

---

# 課本沒寫的全反射(II)

黃竹安\* 劉威志

國立臺灣師範大學 物理學系

【(續)科學教育月刊第 382 期第 46 頁之後】

## 陸、Goos-Hänchen Shift

從以上，我們研究了透射波在全反射時的行為，例如偏振的變化，能量的流動。接著，我們將注意力放到一樣值得注意的反射波。當具有有限寬度的光束在介面被全反射時，由於反射系數的相位變化，反射光事實上會產生些許橫向的位移，此位移稱為 Goos-Hänche 位移或 Goos-Hänchen 效應。我們想了解這個機制如何發生，以及計算平面波如何出現 Goos-Hänchen 位移、出現的量。由傅立葉分析的觀念，有限寬度的光束可以視為多組具有無窮大振幅平面波的疊加(為什麼?)，如此我們可以將振幅的空間分布經由傅立葉分析轉換為頻域(frequency domain) 的分布。

考慮反射係數，

$$r_{TM} = \exp(2i \tan^{-1} \frac{|n_i^2 \alpha|}{n_i^2 k_{iz}})$$

相角  $\phi_r$  隨  $k_{ix}$  改變。假設振幅  $E(x)$  的分布和波長  $\lambda$  相比非常大，則：

$$E_i(x,t) = \int A(k') e^{ik'x - i\omega t} dk' \quad (27)$$

$k'$  為空間變數  $x$  的傅立葉轉換，由於振幅分佈的區域很廣  $\Delta x \gg \lambda, k'$ ，轉換後則可以考慮為非常小的量，因而我們可以對  $\phi_r$  進行泰勒展開。

$$\phi_r = \phi_r(k_{ix}) + \frac{d\phi_r}{dk_{ix}} \Delta k_{ix} \quad (28)$$

而  $\phi_r$ ，反射波的相角則為：

$$\phi_r = 2 \tan^{-1} \left( \frac{\epsilon_i \sqrt{k_{ix}^2 - \epsilon_i (\omega/c)^2}}{\epsilon_i k_{iz}} \right) \quad (29)$$

---

\*為本文通訊作者

故反射波可以寫為：

$$E_r(x, t) = \int A(k') e^{ik'_{ix}(x - \frac{d\phi_r}{dk'_{ix}} \Delta k'_{ix}) - i\omega t} dk'$$

如果我們考慮具有無限大振幅的平面波，就可以將  $A(k')$  視為 Dirac delta function  $\delta(k')$ 。故積分可以寫為：

$$E_r = E(x - \frac{d\phi_r}{dk'_{ix}}) e^{k'_{ix}x - i\omega t} \quad (30)$$

(Delta 函數具有挑出  $k'=0$  函數值的特性。)，從  $E(x - \frac{d\phi_r}{dk'_{ix}})$  可以看出，光束移動了  $\frac{d\phi_r}{dk'_{ix}}$  的量。反射波因全反射而產生的相位變化於臨界角時開始出現(如圖 10)。但並非所有的相位變化都可以產生 Goos-Hänchen 位移，必須使得相位變化貢獻至  $k_x$ ，且第一階導數存在時，位移方可存在。而由(30) 這個微分可以看出，位移在臨界角時有最大值(如圖 9)，在金屬介面時則比介質稍小。

