中學生通訊解題第九十期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
9001

設 $f(x)=ax^2+bx+c, a>0, b>0, c>0, a+b+c=1$ ，試證：

若 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n>0, x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_n=1$ ，則 $\min f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)=1$ 。

參考解答：

因為 $f(1)=a+b+c=1,$

若取 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1 \Rightarrow f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)=1$ 是存在的---存在性。

現在想要證明 1 就是最小值，$\because x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_n=1$ ，不妨假設 $x_1>1, x_2<1$ 代回

$$f(x_1)f(x_2)=(ax_1^{\,2}+bx_1+c)(ax_2^{\,2}+bx_2+c)$$
$$=a^2x_1^2x_2^2+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^2x_2+x_1x_2^2)+ac(x_1^2+x_2^2)+bc(x_1+x_2)$$

又 $f(1)f(x_1x_2)=(a+b+c)(ax_1^{\,2}x_2^{\,2}+bx_1x_2+c)$

$$=a^2x_1^{\,2}x_2^{\,2}+b^2x_1x_2+c^2+ab(x_1^{\,2}x_2^{\,2}+x_1x_2)+ac(x_1^{\,2}x_2^{\,2}+1)+ax_1^{\,2}x_2^{\,2}+bc(x_1x_2+1)$$

$$f(x_1)f(x_2)-f(1)f(x_1x_2)=abx_1x_2(x_1+x_2-x_1x_2-1)+ac(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}-x_1^{\,2}x_2^{\,2}-1)+bc(x_1+x_2-x_1x_2-1)$$
$$=-abx_1x_2(x_1-1)(x_2-1)-ac(x_1^{\,2}-1)(x_2^{\,2}-1)-bc(x_1-1)(x_2-1)>0$$

$\therefore f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)\ge f(1)f(x_1x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)$

如此反覆進行，可得 $\therefore f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)\ge f(1)f(1)f(1)\cdots f(1)=1$

所以所求之最小值就是 1。

【解題評註】本題解題重點在找到最小值並証明它是最小的。

問題編號
9002

求所有的整數 x ，使得 $6x^2-7x-5$ 的值是某個質數的平方。

簡答：$x=6$

參考解答：

設 $6x^2-7x-5=p^2, p$ 是質數，則 $p^2=(2x+1)(3x-5)=ab$，其中 $a=2x+1, b=3x-5, a,b\in Z$，且 $3a-2b=13$。因為 $a\in Z$，且 $p^2\mid ab$，所以只有以下情形：

(1) $a=p^2, b=1$，則 $3p^2-2=13$，無解。

(2) $a=p, b=p$，則 $3p-2p=13$，即 $p=13$，因此 $x=\dfrac{a-1}{2}=6$。

(3) $a=1, b=p^2$，則 $3-2p^2=13$，無解。

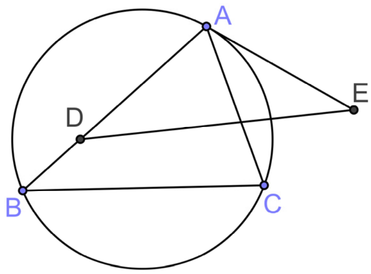
(4) $a=-p^2, b=-1$，則 $-3p^2+2=13$，無解。

(5) $a=-p, b=-p$，則 $-3p+2p=13$，即 $p=-13$，因此 $x=6$。

(6) $a=-1, b=-p^2$，則 $-3+2p^2=13$，無解。

於是，所求為 $x=6$。

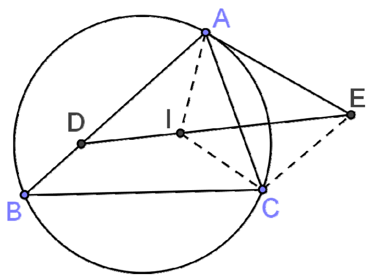
問題編號
9003



如圖 ΔABC 中 $\overline{AB}>\overline{AC}$，$\overline{AE}$是其外接圓的切線，$D$ 為 $\overline{AB}$ 上的點，且 $\overline{AD}=\overline{AC}=\overline{AE}$。求證：直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 過 ΔABC 的內心。

參考解答：

設 $\angle BCA$ 的內角平分線與 $\overline{DE}$ 交於點 I，連結 $\overline{AI}$、$\overline{IC}$、$\overline{CE}$，由於 $\overline{AE}$是 ΔABC 外接圓的切線，故 $\angle CAE=\angle CBA$，又 $\overline{AD}=\overline{AE}$，故



