# 撲克牌排列之規律探究

蘇亭云 [1*] 蘇柏奇 [2]

[1] 國立臺北教育大學　數學暨資訊教育學系

[2] 苗栗縣立興華高級中學

隨手可得的撲克牌是許多魔術表演的道具，除了提供日常消遣娛樂外，近幾年，更發展了許多以撲克牌為教具的數學教案，成為老師課堂上的好幫手。本文將藉由撲克牌的排列，進行一段規律的探究之旅。

## 壹、規律探討：

同一花色的撲克牌有 13 張，通常將 A、J、Q、K 分別視為 1、11、12、13 點，將這些牌依點數排序即為：

A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K。

這個排列恰好將 13 張牌排完，且每張牌的點數都比前一張多 1 點。

若我們改變排列的規則，要求每張牌的點數都比前一張牌多 2 點，則可以得到：

A、3、5、7、9、J、K (1)

此時，尚有 6 張牌未排列，依點數大小為：

2、4、6、8、10、Q (2)

恰好也符合每張牌比前一張多 2 點的要求，考慮(1)中的 K 和(2)中的 2 這兩張牌，若我們規定「A 比 K 多 1 點」，則 2 比 K 多 2 點，因此我們將這(1)、(2)兩段合併得：

A、3、5、7、9、J、K、2、4、6、8、10、Q

恰好將 13 張牌排完，且符合每張牌比前一張多 2 點的要求。

依照 A 比 K 多 1 點且每張牌都比前一張多 3 點的要求，我們可得 A、4、7、10、K 因為 3 比 K 多 3 點，得到

A、4、7、10、K、3、6、9、Q

因為 2 比 Q 多 3 點，得到

A、4、7、10、K、3、6、9、Q、2、5、8、J

恰好也將 13 張牌排完。

這是巧合嗎？相差其它點數也可以恰好將 13 張牌排完嗎？我們求得所有情形並列表 1 如下：

---

*為本文通訊作者

表 1

| 相差點數 | 排列順序 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | A | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | J | Q | K |
| 2 | A | 3 | 5 | 7 | 9 | J | K | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | Q |
| 3 | A | 4 | 7 | 10 | K | 3 | 6 | 9 | Q | 2 | 5 | 8 | J |
| 4 | A | 5 | 9 | K | 4 | 8 | Q | 3 | 7 | J | 2 | 6 | 10 |
| 5 | A | 6 | J | 3 | 8 | K | 5 | 10 | 2 | 7 | Q | 4 | 9 |
| 6 | A | 7 | K | 6 | Q | 5 | J | 4 | 10 | 3 | 9 | 2 | 8 |
| 7 | A | 8 | 2 | 9 | 3 | 10 | 4 | J | 5 | Q | 6 | K | 7 |
| 8 | A | 9 | 4 | Q | 7 | 2 | 10 | 5 | K | 8 | 3 | J | 6 |
| 9 | A | 10 | 6 | 2 | J | 7 | 3 | Q | 8 | 4 | K | 9 | 5 |
| 10 | A | J | 8 | 5 | 2 | Q | 9 | 6 | 3 | K | 10 | 7 | 4 |
| 11 | A | Q | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | K | J | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 12 | A | K | Q | J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

透過上表，驗證了不論相差幾點，都可以將 13 張牌排完。事實上，表中還隱藏一些規律！若忽略 A，對角線所分割的兩個區域，存在相當的對稱性（如表 2），例如：點數 3 的這張牌出現在相差 1 點的第 3 張和相差 2 點的第 2 張；點數 4 的這張牌出現在相差 1 點的第 4 張和相差 3 點的第 2 張；點數 5 的這張牌出現在相差 1 點的第 5 張和相差 4 點的第 2 張...。