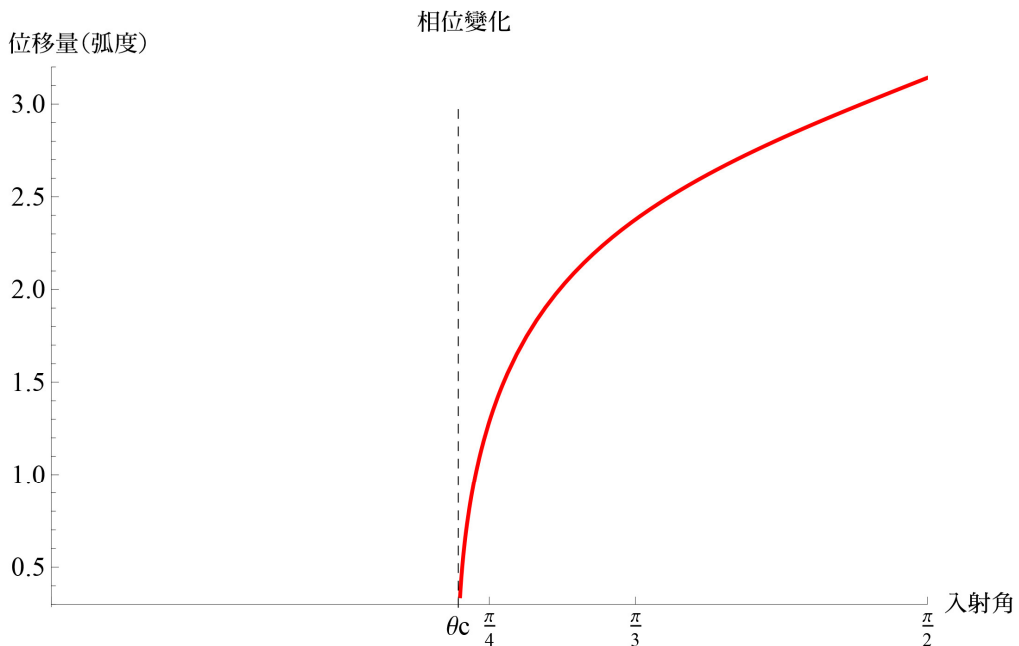


圖 9 反射係數的相位變化

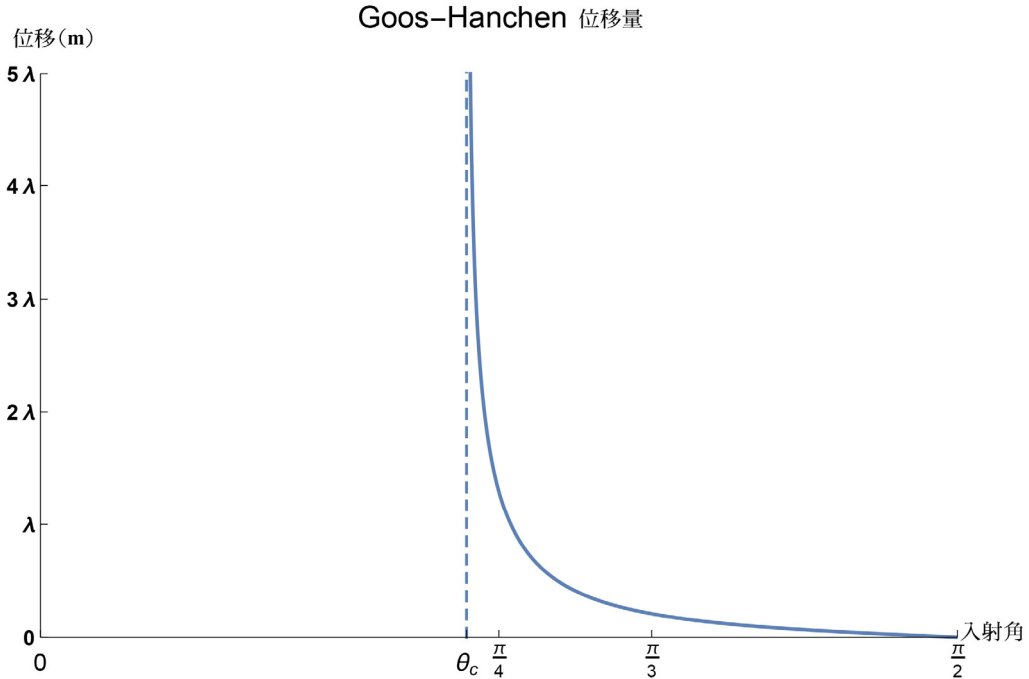


圖 10 Goos Hänchen 位移

## 柒、結論

從以上的討論我們研究推導了全反射複雜而有趣的各個層面，這些現象是非常值得玩味，並擁有重要物理意義及應用的。由於全反射發生時，透射波的  $k_z$  成為複數，因而在  $k_{ix}^2 + k_{iz}^2 = k_i^2$  這個數學式上產生  $k_{ix} > k_i$  這種分量大於總量的結果，也使得反射與透射的係數成為了複數。而在透射係數成為複數的影響下，原本線性偏振的入射波在經過全反射後，透射波其中一個場的偏振將從線性偏振轉變為橢圓偏振的形式，若是  $TE$  偏振的入射光則透射波的磁場會具橢圓偏振；若是  $TM$  偏振的入射光則透射波的電場會具有橢圓偏振。我們以波印廷向量來描述的能量流動，我們發現，全反射的能量流動會在介面間隨時間演進來回轉移，故時間平均上看起來只有往前傳送的效應。這些現象並不直觀，如果我們沒有經過一些計算，是不容易發現這些結果的。藉由傅立葉分析我們解明了：反射波的相位差使反射的光束產生了移動，形成此 Goos Hänchen 位移的原因，並且知道，Goos Hänchen 位移在臨界角時具有最大值。當可見光入射金屬時，如果是夠厚的金屬，則都會有全反射的發生，但如果金屬是鍍在介質上的一層薄膜，則只有  $TM$  偏振能夠直接產生金屬介面的全反射，並產生表面電荷集體震盪的現象，稱為表面電漿子，若要以  $TE$  偏振來產生相同的現象，則需要使用人造物質。而在這個現象之後，開啟了表面電漿子現象研究領域的大門。

## 捌、附錄

### 一、複數表示向量簡介

我們需要先了解一些基本的數學。根據 Taylor 展開式，任何的函數都可以寫成在某一點  $a$  逐項微分的級數展開式，如果取  $a = 0$

$$F(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (31)$$

因此，指數函數  $e^x$  在  $x = 0$  的展開式為

$$e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (32)$$

此對於任何數值均收斂。

那麼，對於  $\sin x$ 、 $\cos x$  的情形又可以得出

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (33)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (34)$$

