

$=\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{MK}$

$>\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}$

也可直接利用引理 3.如圖(14−2)

$(\overline{AB}+\overline{AC})+\overline{AD}=(\overline{MC}+\overline{AS})+\overline{AD}>(\overline{MC}+\overline{KB})+\overline{AD}$

$=(\overline{MC}+\overline{KB})+(\overline{MD}+\overline{KA}+\overline{MK})$

$=\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{MK}$

$>\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}$

<u>第二種情形：</u>ABP 橢圓、CDP 橢圓與右邊 $\overline{BC}$ 交在兩點 K′, M′

如圖(15−1)，經由 Grogebra 的動態模擬，知道 ABP 橢圓會與 $\overline{BC}$ 交在 K′點，CDP 橢圓會與 $\overline{BC}$ 交在 M′ 點。此時 $\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{M'C}+\overline{M'D}$ ， $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{K'A}+\overline{K'B}$

如圖(15−2)，過 K′, M′ 分別做 $\overline{AB}$ 的平行線分別交 $\overline{AD}$ 於 X,Y。連 $\overline{AC},\overline{AM'},\overline{YC}$ 。則有 $\overline{YC}>\overline{M'D}$ 且 $\overline{M'A}>\overline{K'A}$ ……(乙)

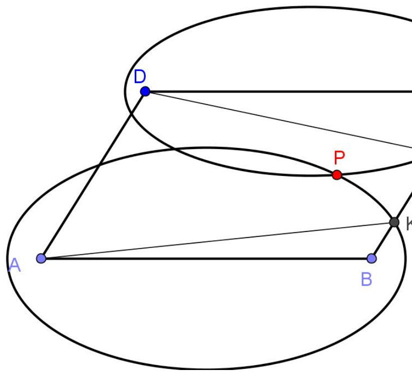
$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}=(\overline{YM'}+\overline{AC})+\overline{AD}>(\overline{YC}+\overline{M'A})+\overline{BC}$ （引理 2）

$>(\overline{M'D}+\overline{K'A})+(\overline{K'B}+\overline{K'M'}+\overline{M'C})$ 由(乙)

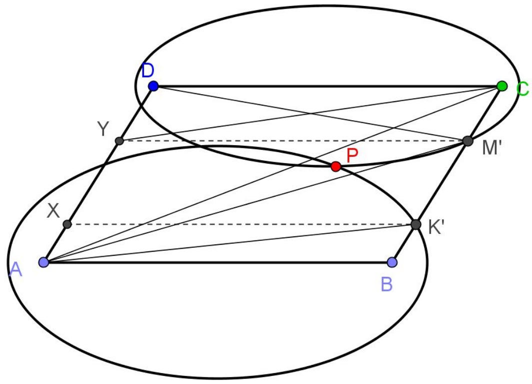
$=(\overline{M'D}+\overline{M'C})+(\overline{K'A}+\overline{K'B})+\overline{K'M'}$

$>(\overline{M'D}+\overline{M'C})+(\overline{K'A}+\overline{K'B})$

$=\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}$



圖(15−1)



圖(15−2)

或直接由引理 3

$$
\begin{aligned}
(\overline{AB}+\overline{AC})+\overline{AD} &= (\overline{YC}+\overline{K'A})+\overline{AD} > (\overline{YC}+\overline{K'A})+\overline{BC} \\
&> (\overline{M'D}+\overline{K'A})+(\overline{K'B}+\overline{K'M'}+\overline{M'C}) \\
&= (\overline{M'D}+\overline{M'C})+(\overline{K'A}+\overline{K'B}+\overline{K'M'}) \\
&> (\overline{M'D}+\overline{M'C})+(\overline{K'A}+\overline{K'B}) \\
&= \overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PA}+\overline{PB}
\end{aligned}
$$