表 2

| 相差點數 | 排列順序 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | A | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | J | Q | K |
| 2 | A | 3 | 5 | 7 | 9 | J | K | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | Q |
| 3 | A | 4 | 7 | 10 | K | 3 | 6 | 9 | Q | 2 | 5 | 8 | J |
| 4 | A | 5 | 9 | K | 4 | 8 | Q | 3 | 7 | J | 2 | 6 | 10 |
| 5 | A | 6 | J | 3 | 8 | K | 5 | 10 | 2 | 7 | Q | 4 | 9 |
| 6 | A | 7 | K | 6 | Q | 5 | J | 4 | 10 | 3 | 9 | 2 | 8 |
| 7 | A | 8 | 2 | 9 | 3 | 10 | 4 | J | 5 | Q | 6 | K | 7 |
| 8 | A | 9 | 4 | Q | 7 | 2 | 10 | 5 | K | 8 | 3 | J | 6 |
| 9 | A | 10 | 6 | 2 | J | 7 | 3 | Q | 8 | 4 | K | 9 | 5 |
| 10 | A | J | 8 | 5 | 2 | Q | 9 | 6 | 3 | K | 10 | 7 | 4 |
| 11 | A | Q | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | K | J | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 12 | A | K | Q | J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

在此對稱性下，排列順序中的第 x 張牌與第 15－x 張牌存在巧妙的規律（x=2~13），例如：表 3 中，第 2 張牌由上而下依序為 2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K，而第 13 張牌為 K、Q、J、10、9、8、7、6、5、4、3、2；再如：第 3 張牌由上而下依序為 3、5、7、9、J、K、2、4、6、8、10、Q，而第 12 張牌為 Q、10、8、6、4、2、 、K、J、9、7、5、3。

若進一步調整各列順序如表 4，則此 12 個排列兩兩一組（同組之兩個排列相差點數的和為 13），排列的順序恰好顛倒，例如：相差 2 點的排列為：「A、3、5、7、9、J、K、2、4、6、8、10、Q」，而相差 11 點的排列為：「A、Q、10、8、6、4、2、K、J、9、7、5、3」。透過這個觀察，未實際排列即可推算相差任意點數之排列的最後第 2 張牌為何！例如：相差 4 個點數的排列之最後 1 張牌為何？該牌即為相差 9 個點數的第 2 張牌，故為 10。

表 3

| 相差點數 | 排列順序 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | A | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | J | Q | K |
| 2 | A | 3 | 5 | 7 | 9 | J | K | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | Q |
| 3 | A | 4 | 7 | 10 | K | 3 | 6 | 9 | Q | 2 | 5 | 8 | J |
| 4 | A | 5 | 9 | K | 4 | 8 | Q | 3 | 7 | J | 2 | 6 | 10 |
| 5 | A | 6 | J | 3 | 8 | K | 5 | 10 | 2 | 7 | Q | 4 | 9 |
| 6 | A | 7 | K | 6 | Q | 5 | J | 4 | 10 | 3 | 9 | 2 | 8 |
| 7 | A | 8 | 2 | 9 | 3 | 10 | 4 | J | 5 | Q | 6 | K | 7 |
| 8 | A | 9 | 4 | Q | 7 | 2 | 10 | 5 | K | 8 | 3 | J | 6 |
| 9 | A | 10 | 6 | 2 | J | 7 | 3 | Q | 8 | 4 | K | 9 | 5 |
| 10 | A | J | 8 | 5 | 2 | Q | 9 | 6 | 3 | K | 10 | 7 | 4 |
| 11 | A | Q | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | K | J | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 12 | A | K | Q | J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

