中學生通訊解題第九十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9101

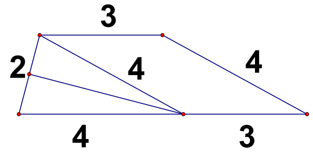
設有一個梯形，四邊長分別為 2,3,4,7，問此梯形面積所有可能的值？

簡答：$\frac{5}{2}\sqrt{15},\frac{54}{5},\frac{22}{3}\sqrt{2}$

參考解答：

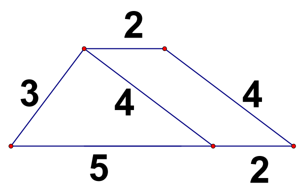
因為上底和下底的差與兩腰要可以組成三角形，所以只有下列三種可能的情形 $(上底,下底,腰,腰)=(3,7,2,4),(2,7,3,4),(4,7,2,3)$。

(1) $(上底,下底,腰,腰)=(3,7,2,4)$



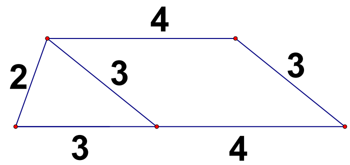
如圖，梯形面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}\times\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{15}$ 。

(2) $(上底,下底,腰,腰)=(2,7,3,4)$



如圖，梯形面積為 $\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\frac{9}{5}=\frac{54}{5}$ 。

(3) $(上底,下底,腰,腰)=(4,7,2,3)$



如圖，梯形面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{8}\times\frac{11}{3}=\frac{22}{3}\sqrt{2}$ 。

故梯形面積所有可能的值為 $\frac{5}{2}\sqrt{15},\frac{54}{5},\frac{22}{3}\sqrt{2}$ 。

問題編號
9102

從 1,2,3,…,200 的正整數中，任取 4 個相異正整數由小排到大，若可以成等差數列，我們稱之為『好數列』，若可以成等比數列且公比也為正整數，我們稱為『強數列』，請問

共有多少好數列與強數列？

簡答：好數列有 6567 組、強數列有 36 組

參考解答：

好數列必為 $a, a+d, a+2d, a+3d$ 之型態，且 a, d 皆為正整數，所以有

$$4 \le a+3d \le 200 \Rightarrow 1 \le d \le \left[\frac{200}{3}\right] \le 66$$

$d = 66, (1,67,133,199), (2,68,134,200)$　　$\therefore 2$ 組

$d = 65, (1,66,131,196), \cdots, (5,70,135,200)$　　$\therefore 5 = 2+3$ 組

$d = 64, (1,65,129,193), \cdots, (8,72,136,200)$　　$\therefore 8 = 5+3 = 2+2\times 3$ 組

$\vdots$

$d = 1, (1,2,3,4), \cdots, (197,198,199,200)$　　$\therefore 2+(66-1)\times 3 = 197$ 組

所以好數列共有 $2+5+8+\cdots+197 = \dfrac{66}{2}(2+197) = 6567$ 組。

強數列必為 a, ar, ar^2, ar^3 之型態，且 a, r 皆為正整數($r \ge 2$)，所以有

$8 \le ar^3 \le 200$　　$\therefore 8 \le r^3 \le 200 \Rightarrow 2 \le r \le 5$

$r = 5, (1,5,25,125)$　　$\therefore 1$ 組

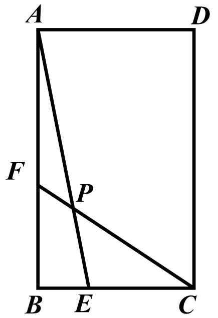
$r = 4, (1,4,16,64), (2,8,32,128), (3,12,48,192)$　　$\therefore 3$ 組

$r = 3, (1,3,9,27), \cdots, (7,21,63,189)$　　$\therefore 7$ 組

$r = 2, (1,2,4,8), \cdots, (25,50,100,200)$　　$\therefore 25$ 組

所以強數列共有 $1+3+7+25 = 36$ 組。

問題編號
9103



如圖，點 E, F 分別在矩形 $ABCD$ 的邊 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ 上，已知 $\overline{BF} = 4$, $\overline{BE} = 2$, $\overline{CE} = 4$, $\overline{AE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於點 P，且 $\angle APC = \angle AEB + \angle CFB$，則矩形 $ABCD$ 的面積為何？