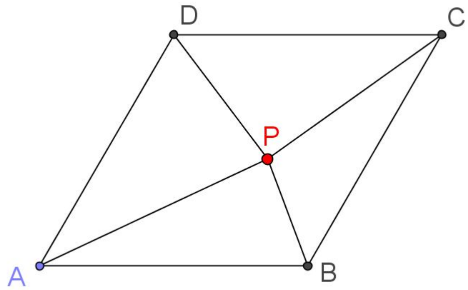
綜合兩種情形，經由 Geogebra 軟體繪圖檢驗(見附錄)，平行四邊形 ABCD 之兩對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$，點 P 是形內或邊上一點，則不論是第一種情形或第二種情形都有下列不等式成立 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}\le\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AC}$

綜合引理 6.引理 7.及定理(3)，我們得到下面的定理(4)

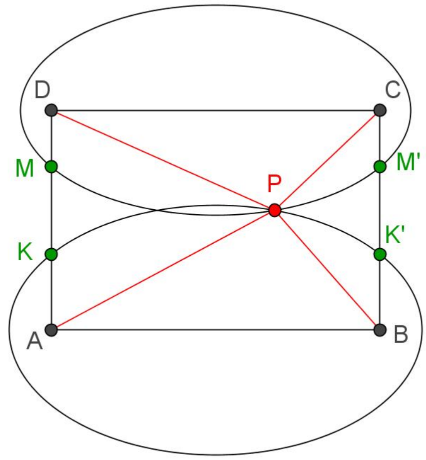
定理(4) 圖(15−2)，設平行四邊形 ABCD 之兩對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$，點 P 是邊上或形內一點，則 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}$ 的最大值是半周長加上較長的對角線長，且 P 在 A 點或 C 點時產生最大值。

此外菱形是對角線互相垂直平分(或四邊相等)的平行四邊形，而矩形是對角線等長的平行四邊形，為定理(4)的直接推論。

定理(5) 如圖(16)，菱形 ABCD，對角線 $\overline{AC}>\overline{BD}$，且 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$，點 P 是邊上或形內一點，則 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}$ 的最大值是半周長加上較長的對角線長，且 P 在 A 點或 C 點時產生最大值。



圖(16)



圖(17)

定理(6) 如圖(17)，矩形 ABCD，對角線 $\overline{AC}=\overline{BD}$，點 P 是邊上或形內一點則 $\overline{PC}+\overline{PB}+\overline{PA}+\overline{PD}$ 的最大值是半周長加上一條對角線長，且 P 在四個頂點時產生最大值。

肆、結語

上述的解題技巧是融合綜合幾何與解析幾何中橢圓的概念，也是本文延伸前文最特別的解題技巧，引理(5)的證明方法 1,就是用綜合幾何的方法，證明方法 2 是用橢圓概念的證法，希望由橢圓的引入，能大量增廣初等數學的解題方法。

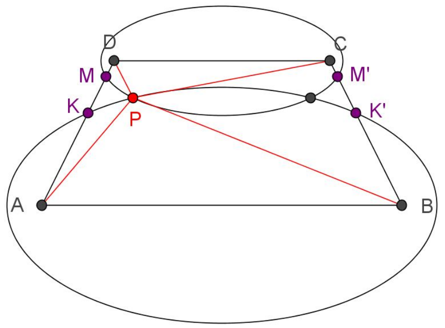
至於不等腰梯形與鳶形甚至於任意凸四邊形，是否有類似上述的結果？我們想藉由相同或進一步的手法，呼朋引伴，招兵買馬，來加入後續的研究。

參考文獻

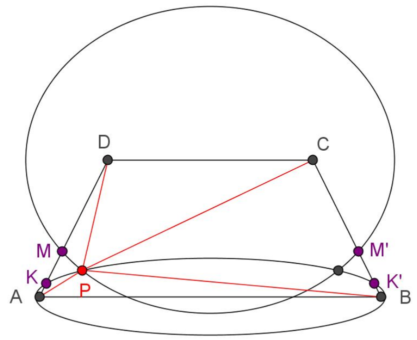
李政豐、朱啟台、陳昭地(2014).三角形的三個最大值定理的迴響.科學教育月刊 367 期(pp,24-34).臺北市:國立臺灣師範大學科學教育中心