表 4

| 相差點數 | 排列順序 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | A | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | J | Q | K |
| 12 | A | K | Q | J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | A | 3 | 5 | 7 | 9 | J | K | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | Q |
| 11 | A | Q | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | K | J | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 3 | A | 4 | 7 | 10 | K | 3 | 6 | 9 | Q | 2 | 5 | 8 | J |
| 10 | A | J | 8 | 5 | 2 | Q | 9 | 6 | 3 | K | 10 | 7 | 4 |
| 4 | A | 5 | 9 | K | 4 | 8 | Q | 3 | 7 | J | 2 | 6 | 10 |
| 9 | A | 10 | 6 | 2 | J | 7 | 3 | Q | 8 | 4 | K | 9 | 5 |
| 5 | A | 6 | J | 3 | 8 | K | 5 | 10 | 2 | 7 | Q | 4 | 9 |
| 8 | A | 9 | 4 | Q | 7 | 2 | 10 | 5 | K | 8 | 3 | J | 6 |
| 6 | A | 7 | K | 6 | Q | 5 | J | 4 | 10 | 3 | 9 | 2 | 8 |
| 7 | A | 8 | 2 | 9 | 3 | 10 | 4 | J | 5 | Q | 6 | K | 7 |

## 貳、一般化：

不論相差多少點數，13 張撲克牌都可以排完，這結果適用於其它情形嗎？不論幾張牌、相差幾點數都能將牌排完嗎？

考慮一般的情形，假設有 N 張牌（點數為 1 至 N），每張牌比前一張牌多 D 點。列出 N=6～9 的排列情形如下：

表 5

| N=6 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 1 | | |
| 3 | 1 | 4 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 5 | 3 | 1 | | |
| 5 | 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

表 6

| N=7 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 6 |
| 3 | 1 | 4 | 7 | 3 | 6 | 2 | 5 |
| 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

表 7

| N=8 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 | 3 | 6 |
| 4 | 1 | 5 | 1 | | | | | |
| 5 | 1 | 6 | 3 | 8 | 5 | 2 | 7 | 4 |
| 6 | 1 | 7 | 5 | 3 | 1 | | | |
| 7 | 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

表 8

| N=9 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | 1 | 4 | 7 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 5 | 9 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 |
| 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 | 9 | 5 |
| 6 | 1 | 7 | 4 | 1 | | | | | |
| 7 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 | 9 | 7 | 5 | 3 |
| 8 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

整理可否排列的情形如下，猜測 N、D 是否互質是關鍵，兩者互質時才能完成排列。

表 9

| N | D | |
|---|---|---|
| | 可完成排列 | 無法完成排列 |
| 6 | 1、5 | 2、3、6 |
| 7 | 1~6 | |
| 8 | 1、3、5、7 | 2、4、6 |
| 9 | 1、2、4、5、7、8 | 3、6 |
| 13 | 1~12 | |
| 備註 | N、D 互質 | N、D 不互質 |

## 參、N、D 不互質：

從具體的例子開始，觀察 N＝6、D＝2 的排列，如圖 10，D＝2 時，自 1 開始，兩個數一組（其中的第 1 個數被列入排序），6 個數恰被分成 3 組，下一組的第一個數即為 1，故排序中止，此時只排了 3 個數，未將所有的數排完。

表 10

| 點數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 排序 | V | | V | | V | |
| 累積 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

觀察 N＝8、D＝6 的排列，如圖 11，24 個數恰被分成 4 組，下一組的第一個數即為 1，故只排了 4 個數，無法完成排序。

表 11

| 點數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 排序 | V | | | | | | V | | | | | | V | | | | | | V | | | | | |
| 累積 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

因此，當 $(N,D)=d$ 時，假設 $N=ds$ 、 $D=dt$ （s,t 互質），如圖 1， 個數恰被分為 s 組。排序中止時，只排了 s 個數，而 ，故排列並未完成。