簡答：60

參考解答：

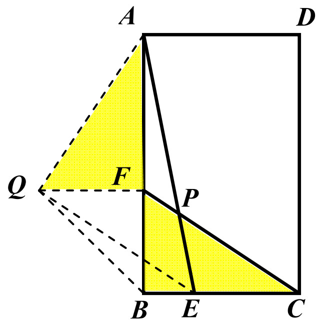
以下各種方法需要下列明顯可得的結果：

$$\angle APC=\angle AEB+\angle CFB=\angle EPF=\frac{360^\circ-90^\circ}{2}=135^\circ，$$

且 $\angle APF=\angle CPE=45^\circ$，$\angle BCF+\angle BAE=45^\circ$。

【法1】參考解答

如圖，過點E作 $\overline{EQ}\,//\,\overline{CF}$，過點$F$作 $\overline{FQ}\,//\,\overline{BC}$。連接 $\overline{AQ}, \overline{BQ}$。



由於四邊形$ECFQ$為平行四邊形，得 $\overline{FQ}=\overline{CE}=\overline{BF}=4$，

又 $\angle BFQ=\angle ABC=90^\circ$，故知$\triangle BFQ$為等腰直角三角形，

得 $\angle QBF=45^\circ$。又 $\angle EPF=135^\circ$，故 $\angle AEQ=45^\circ$。

再由 $\angle QBA=\angle QEA=45^\circ$，可知$A, Q, B, E$ 四點共圓。

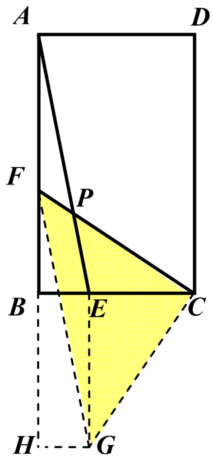
從而，$\angle BAQ=\angle BEQ=\angle BCF$，可得$\triangle FAQ\cong\triangle BCF$。

因此 $\overline{AF}=\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}=2+4=6$。

於是，$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=6+4=10$。

因此，矩形$ABCD$的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。

【法2】吳同學作法



如圖，作$\triangle ECG\cong\triangle BFC$。過點$G$作直線 $\overleftrightarrow{FB}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{FB}$ 於H點，連 $\overline{FG}$，可得$\triangle FCG$為等腰直角$\triangle$，則 $\angle GFC=45^\circ=\angle CPE$，得 $\overline{FG}\,//\,\overline{AE}$，又 $\overline{AF}\,//\,\overline{EG}$，

故四邊形$AFGE$為平行四邊形，得 $\overline{AF}=\overline{EG}=6$。

於是，$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=6+4=10$。

因此，矩形$ABCD$的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。

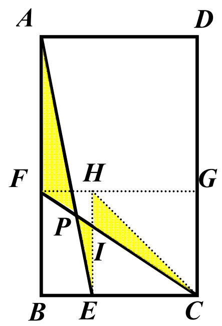
【法3】孫同學作法

如圖，過點F作 $\overline{FG}\,//\,\overline{BC}$ 交 $\overline{CD}$ 於G點，過點E作 $\overline{EH}\,//\,\overline{AB}$ 交 $\overline{FG}$ 於H點。連接 $\overline{HC}$，明顯可得$\triangle CIE\sim\triangle CFB$且$\triangle AFP\sim\triangle EIP\sim\triangle CIH$。

由$\triangle CIE\sim\triangle CFB$，得 $\dfrac{\overline{IE}}{\overline{FB}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}\Rightarrow\dfrac{\overline{IE}}{4}=\dfrac{4}{6}\Rightarrow\overline{IE}=\dfrac{8}{3}$，則 $\overline{HI}=4-\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}$。

由$\triangle HEC$為等腰直角$\triangle$，則 $\angle EPI=\angle CHI=45^\circ$，可得$\triangle EIP\sim\triangle CIH$，$\overline{HC}=4\sqrt{2}$，且