附錄

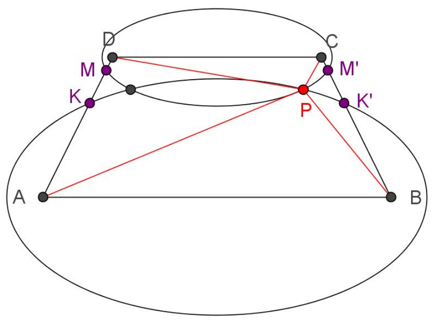
(1) 等腰梯形的四種情形：依照 P 點所在的位置來區分



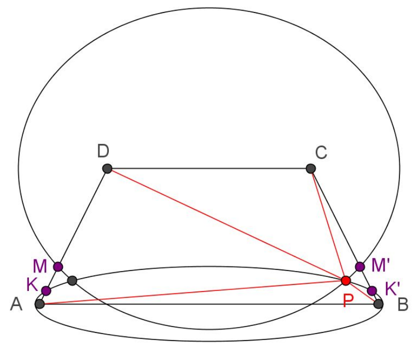
附錄圖 1.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點



附錄圖 2.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

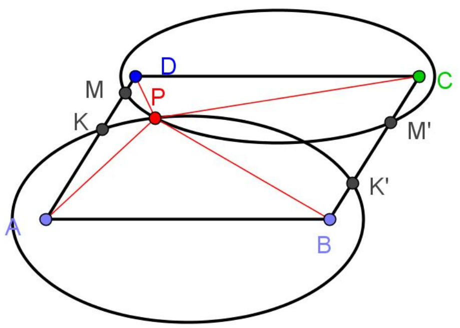


附錄圖 3.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

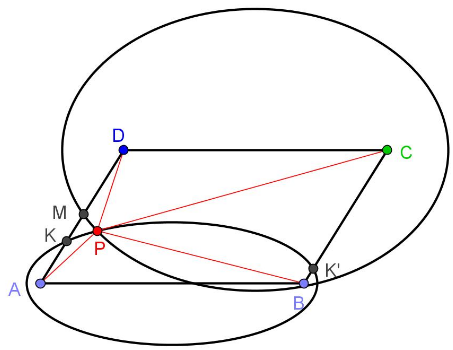


附錄圖 4.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

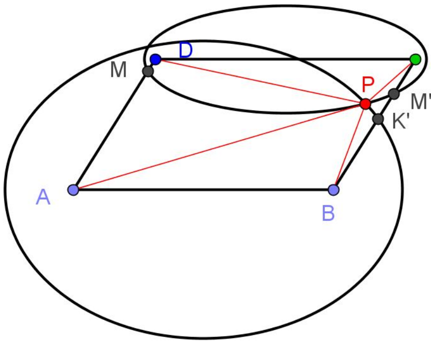
(2) 平行四邊形的四種情形：依照 P 點所在的位置來區分



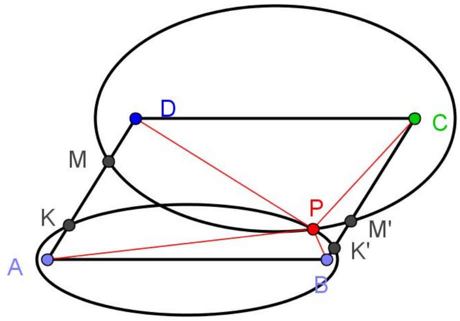
附錄圖 5.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點



