

臺灣與美國國小數學教科書中 形成體積公式教材之內容分析

石鳳茹

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

壹、前言

孩童的生活經驗與物體的體積概念息息相關，體積概念應包含物體所包含的內部空間的內體積，和物體所占外在空間或在液體中排開的空間的外體積等兩個部分(黃湘武，1985)。體積概念的學習需兼具測量與空間轉換能力的發展，由建立孩童的保留概念、透過單位量點數、單位量轉換，形成體積的公式，並藉由估測來培養量感，但國內體積教學卻偏重公式的熟悉與應用(譚寧君，1977)，造成孩童常嘗試以公式求出體積，卻無法真正理解公式(何健誼，2002；沈佑霖，2003；譚寧君，1977；Vasilyeva et al.,2013)。

由於國內外的研究皆發現教科書是教師教學時的主要依據，可說是學生學習的主要資源(徐偉民，2013；藍順德，2002；Nicol & Crespo,2006；Stein, Remillard, & Smith, 2007)，因此有必要探討教科書的內容。而美國全國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics[NCTM])自1989年起陸續頒布的各项數學課程標準，對全世界的數學教育課程造成重大的影響(Van de Walle, 2004/張英傑、周菊美譯，2005)，因此研究者選擇美國的數學教

科書作為與臺灣教科書體積公式引入方式的比較對象。希望藉由了解教科書以何種情境、何種方式或操作物來形成體積公式的概念，提供教師在教學上的參考。

貳、研究方法與對象

本研究採用內容分析法，針對國小數學教科書體積教材內容中，以何種方法、操作物或情境來引入體積公式，進行分析比較。研究對象採立意取樣，選擇臺灣南一書局出版的103學年度數學教科書(簡稱南一版)，與美國Mc Graw Hill在2012年出版的Everyday Mathematics系列(簡稱EM版)數學教科書為分析對象。輔以參考教師手冊或指引中的教學活動流程說明、活動規劃後，南一版的研究範圍為學生上課使用的課本，EM版則包含呈現主要教學活動內容與例題的《Math Masters Grade1~6》，與學生課堂練習的《Student Math Journal Grade1~6》。

一、臺灣南一版

自1994年政府開放教科書民間審定版後，南一出版社將經營重心投注在中小學教科書出版發行工作，其教材理念在培養學生

學習數學的興趣和自行建立數學概念的能力(南一書局企業股份有限公司，2014)。

二、美國 EM 版

EM 版教材源自美國芝加哥大學學校數學計畫(The University of Chicago School Mathematics Project, 簡稱 UCSMP)。此計畫開始於 1983 年,藉由檢驗其他國家的課程來獲得觀點與方法,進一步編寫專屬的教科書及對小學、中學提供訓練計畫,並進行廣泛的評估,目的在提升幼稚園到十二年級的數學教育內容的層次,提高學生的學習表現(<http://ucsmc.uchicago.edu>)。中的 Math Masters Grade1-6、Student Math Journal Grade1-6。

參、研究結果

本研究先探討兩版本體積公式引入的年段,並了解教材所包含體積公式的種類有何異同,再深入闡釋兩版本所引入的情境、操作物為何,有何異同。

一、體積公式的種類與出現時機

南一版與 EM 版教科書分別在五年級和四年級引入體積公式,南一版先介紹長方體體積公式,EM 版雖然用「矩形柱體(rectangular prism)」一詞開始引入,但所處理的物體性質與長方體是相同的,由表 1 可以發現 EM 版體積公式的教材實施時間比南一版早一年。

表 1、兩版本體積公式出現的時間與種類

版本 年級	南一版	EM 版
四年級	無	矩形柱體(rectangular prism) 體積： $V = B \times h$ (B 為底面積、h 為底面的高)
五年級	長方體體積=長×寬×高 正方體體積=邊長×邊長×邊長	矩形柱體體積： $V = l \times w \times h$ 柱體(prism)的體積： $V = B \times h$ 圓柱(cylinder) 的體積： $V = B \times h$ 圓錐(pyramid)和角錐(Cone)的體積： $V = \frac{1}{3} \times B \times h$
六年級	長方體體積=底面積×高 底面為平行四邊形的四角柱 體積=底面積×高 三角柱體積=底面積×高 圓柱體積=底面積×高 柱體體積=底面積×高	圓柱體積 $V = B \times h = \pi \times r^2 \times h$ 球體(sphere)體積 $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