$\overline{IC}=\sqrt{(\frac{8}{3})^2+4^2}=\frac{4}{3}\sqrt{13}$。



由△EIP ～△CIH，故 $\dfrac{\overline{IP}}{\overline{IE}}=\dfrac{\overline{IH}}{\overline{IC}}\Rightarrow\dfrac{\overline{IP}}{\frac{8}{3}}=\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{13}}\Rightarrow\overline{IP}=\dfrac{8}{39}\sqrt{13}$ ，

再由∠$FBC=90°$，可得 $\overline{FC}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$ ，

故 $\overline{PF}=\overline{FC}-\overline{PI}-\overline{IC}=2\sqrt{13}-\dfrac{8}{39}\sqrt{13}-\dfrac{4}{3}\sqrt{13}=\dfrac{6}{13}\sqrt{13}$

△AFP～△CIH，得 $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{PF}}=\dfrac{\overline{IC}}{\overline{HI}}\Rightarrow\dfrac{\overline{AF}}{\frac{6}{13}\sqrt{13}}=\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{13}}{\frac{4}{3}}\Rightarrow\overline{AF}=6$ ，

於是， $\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=6+4=10$。

因此，矩形 $ABCD$ 的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。

【法4】陳同學作法

如圖，過點C作 $\overline{CG}\,//\,\overline{AE}$ 交 $\overline{AD}$ 於G點，連接 $\overline{FG}$, $\overline{CG}$ 。

由於∠CPE=45°，得∠GCF=45°，

設 $\overline{AF}=x$，則 $\overline{DC}=x+4$， $\overline{GD}=\overline{BE}=2$ ，

$\overline{FC}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13},\overline{GC}=\sqrt{2^2+(4+x)^2}=\sqrt{x^2+8x+20},$

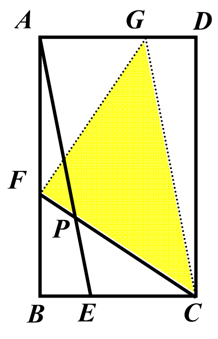
△GFC=$\dfrac{1}{2}\times\overline{FC}\times\overline{GC}\times\sin\angle GCF=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\sqrt{x^2+8x+20}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{13}\sqrt{x^2+8x+20}}{\sqrt{2}}$

又△GFC=矩形$ABCD$－△FBC－△FAG－△GDC

$$=6(x+4)-\frac{6\times4}{2}-\frac{x\times4}{2}-\frac{2(x+4)}{2}=3x+8$$

$$\frac{\sqrt{13}\sqrt{x^2+8x+20}}{\sqrt{2}}=3x+8\Rightarrow9x^2+48x+64=\frac{13x^2+104x+260}{2}$$

$\Rightarrow5x^2-8x-132=0\Rightarrow(x-6)(5x+22)=0\Rightarrow x=6,\dfrac{-22}{5}$ (負不合)



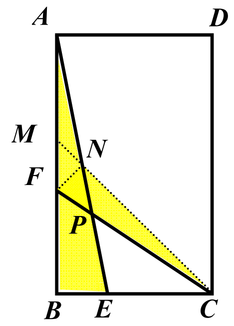
所以 $x=6$ ，故矩形$ABCD$的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。

【法5】謝同學作法

如圖，作 $\overline{CM}$ 使∠$MCB=45°$，則 $\overline{MB}=6$, $\overline{MF}=2$, $\overline{MC}=6\sqrt{2}$ ，

作 $\overline{FN}\perp\overline{MC}$ ，得等腰直角△NMF，

則 $\overline{NF}=\overline{MN}=\sqrt{2}$ ， $\overline{NC}=6\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ ，
因為∠*NCF* +∠*BCF* =45°且∠*BCF*+∠*BAE*=45°，
可得∠*NCF* =∠*BAE*，又∠*FNC* =∠*EBA*=90°，
因此△*CNF*～△*ABE*，故 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NF}}\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ，得 $\overline{AB}=10$。
因此，矩形 *ABCD* 的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。



【法6】吳同學作法

令∠*BCF*=θ，得∠*AEB*=∠*CPE*$+\theta=45°+\theta$，且 $\tan\theta=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，考慮

$$\tan(45°+\theta)=\frac{\tan45°+\tan\theta}{1-\tan45°\cdot\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=5\ 。$$