附錄圖 6.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 K′ 一點

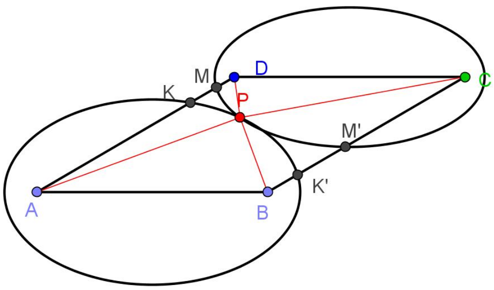


附錄圖 7.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M 一點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

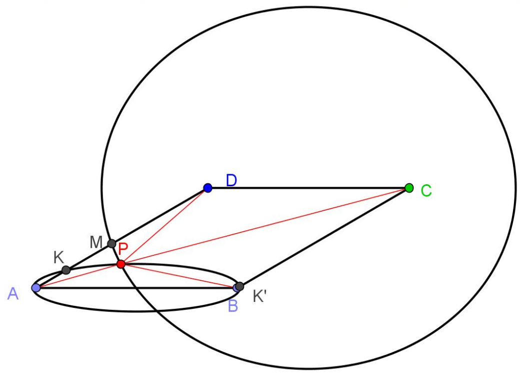


附錄圖 8.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

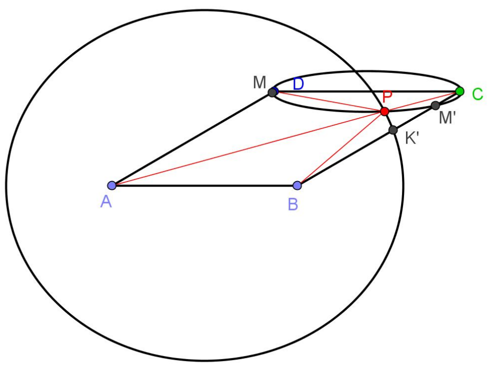
(3) 菱形的四種情形：依照 P 點所在的位置來區分



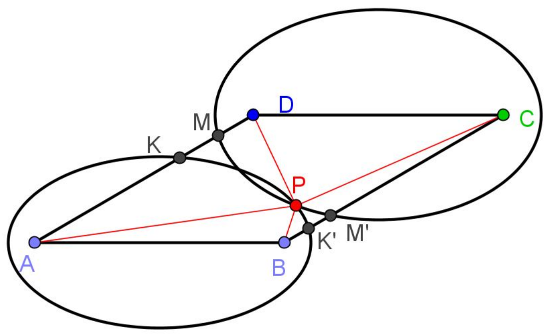
附錄圖 9.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點



附錄圖 10.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 K′ 一點

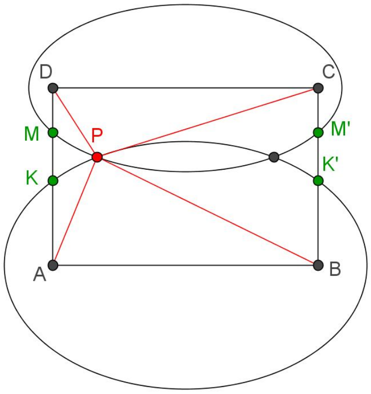


附錄圖 11.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M 一點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

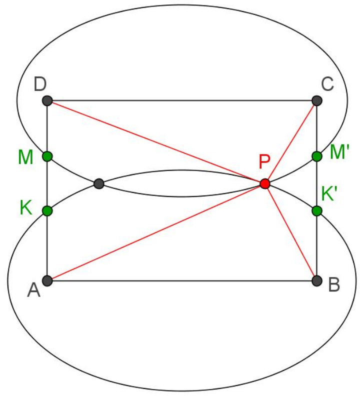


附錄圖 12.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M′, K′ 兩點

(4) 矩形的兩種情形：依照 P 點所在的位置來區分



附錄圖 13.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M', K' 兩點



附錄圖 14.的兩個橢圓與 $\overline{AD}$ 交在 M,K 兩點，與 $\overline{BC}$ 交在 M', K' 兩點