再利用 Taylor 展開式的合成函數性質，將  $ix$  代入 32 中的  $x$ ，並整理含  $i$  與不含  $i$  的項，即可得到著名的 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (35)$$

(35)式在數學上有很大的好處，可以用這條式子來簡化很多計算，當我們需要  $\cos$  的時候，取實部就可，若需要  $\sin$  的時候，則取虛部。寫成方程式，以  $\text{Re}$  表示取實部， $\text{Im}$  表示取虛部，則：

$$\cos x = \text{Re} \left[ e^{ix} \right] \quad \sin x = \text{Im} \left[ e^{ix} \right] \quad (36)$$

或者也可以表示成

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (37)$$

在許多的物理教科書裡面，經常會需要用到正弦與餘弦的函數，我們為了方便計算波的各種性質，常常會引入複數的數學形式來計算。例如可以將  $E_0 \cos(kx - \omega t) = E_0 \text{Re} \left[ e^{i(kx - \omega t)} \right]$ ，更廣義些則為  $E_0 \cos(k \cdot r - \omega t) = E_0 \text{Re} \left[ e^{i(k \cdot r - \omega t)} \right]$  複數出現在指數  $e$  內通常會造成相位上的變化，或者振幅上的衰減，如果複數是出現在振幅上，則可以將它整理成極式，並寫成相位的變化，複數也很常用於簡諧運動，或者  $LC$  電路的震盪。

## 二、電磁學的邊界條件

$$\oint_S D \cdot dA = q_{enc} , \quad \oint_S B \cdot dA = 0 , \quad \oint_P E \cdot dl = 0 , \quad \oint_P H \cdot dl = I_{enc}$$

Maxwell 四條方程式的積分形式如上所列， $S$  表示封閉區面， $P$  表示封閉路徑。考慮我們文章中所使用的介面，當我們對面積分的式子取  $S$  為一個扁平的盒子時，可以得出

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f , \quad B_1^\perp = B_2^\perp$$

$\sigma_f$  為表面電荷密度。而對於線積分的方程式，我們考慮  $P$  為一個狹長的方形線圈，可以得出

$$E_1^\parallel = E_2^\parallel , \quad H_1^\parallel - H_2^\parallel = K_f \times \hat{n}$$