$\overline{AB}=\overline{BE}\cdot\tan\theta=2\times5=10$。
因此，矩形*ABCD*的面積為 $\overline{AB}\times\overline{BC}=10\times6=60$。

問題編號 9104

阿建和阿國兩人輪流擲一個骰子。不論由誰擲出，每當出現 1 點和 2 點時，阿建得 1 分，出現 3 點或 4 點時，則阿國得 1 分，若出現 5 點或 6 點，則兩人各得 1 分。當有人得到 6 分時，遊戲停止。請問：若過程中，阿建均維持領先的狀態，且最後為阿建獲勝，則遊戲停止時，過程共有幾種不同的可能情形？

簡答：(1) 只考慮兩人分數改變的過程：共 394 種

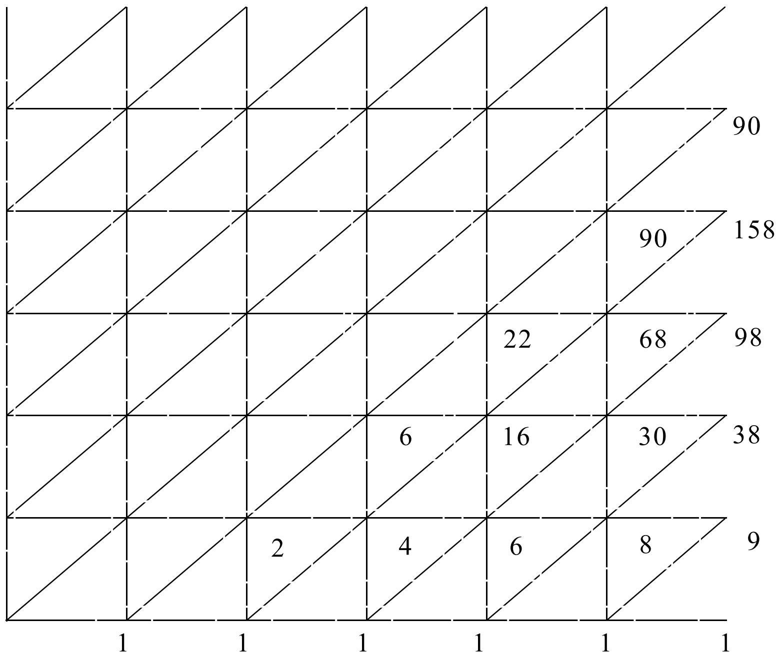
(2) 考慮兩人投擲點數的過程：共 128768 種

參考解答：

考慮下面路徑問題：

(1) 只考慮兩人分數改變的過程：

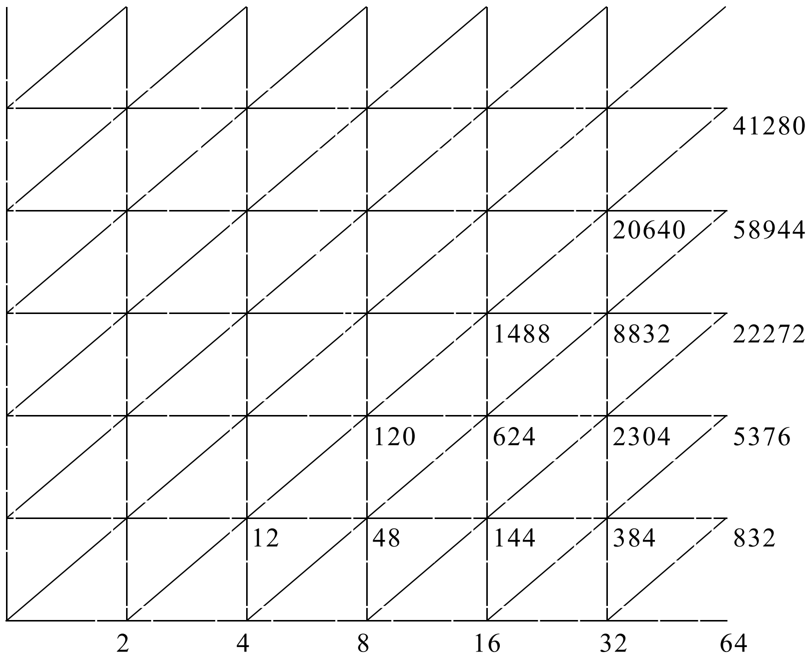
假設阿建得分則沿水平方向走 1 個單位，阿國得分則沿鉛直方向走 1 個單位，若同時得分則走 1 方格對角線，如圖一：