$\angle ACB=180^0-\angle DAC-\angle CBA=180^0-\angle DAC-\angle CAE$

$=180^0-\angle DAE=\angle ADE+\angle AED=2\angle AED$

故 $\angle ACI=\dfrac{1}{2}\angle ACB=\angle AED$

所以 A、E、I、C 四點共圓 $\angle IAC=\angle IEC=\angle AEC-\angle AED$

$$=\frac{180^0-\angle CAE}{2}-\frac{180^0-\angle DAE}{2}=\frac{1}{2}（\angle DAE-\angle CAE）=\frac{1}{2}\angle BAC，$$

故 $\overline{AI}$ 為 $\angle BAC$ 的平分線，I 為 ΔABC 的內心。所以，直線 $\overleftrightarrow{DE}$ 過 ΔABC 的內心。

【解題評註】

此題利用的幾何性質有：

＊ 弦切角＝對同弧的圓周角

＊ 等腰 ⇔ 等底角

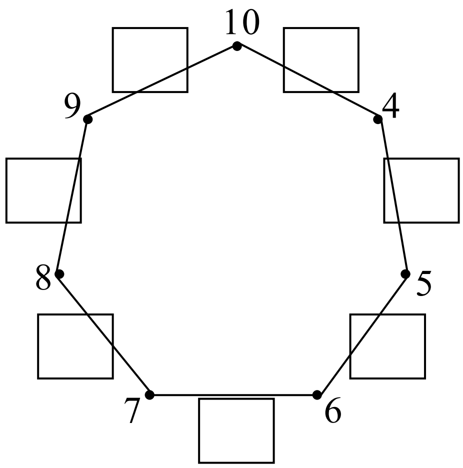
＊ 四點共圓的充要條件為對同弧的圓周角相等。

問題編號

9004

程式設計師想設計一款益智遊戲，規則如下：電腦在正 n 邊形的每個頂點上隨機放一個介於 0～10 的數字，然後玩家可任意用滑鼠點選正 n 邊形的邊，當他每點選正 n 邊形的邊一次時，點選的邊其兩端點數字都增加 1，直到每個頂點的數字均相等就可過關（可不只一次點選同一邊，遊戲開始後，頂點數字可以超過 10）。

(1) 七邊形上，電腦依序在頂點放了 10、9、8、7、6、5、4（如右圖），請在每個邊上標示點選次數，使得玩家可用最少的點選次數過關。
然而遊戲的設計不可能無止盡地讓玩家測試，所以程式設計師會限制讓每個邊最多只能用滑鼠點 k 次（稱之為「點選上限」），任何一邊點選超過 k 次，玩家就算失敗。



(2) 七邊形上，若電腦任意改變頂點上 0～10 的數字，而玩家均可以順利過關，試求「點選上限」的最小值 $k_{\min}$。

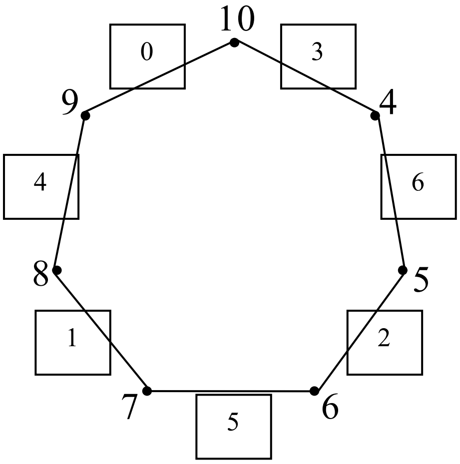
（注意：本題須完成兩部分，①證明無論電腦如何改變頂點數字，玩家過關時各邊所需點選的次數均不大於 $k_{\min}$；②請寫出某種排列順序及各邊點選次數，使玩家點選某一邊的次數確實必須達到 $k_{\min}$）

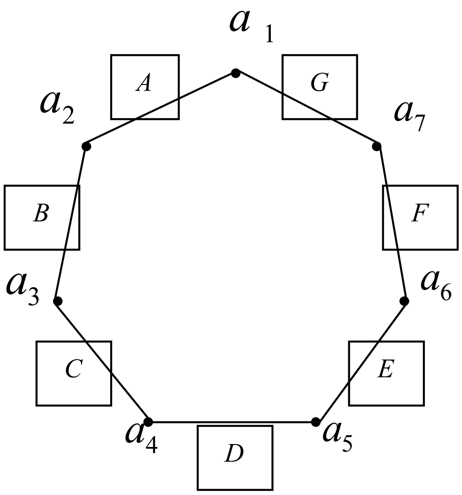
(3) 99 邊形上，若電腦任意改變頂點上 0～10 的數字，而玩家均可以順利過關，試求「點選上限」的最小值。