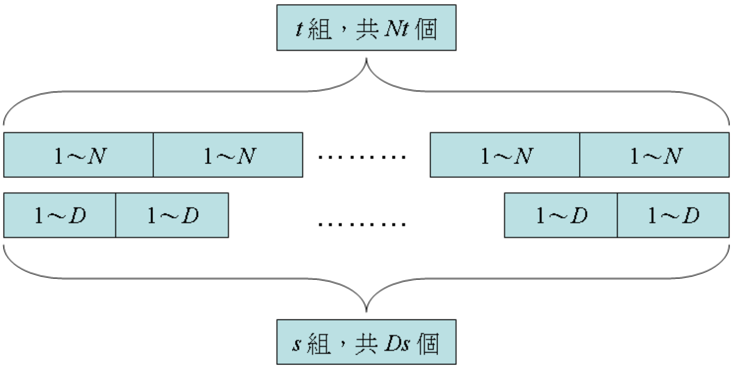


圖 1

## 肆、N、D 互質：

為何當 N、D 互質時，即可完成排列？我們計算排列中止前，排了幾個數！如圖 2，N 個數排列時，因兩數互質，必須 ND 個數才能恰被分完，恰排了 N 個數。

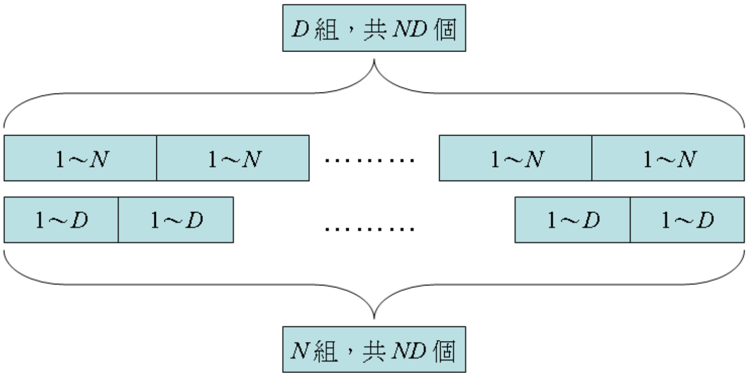


圖 2

這就說明排列成功嗎？這 N 個數會不會重複？若有重複，則有數字不在排列中，必須 N 個數都不一樣，排列才成功。該如何驗證呢？觀察 N=7、D=3 的排列（如圖 3），此排列可分為三段，此三段之數除以 3 所得餘數分別為 1、0、2。

第 1 段：1、4、7　　第 2 段：3、6　　第 3 段：2、5

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 點數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 排序 | V | | | V | | | V | | | V | | | V | | | V | | | V | | |
| 累積 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |

圖 3

N=9、D=4 的排列如圖 4，各段之數除以 4 所得餘數分別為 1、0、3、2。

第 1 段：1、5、9　　第 2 段：4、8　　第 3 段：3、7　　第 4 段：2、6

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 點數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 排序 | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | | V | | | |
| 累積 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

圖 4

由此看來，一個成功的排列可分為 D 段（同一段的數不會重複），各段的數除以 D 之餘數分別為 0 至 D-1，故不同段的數不會重複。如何驗證這個觀察？

利用反證法來驗證。如圖 5，假設排列中有兩數重複，第 $s+1$ 個數與第 $t+1$ 個數都是 k（$s<t, 1<k<N$），因 D 個數一組，此兩個 1 之間有 $(t-s)D-1$ 個數；因 N 個數一組，兩個 k 之間有 $Na-1$ 個數（a 為正整數），故得 $(t-s)D=Na$，即 $(t-s)D$ 是 N 的倍數。

因 N、D 互質，故  是 N 的倍數。……(1)