(圖一) 所有的路徑數共 1 + 9 + 38 + 98 + 158 + 90 = 394

(2) 考慮兩人投擲點數的過程：

假設出現 1 點和 2 點則沿水平方向走 1 個單位，出現 5 點或 6 點得分則沿鉛直方向走 1 個單位，若出現 3 點或 4 點則走 1 方格對角線，如圖二：



(圖二)所有的方法數共 64 + 832 + 5376 + 22272 + 58944 + 41280 = 128768

因每一單位均有兩種點數發生，故均乘以 2 之後加總，為下一狀態發生之所有方法數。

【解答評析】

此題解答使用之計數方法為加法原理，計數時須想辦法做適當的分類，或找到一個適合的模型來協助計算，本題的來源由討論 Schröder Number 的問題改寫，此問題亦為組合數學中著名之卡特蘭數(Catalan Number)之延伸，有興趣的同學可找尋相關的資料研讀、思考。本題因題目未將欲計算之過程敘述說明完整，故出現兩種答案，此兩種答案均給予分數。

問題編號 9105

將 6 顆黑球、4 顆紅球和 n 顆白球排成一列，並使同色球互不相鄰，求：

(1) 使條件「同色球互不相鄰」能夠實現的 n 之範圍。

(2) 若同色球視為相同物，則當 $n=5$ 時共有幾種排列方式？

簡答：(1) $1 \le n \le 11$　　(2) 4315 種

參考解答：

(1) 欲使 n 最小，則黑球要盡量被紅球隔開，但隔開 6 顆黑球至少需要 5 顆其他顏色的球，故除了 4 顆紅球之外，至少需要 1 顆白球。又 6 顆黑球和 4 顆紅球最多可分隔 $6+4+1=11$ 顆白球。由此可知：$1 \le n \le 11$。

(2) 以●表示黑球、○表示白球、◎表示紅球。先考慮在尚未排入紅球時，黑球與白球間的排列情形。我們將連續的同色球視為同一「段」，例如：

在排列(*)：●○○●○●●●○○●中，
黑球被分成 4 段，依序包含 1、1、3、1 顆黑球；
白球被分成 3 段，依序包含 2、1、2 顆白球

在排列(**)：●●○○○●●○●○●中，
黑球被分成 4 段，依序包含 2、2、1、1 顆黑球；
白球被分成 3 段，依序包含 3、1、1 顆白球

在排列(***)：●●○○○●●●○●○中，
黑球被分成 3 段，依序包含 2、3、1 顆黑球；
白球被分成 3 段，依序包含 3、1、1 顆白球

由以上的排列中我們可以發現幾個重點

① 僅考慮黑球與白球的排列時，同色球可能相鄰。但在同色球相鄰發生的位置，爾後需要插入一顆紅球將之分隔開來。
② 僅考慮黑球與白球的排列時，黑球與白球的段數若不相等，則必相差 1。
③ 用來分隔相鄰黑球與相鄰白球的紅球數，與每段黑、白球的球數分配無關，只與其段數有關。即若黑球被白球分割為 a 段、白球被黑球分割為 b 段，則需利用 $(6-a)+(5-b)$ 顆紅球將相鄰的黑球與相鄰的白球隔開，故 $(6-a)+(5-b)\le 4$，同時這幾顆紅球的位置亦被黑、白球的排列所決定。
④ 6 顆黑球與 5 顆白球共可產生 12 個間隔（包含頭尾），除了同色球相鄰的位置必須插入一顆紅球外，剩餘的紅球可以隨意分佈在其餘的間隔內，但一個間隔僅容許排入一紅球。