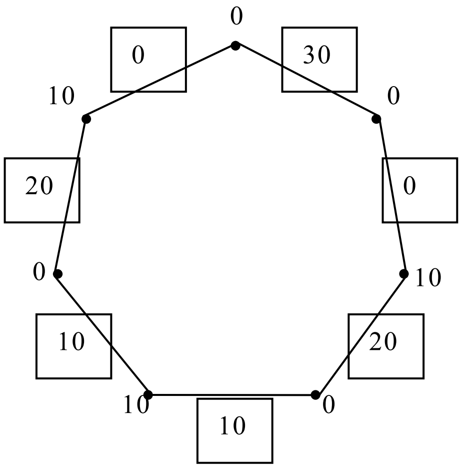
簡答：(1)略 (2) $k_{\min}=30$ (3) 490

參考解答：

(1)







(2) 七邊形上，電腦依序在頂點放 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7（如上左圖），玩家想讓每個頂點數字相等，他期待最後每個頂點數字變成 $\sum_{k=1}^{7} a_k$ ，先設定 $G=a_2+a_4+a_6$ 、 $A=a_3+a_5+a_7$ 、 $B=a_4+a_6+a_1$ 、 $C=a_5+a_7+a_2$ 、 $D=a_6+a_1+a_3$ 、 $E=a_7+a_2+a_4$ 、 $F=a_1+a_3+a_5$，再減去 A～G 中數字最小者，即可用最少的點選次數過關。因 $a_i \le 10$，所以 A～G 的數字均不大於 30，也就是說，每一邊最多點選 30 次即可過關。上右圖是某一邊須點選至 30 次的例子。因此 $k_{\min}=30$ 。

(3) 99 邊形上，電腦依序在頂點放 a_1 、 a_2 、…、 a_{99}，假設連接 a_i 與 a_{i+1} 的邊上數字是 b_i

（$b_{99}=b_0$），可設定 $b_i=a_{i+2}+a_{i+4}+\cdots+a_{i+98}$（若足標超過 99 則取 mod 99 的餘數），那麼 $b_{i-1}+a_i+b_i=\sum_{k=1}^{99}a_k$（其中 $1\le i\le 99$），因 $a_i\le 10$，所以 $b_i\le 10\times 49=490$，也就是說，每一邊最多點選 490 次即可過關。事實上，取 $a_{2i}=10$、$a_{2i-1}=0$（其中 $1\le i\le 99$），則某些邊必須點選到 490 次才能過關，因此「點選上限」的最小值是 490。

問題編號
9005

四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=5, \overline{AD}=3\sqrt{2}, \overline{CD}=4\sqrt{3}$，$\angle BAD=135^\circ$，$\angle ADC=105^\circ$，則其面積為何？

簡答：$\frac{63+6\sqrt{3}}{2}$

參考解答：

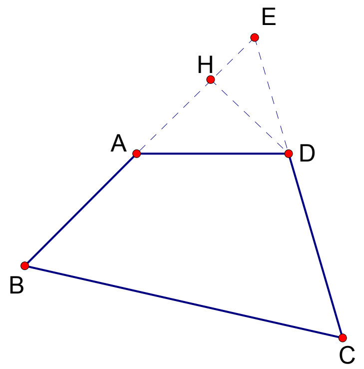
(1) 延長 $\overline{AB},\overline{CD}$ 交於 E，可得
$\angle EAD=45^\circ, \angle ADE=75^\circ, \angle AED=60^\circ$

(2) 過 D 作 ΔADE 的高 $\overline{DH}$，可得
$\overline{AH}=3, \overline{DH}=3, \overline{HE}=\sqrt{3}, \overline{DE}=2\sqrt{3}$，

(3) ΔBCE 中過 C 的高等於 $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CE}=9$，

所求的面積 = ΔBCE 的面積 − ΔADE 的面積

$=\frac{(8+\sqrt{3})\cdot 9}{2}-\frac{(3+\sqrt{3})\cdot 3}{2}=\frac{63+6\sqrt{3}}{2}$。



【解題評註】

這個題目的主要關鍵是”補”或”切割”，這次答題的人數相對上比較多，而更重要且令人開心的是答題的方式不一而足，有很多面向的解法，且各具巧思，頗具創造力。