備註：兩版本中的柱體皆是指簡單直柱體，圓柱為直圓柱，圓錐為直圓錐，角錐亦為直角錐。

其中南一版包含的體積公式依出現順序分別有長方體、正方體、底面為平行四邊形的四角柱、三角柱、圓柱，EM 版則包含矩形柱體、柱體(prism)、圓柱(cylinder)、圓錐(pyramid)、角錐(Cone)及球體(sphere)。南一版依照柱體底部的形狀，說明平行四邊形的四角柱和三角柱的體積公式，但因課綱(教育部，2003、2008)沒有理解圓錐、角錐體積公式的課程標準，所以南一版教材並沒有編排相關的體積教材。相較於南一版詳細引入特定簡單柱體的公式，EM 版則缺少了正方體體積的介紹。

二、體積公式的引入方式

(一)南一版

南一版首先鋪排出長所需的 1 立

方公分白色積木，再以「整排」的概念排出寬的積木，最後疊成高度，來對應目標紙盒外面長、寬、高的三個維度(圖 1)。並以一個乘法算式記錄後，說明乘法算式所得到的是白色積木的「個數」，而 1 個白色積木的體積是 1 立方公分，因此體積就是「個數」立方公分。再將長、寬、高的白色積木數對應其長度(幾公分)，藉以說明長方體體積公式即為「長 \times 寬 \times 高」。並以類似的圖例及方式來說明正方體的體積公式為「邊長 \times 邊長 \times 邊長」。

六年級時，則藉由堆疊已知長和寬的長方形紙片，產生 1 公分、2 公分厚度時，以乘法記錄體積的算式，說明「體積是長 \times 寬 \times 高也就是底面積 \times 高」。

1 用邊長 1 公分的白色正方體積木堆疊成和右邊長方體一樣大的形體，算算看，這個形體的體積是幾立方公分？

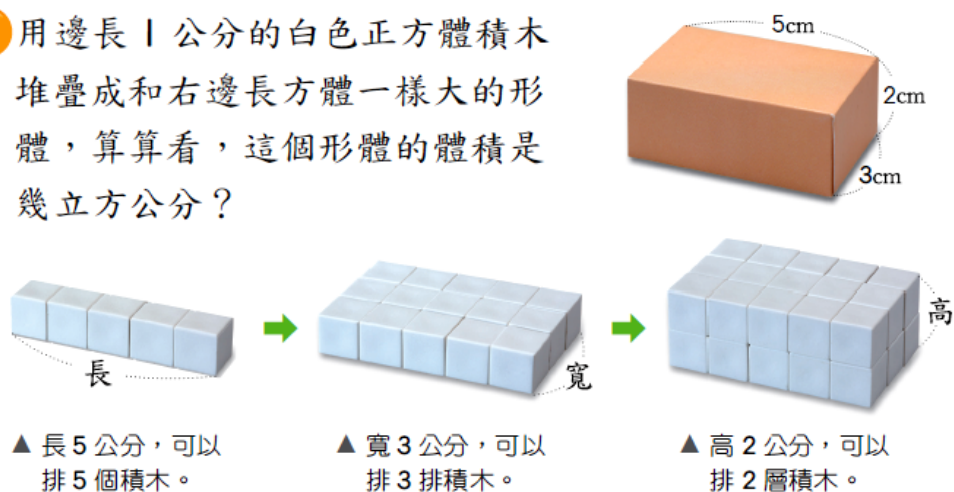


圖 1 南一版形成長方體體積公式的題目及圖例。資料來源：南一版課本五年級下冊，頁 38。

再將底面為平行四邊形的四角柱進行切割、重組後，察覺新組成的形體為長方體(圖 2)，因此宣告底面為平行四邊形的四角柱體積求法亦為：底面積 \times 高。接著將兩個三角柱拼成底面為平行四邊形的四角柱，察覺該四角柱的底面積是三角柱的兩倍、體積也是兩倍，以乘法算式列出體積求法後，宣告三角柱體積為底面積 \times 高。同樣運用切割的方法，將圓柱切成 8 等分、16 等分、32 等分，觀察重組後的新形體接近長方體，說明該長方體的底面積相當於圓柱的底面積，引入圓面積公式並用乘法記錄算式，並宣告圓柱體積=底面積 \times 高。最後歸納以上五種柱體的體積公式皆為底面積 \times 高。

(二)EM 版

EM 版所引入的第一個體積公式是矩形柱體體積公式： $V = B \times h$ ，需觀察結合視圖與透視圖的圖片(圖

3)，利用圖片中盒子裡所堆疊的立方體，配合表格分別記錄覆蓋盒子底面需要多少個立方體、盒子中所疊出最高的立方體為多少個，並計算出填滿盒子所需的立方體數量，再配合標明底部與高兩個維度的透視圖(圖 4)歸納出矩形柱體的體積公式為 $V = B \times h$ ，並說明 B 是底部的面積、 h 是由底部而來的高，以及體積單位是立方單位(cubic unit)。