其中  $K_f$  為表面電流密度， $\hat{n}$  為介面的法向量。

## 三、TE 與 TM 兩種偏振

雖然電磁波具有電場與磁場兩種場，所以空間中的電磁波共有六個分量 ( $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ )，但是藉由分成兩類，我們實際上只需要考慮三個分量即可，為什麼？因為電場、磁場、傳遞方向三者在三維空間中互相垂直，對於線性偏振的電磁波，我們可以分為兩類來討論，*TE* (Transverse electric) 偏振是指電場振動方向垂直於入射平面的一種偏振方式，有些文獻稱為垂直偏振或者 *s*-偏振，另一種偏振形式則為 *TM* (Transverse Magnetic)，則是磁場振動方向垂直於入射平面，也稱為平行偏振、*p*-偏振。如此我們可以只考慮電場或磁場其中一種場即可，另一種場可以另外求出。例如使用

$$E = \frac{H \times k}{\omega \epsilon} \quad H = \frac{k \times E}{\omega \mu}$$

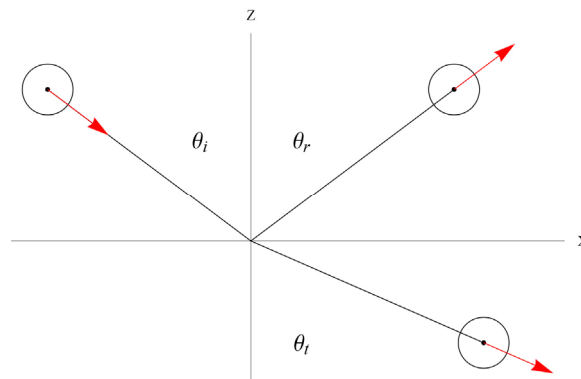


圖 11 *TE* 偏振的示意圖，其中紅色箭頭表示波的傳遞方向，黑點表示電場  $E$  指向畫面外

首先我們選擇電磁波的  $TE$  偏振方式來檢視電磁波在不同介質的介面如何折射與反射，定義  $z=0$  為此介面，電場振動方向為  $y$ ，並在往後的內容中遵循此一習慣。

電場可以寫成  $Ee^{ik_x x + k_z z - \omega t}$  的形式，我們將入射波、反射波、透射波分別表示為：

$$\begin{aligned} E_i &= E_0 e^{i(k_{ix}x + k_{iz}z - \omega t)} \\ E_r &= rE_0 e^{i(k_{rx}x + k_{rz}z - \omega t)} \\ E_t &= tE_0 e^{i(k_{tx}x + k_{tz}z - \omega t)} \end{aligned} \quad (38)$$

而在邊界上，以邊界條件解出  $k$  的分量，須符合向量的畢氏定理如下：

$$\begin{aligned} k_{ix}^2 + k_{iz}^2 &= k_i^2 \\ k_{rx}^2 + k_{rz}^2 &= k_r^2 \\ k_{tx}^2 + k_{tz}^2 &= k_t^2 \end{aligned} \quad (39)$$

其中  $r = E_r / E_i$  和  $t = E_t / E_i$  分別是反射和透射波對入射波的比，稱為反射係數和透射係數。我們在下標加註  $TE$  以標示清楚偏振的種類

$$r_{TE} = \frac{k_{iz} - k_{tz}}{k_{iz} + k_{tz}} \quad t_{TE} = \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + k_{tz}} \quad (40)$$

我們將 Snell 定律中的三角函數進一步改寫為  $k$  分量的組合。我們知道， $k_{ix} = k_i \sin \theta_i$ 、 $k_{rx} = k_r \sin \theta_r$ 、 $k_{tx} = k_t \sin \theta_t$ 、 $k_i = n_i k_0$ ，以及  $k_t = n_t k_0$ ，將這些關係代回 Snell 定律的關係式，可得：

$$n_i \frac{k_{ix}}{n_i k_0} = n_t \frac{k_{tx}}{n_t k_0} \quad , \quad \boxed{k_{ix} = k_{tx}}$$