由以上原則我們可以列舉出可能的黑、白球段數組合、並計算用來分隔相鄰黑、白球的紅球數（固定位置），再依此選取剩餘紅球的位置：

●段數	6	5		4			3
○段數	5	4	5	3	4	5	4
固定◎數	0	2	1	4	3	2	4

至此，我們面對的最大難題是：如何將若干顆同色球切分成指定的段數（每段至少包含 1 顆球），同時還要考慮不同段之間球數的排列？

我們可以嘗試將 5 顆白球切分成 3 段：由於每段中必須至少包含 1 球，因此我們先分配給每段 1 顆球，再考慮剩餘 2 球的切分方式。有句成語「一刀兩段」，同理，要將 2 顆球切分成 3 段（因為已先分配給每段 1 顆球，因此剩餘的這 2 顆球在切分時不再有「每段至少 1 顆球」的限制）需要 2 個隔板的協助，切分方式如下圖所示：

○○｜｜　｜○○｜　｜｜○○　○｜○｜　｜○｜○　○｜｜○

由圖可知：這剩餘 2 顆白球的切分方式共有 6 種（每段各加入 1 球即是原本 5 顆白球的分段方式），取決於白球與隔板之間的排列方式。我們將這 2 顆白球任意切分成 3 段的方

法數記作 H_2^3 ，顯然 $H_2^3=C_2^{(3-1)+2}=C_2^4=6$ 。

由以上討論可推得，要將 n 顆同色球切分成 m 段（$m\le n$）（每段至少包含 1 顆球）的方法數為： $H_{n-m}^{m}=C_{n-m}^{(m-1)+(n-m)}=C_{n-m}^{n-1}=\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}$

故所有的排列共有：

$C_4^{12}+H_1^5\cdot(H_1^4\cdot C_2^{10}+C_1^2\cdot C_3^{11})+H_2^4\cdot(H_2^3+C_1^2\cdot H_1^4\cdot C_1^9+C_2^{10})+H_3^3\cdot H_1^4=495+2550+1230+40=4315$ 種。

【解答評析】

錯誤觀念解析：第二小題共有 7 位同學作答，其中有 3 位同學使用方法 D，其餘方法各有 1 位同學提出。這些同學雖或多或少有些想法，但在思考上皆有疏漏或錯誤之處，茲分析如下：

A. $\dfrac{15!}{6!4!5!}$ ：此為 15 顆球任意排放的方式總數，完全沒有考慮到題目的限制。

B. $C_6^{15}\times C_4^9$ ：先任選黑球位置、再任意排放白球。雖有選取的動作，但在選取時並沒有任何特殊限制，實際上和 A 的作法是相同的。

C. C_4^{12} ：使黑球、白球相間●○●○●○●○●○●，僅考慮紅球置放的位置。此法雖可保障同色球皆不相鄰，但未考慮到 2 黑球未必是被白色球分隔開的，2 白球亦未必是被黑色球分隔開的，例如：●○◎○●◎●○◎○●◎●○●，故疏漏甚多。

D. 3×2^{14} ：第一個位置有 3 種球可以選擇，爾後每個位置不能跟前面同色，故皆剩下相對應的 2 種顏色的球可以選，利用乘法原理得到 3×2^{14} 種排列。此法可保障同色球皆不相鄰，但在每個位置選球時，沒有考慮到球數的控管，會有球數超過題目設定的情形發生，例如：◎●◎●◎●◎●◎●○◎○◎●，相對於 C 過猶不及。

$\dfrac{15!}{6!4!5!}-(\dfrac{14!}{5!4!5!}+\dfrac{14!}{6!3!5!}+\dfrac{14!}{6!4!4!})+(\dfrac{13!}{5!3!5!}+\dfrac{13!}{6!3!4!}+\dfrac{13!}{5!4!4!})-\dfrac{12!}{5!3!4!}$ ：

利用排容原理

(全)－(●相鄰＋◎相鄰＋○相鄰)＋(●相鄰且◎相鄰＋……

雖然此觀念是正確的，但在計數方法上欠缺考慮。以●相鄰的排列數 $=\dfrac{14!}{5!4!5!}$ 來說，先將 2 顆黑球綁在一起視為 1 球，確保有黑球相鄰，再將這 14 顆球任意排列，實際上其中有許多排列是重複計算的。例如：

●●●○●◎○◎○◎○●◎●○、●●●○●◎○◎○◎○●◎●○

雖然一開始被綁在一起的二顆球在二種排列中的位置是不同的，但實際上卻是無法區分的！當然，在上列算式中的每一項都有這樣的問題發生，不可不慎！