五年級時將平行四邊形柱體和三角柱的模型，經切割和重組的操作程序後，察覺兩種柱體都可以構成矩形柱體，歸納出體積公式 $V = B \times h$ 可應用於任何柱體。而圓柱體積公式則延續柱體所通用的公式 $V = B \times h$ ，並告知圓面積公式 $A = \pi \times r^2$ ，解釋相關代號的意義後，直接藉由實際測量生活環境中圓筒物品(如廢紙簍)的高度、底部的直徑與半徑，以公式計算出體積。

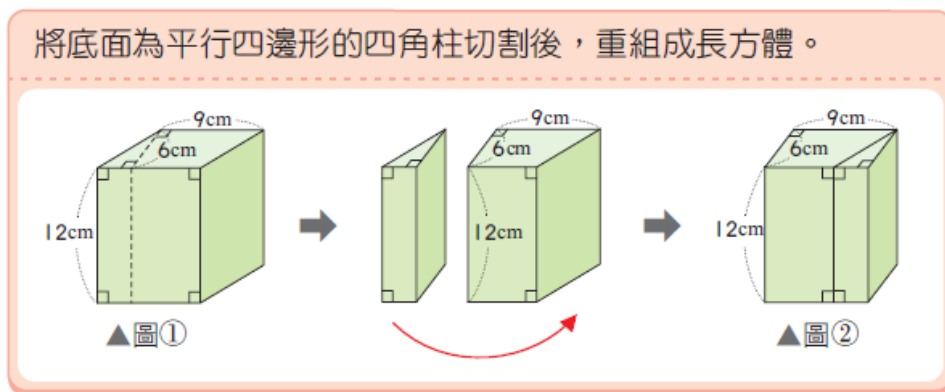


圖 2 以切割重組方式將底面為平行四邊形的四角柱重組成長方體的圖例。
資料來源：南一版課本六年級下冊，頁 7。

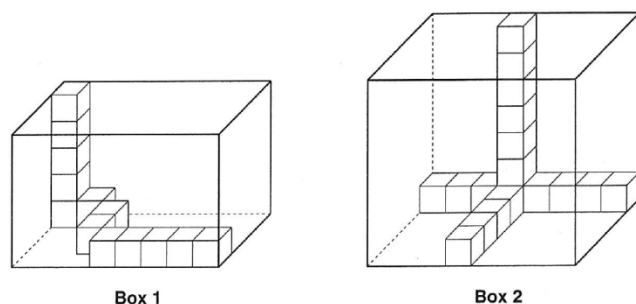


圖 3 EM 版形成矩形柱體體積公式的圖例一。

資料來源：Everyday Mathematics: Student Math Journal Grade 4, vol.2, p.300。

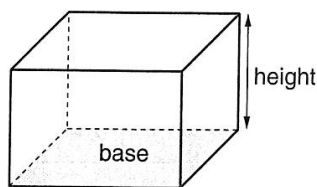


圖 4 EM 版形成矩形柱體體積公式的圖例二

資料來源：Everyday Mathematics: Student Math Journal Grade 4, vol.2, p.301。

至於角柱和角錐體積公式，則是運用 Math Master 所附的角柱和角錐的模板，黏成等底同高、底部開口的模型，藉由實際盛裝相同物質，比較兩者所盛裝的量，發現角錐的盛裝量為角柱的 $\frac{1}{3}$ ，再與柱體公式 $V = B \times h$ 結合，形成角錐體積公式 $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ 。圓錐也是以同樣的操作方式，察覺圓錐中所盛裝的量為同底等高圓柱的 $\frac{1}{3}$ ，因此形成圓錐體積公式為 $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ 。

(三) 兩版本形成體積公式教材之異同

南一版與 EM 版都先介紹長方體的體積公式，但南一版是透過擺放單位立方體的實體照片，說明長、寬、

高三個維度立方體與長度的關係，再將長方體體積公式先定義為「長×寬×高」，然後介紹其它種類的柱體(如底面為平行四邊形的柱體、三角柱等)的體積公式後，最後歸納柱體公式為「底面積×高」。但視圖上所標明的相關維度，並不是柱體的底面積，學生必須運用空間能力，了解底面和上方的面具有相同的長、寬，對應出底面積的長、寬為何，以進行體積公式的計算。

而 EM 版則是將單位立方體如何排列的視圖，結合盒子的透視圖，要求學生找出底面及底面的高各有多少個單位立方體，以形成長方體體積公式「底面積×高」，要能理解填滿盒子各維度的單位立方體數量，學生也