亦即 Snell 定律其實是說明  $k$  水平分量經過不同介質依然不變的結果。磁場  $H$  可以用下列的方程式求得：

$$H = \frac{k \times E}{\omega \mu}$$

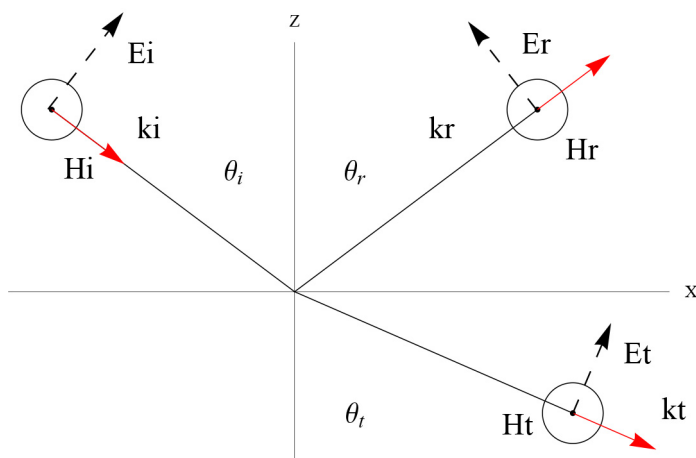
並列出結果：

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{E_0}{\omega \mu_i} e^{i(k_{ix}x + k_{iz}z - \omega t)} (k_{ix} \hat{z} + k_{iz} \hat{x}) \\ H_r &= \frac{rE_0}{\omega \mu_r} e^{i(k_{rx}x + k_{rz}z - \omega t)} (k_{rx} \hat{z} + k_{rz} \hat{x}) \\ H_t &= \frac{tE_0}{\omega \mu_t} e^{-ik_{tz}z} e^{i(k_{tx}x - \omega t)} (k_{tx} \hat{z} + k_{tz} \hat{x}) \end{aligned} \quad (41)$$

其中我們假設兩邊的磁導係數  $\mu$  都是一樣的。

我們用相似的方法來處理  $TM$  偏振，設定磁場只在  $y$  方向振動。

$$H_i = H_0 e^{i(k_{ix}x + k_{iz}z)} \quad , \quad H_r = rH_0 e^{i(k_{rx}x + k_{rz}z)} \quad , \quad H_t = tH_0 e^{i(k_{tx}x + k_{tz}z)} \quad (42)$$

圖 12  $TM$  偏振示意圖

並且用下式求出  $E$

$$E = \frac{H \times k}{\omega \epsilon}$$

$$E_i = \frac{H_0}{\omega \epsilon_i} e^{i(k_{ix}x + k_{iz}z)} (k_{iz}x + k_{ix}z)$$

$$E_r = \frac{rH_0}{\omega \epsilon_r} e^{i(k_{rx}x + k_{rz}z)} (k_{rz}x + k_{rx}z)$$

$$E_t = \frac{tH_0}{\omega \epsilon_t} e^{i(k_{tx}x + k_{tz}z)} (k_{tz}x + k_{tx}z)$$
(43)

注意透射波  $z$  的方向必須變號。  $r$ 、 $t$  在下方列出，以下標標註  $TM$  以和(40)作為對照

$$r_{TM} = \frac{n_t^2 k_{iz} - n_i^2 k_{tz}}{n_i^2 k_{iz} + n_t^2 k_{tz}}, \quad t_{TM} = \frac{2n_i^2 k_{tz}}{k_{iz}n_t^2 + n_i^2 k_{tz}}$$
(44)

以上我們完成了將以往由  $\theta$  及三角函數組合的表示式改為由傳播常數表示的電磁波方程式。

## 參考文獻

- E. Hecht, Optics, 4/e(Addison-Wesley, San Francisco, 2011).
- D. J. Griffiths, Introduction to electrodynamics, 4/e(Addison-Wesley, San Francisco, 2012).
- D. K. Cheng, Field and Wave Electromagnetics, 2/e(Addison-Wesley, San Francisco, 1989).
- E. Kretschmann, Opt. Comm. Vol. 6, pp.185-187 (1972).
- S. A. Maier, Plasmonics: Fundamentals and Applications(Springer, Berlin, 2007).
- F. de Fornel, Evanescent Waves From Newtonian Optics to Atomic Optics(Springer, Berlin, 2011)
- J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, 3/e(Mc Graw-Hill, San Francisco, 2004).