然而 $1\le s<t\le N$，故 $0<t-s<N$ ……(2)。

因(1)、(2)式矛盾，故可得當 N、D 互質時，排列了 N 個不會重複數，故排列成功。

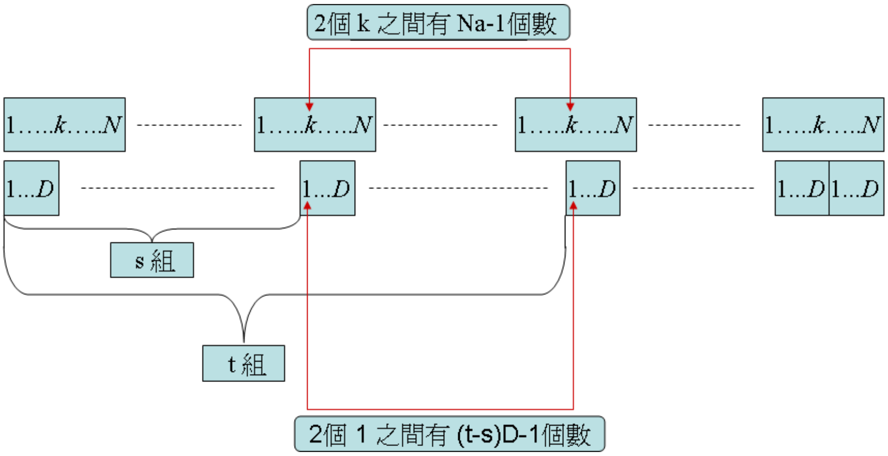


圖 5

## 伍、最後一個數：

在表 2～4 中，初步觀察到各個排列間存在規律。若在排列最後補上 1（如表 12、13），則規律更明顯了。大膽猜測：N 個數排列時，$D=a$ 與 $D=N-a$ 的排列顛倒。若上述猜測是正確的，則 $D=a$ 排列的最後一個數（在下圖裡是倒數第二個）是 $D=N-a$ 排列的第二個數，即為 $1+N-a$。例如：7 個數排列時，$D=2$ 的最後一個數為 $1+7-2=6$；$D=5$ 的最後一個數為 $1+7-5=3$。

表 12

| N=7 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | X |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 6 | 1 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 2 | 4 | 6 | 1 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 4 | 7 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 |
| 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 1 |

表 13

| N=8 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 排列順序 | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | X |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |
| 7 | 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 | 3 | 6 | 1 |
| 5 | 1 | 6 | 3 | 8 | 5 | 2 | 7 | 4 | 1 |

上述推論是否正確？如圖 6，若 N 數排列時，若 $D=a$ 的最後一個數為 A，則 $A+(a-1)=N$，故得 $A=1+(N-a)$，即為 $D=N-a$ 的第二個數。

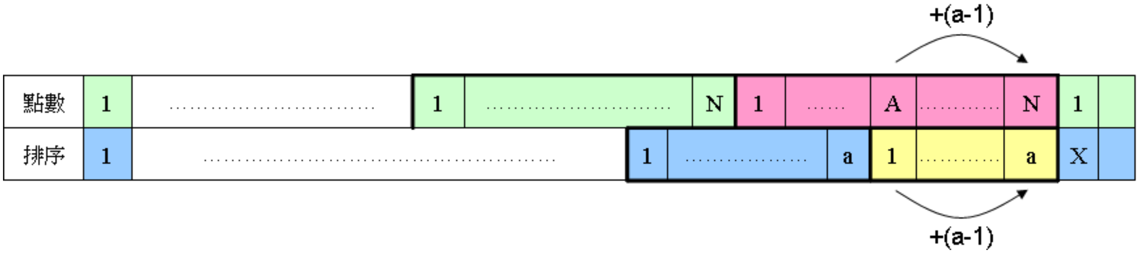


圖 6

$D=a$ 排列的倒數第二個數為何？該數與 $D=N-a$ 排列的第三個數有無關聯？能驗證兩個排列順序顛倒嗎？就留給讀者推敲了！註

註： $D=a$ 排列的倒數第二個數與 $D=N-a$ 排列的第三個數相等，事實上， $D=a$ 排列的倒數第 t 個數與 $D=N-a$ 排列的第 t+1 個數相等。若將圖 6 中的排列 1, 2, 3,…,a 改為 a, $a-1$ , ..., 3, 2, 1 即可驗證上述說明。