必須具備良好的空間協調能力，才能避免漏數了被隱藏的立方體。形成矩形柱體的體積公式概念後，進一步透過保留概念的運用理解其它柱體(平行四邊形柱體、三角柱、)的體積公式是一樣的，再連結矩形面積公式，將底面積(B)轉換成長(l) ×寬(w)，以獲得另一種形式的柱體體積公式。

此外，EM 教材中還安排同一個矩形柱體，因擺放的方向不同，底面及其高度不同，請學生寫下對底面及高的定義(圖 5)，提供學生進行空間概念的思考，去了解同一個柱體，會因空間旋轉，所謂的底面和高度就會不同，而這樣與空間思考相連結的教材是南一版中所沒有的，也是臺灣課綱能力指標中所缺少的(張英傑，2004)。

EM 版中所介紹的體積公式較南一版多，其中角錐和圓錐，甚至是球體公式，皆因臺灣的課程綱要中並無相關標準，因此沒有在南一版教科書中呈現，無法對此進行比較，但 EM 版運用實際操作的方式，藉由測量同底等高的柱體、錐體模型所能盛裝的

物體量，來連結抽象的符號公式，如：

$$\text{角錐體積 } V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

應是有助於學生理解相關公式的。

肆、結論與建議

兩版本的教科書對形成體積公式的引入方式具有明顯的差異，臺灣南一版採用長、寬、高等三個維度，美國 EM 版則選擇以底面積、高等兩個維度來形成體積公式。不論是以哪一個體積公式為教學目標，要形成體積公式的概念，都需要運用空間能力，才能看懂教科書中所呈現的二維表徵的圖片。Vasilyeva et al. (2013)指出 3D 物體若以具有網格的方式來呈現，因網格能協助提供各維度有多少個別單位的訊息，是有利於孩童於心理上建構 3D 物體，而無網格的呈現方式，相對於有網格的題目，孩童在判斷物體體積的準確度是非常低的。因此，在形成抽象的體積公式時，教科書中若能多提供有網格的表徵圖片，應有助於孩童將各維度的立方體個數與長度的數字加以連結、轉換，以達到真正理解體積公式的教學目標。

Below are three different views of the same rectangular prism.

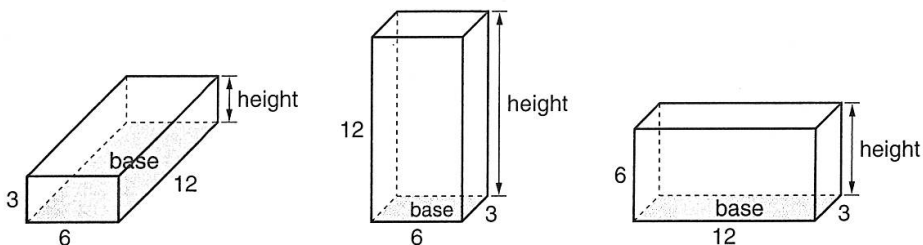


圖 5 EM 版中同一物體不同方向呈現的差異

資料來源：Everyday Mathematics: Student Math Journal Grade5, vol.2, p.321。

參考文獻

- 何建誼 (2002)。直觀法則對 K—6 年級學童在體積概念學習上的影響。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。
- 沈佑霖 (2003)。國小六年級學童體積概念之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。
- 南一書局企業股份有限公司 (2014)。國民小學數學五下備課指引資料篇。臺南：作者。
- 徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊，21(1)，25-48。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學領域。臺北市：作者。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學領域。臺北市：作者。
- 張英傑 (2004)。九年一貫數學能力指標的詮釋—圖形與空間 (國小幾何)。行政院國家科學委員會專題研究成果報告。計畫編號：NSC92-2522-S-152-005。臺北市：行政院國家科學委員會科學教育發展處。
- Van de Walle, J. A. (2005)。中小學數學科教材教法 (*Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally*)；張英傑、周菊美 (譯)。臺北市：五南圖書出版股份有限公司。(原作出版於 2004 年)
- 黃湘武 (1985)。國中學生質量守恆，重量守恆，外體積觀念，與比例推理能力之抽樣調查與研究。中等教育，1，44-65。
- 藍順德 (2002)。教科書審定制度運作之問題檢討與改進建議。課程與教學季刊，6(1)，13-26。
- 譚寧君 (1997)。面積與體積的教材分析。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會 (主編)，國民小學數學科新課程概說 (中年級)~協助兒童認知發展的數學課程 (175-192 頁)。臺北縣。
- Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 331-355.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.
- Vasilyeva, M., Ganley, C. M., Casey, B. M., Dulaney, A., Tillinger, M., & Anderson, M. (2013). How children determine the size of 3D structures: Investigating factors influencing strategy choice. *Cognition and Instruction*, 31(1), 29-61.