# 「數學的三個世界」的運作模式及其對數學思考教學的啟示--(II)

陳冠州[1*] 劉致演[2] 尤詩憶[2] 秦爾聰[2]

[1]桃園市立建國國民小學

[2]國立彰化師範大學 科學教育研究所

【(續)科學教育月刊第 379 期第 30 頁之後】

## 參、相關實徵性研究探討及教學建議

### 一、相關實徵性研究

#### (一) 心智壓縮

以一元二次方程式的求解 $ax^2+bx+c=0$ 為例(Lima & Tall, 2006)，解 有相關的三種程序：因式分解方程式、配成完全平方式、或使用公式解(quadratic formula)。在研究中，他們要求 77 位學生「解釋$(x-2)(x-3)=0$ 的解是否為 $x=2$ 或 $x=3$？並請學生分析與說明答案」，結果學生的答案如表 4 所示，其中，只有 6 位學生給了滿意的答案。學生主要使用兩種方法來解題，一種是公式解，另一種則是利用代入數字接著用算術的計算方式來檢查答案的方法，公式解屬於一種例行性的程序運算，是一種逐步解題的程序；而後者只需要將方程式視為一種等式，利用給定的數字(在此例中即是 2 或 3)進行計算即可。若對應圖 1 來看，這兩種方法都只是對應到第二階段：程序的部分，也就是說這些學生僅僅停留在「單一程序、缺乏在特定脈絡下使用有效率的不同程序以及用符號思考數學的彈性」的階層而已，對於一元二次方程式的求解部分，尚未達到可用符號思考數學的能力。

*為本文通訊作者

表 4 學生的解法

| 人數 | 學生的解法 | |
|---|---|---|
| 3 | 利用代入 $x$ 的值之後做算術的運算 | 6：滿意的 |
| 22 | 嘗試將方程式解出來並與結果比較 | |
| | (3：得到正確的結果) | |
| | (14：把括號乘開，其中正確完成的有 6 位) | |
| | (5：嘗試使用公式解) | |
| 0 | 當兩數乘積為 0，那其中一數必定為 0 | |

將上述例證對照到圖 1(參閱第 379 期)的成果光譜，這樣的結果可以提供給老師在教學或是評量上的參考。在教學方面，根據圖 4(參閱第 379 期)學生的概念壓縮過程乃是由單一例行性解法，再進展到多元程序，因此，教師設計教材時，除了讓學生寫出他所認為的解法之外，更要進一步激發他去思考「是否還有其他的解法？比較看看，這些不同的解法中，哪些比較有效率？為什麼？」等等問題；甚至，在學生進入穩定多元程序之後，再隨著概念的變換，引導學生進行解法的選擇，訓練學生形成有彈性的解法，此時學生的解題應該已經進階到過程的階段，亦即隨著情境脈絡或是所使用的概念不同，學生可以彈性地選擇自己的解法，在此階段則可以問學生「在不同的情境下，解法要如何改變呢？你能不能找到規律或模式呢？能不能使用更簡便的記錄方式來表示這些規律或模式？或是有沒有更一般化的表示方法？」接下去的重點就在於促進學生的符號運算能力，待符號運算能力壓縮後便形成兼具有過程與概念的過程概念(procept)，此時過程概念即是所謂的可思考的概念，並且在論證思考的過程中逐漸產生數學力量(power)。在評量方面，這個架構亦可以當作評估的工具，透過測驗題目的設計與安排，收集學生的解法表現，將之分成「前-程序」、「程序」、「多元-程序」、「過程」、「過程概念」等五個類別，再分析這些不同的表現，以了解學生的解法，並做為教師教學的重要反思，以及下一階段補救教學活動的規劃依據。

## (二) 實體具象與數學符號間的關係

Watson、Spirou 和 Tall(2003)以第六學級(sixth form)之 23 位低年級(lower sixth)學生（年齡 16-17）及 20 位高年級(upper sixth)學生（年齡 17-18）針對向量運算進行研究，學生發想以手勢作為向量表徵作為課室論述的基礎，教師佈題則聚焦在如何透過表徵轉譯從位置 X 到位置 B，教師提供向量 2 與向量 4 平行向量 $\overline{xy}$ 、 $\overline{yc}$ 讓學生討論解法（如圖 7），主要幫助學生理解相等的向量皆有助於完成向量求和問題（如圖 8）：(1) $\overline{AB}+\overline{BC}$ ；(2) $\overline{BC}+\overline{AD}$ ；(3) $\overline{AB}+\overline{CA}$ 。

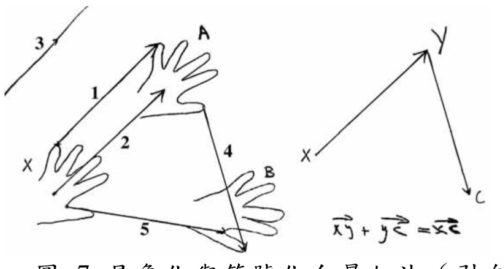

圖 7 具象化與符號化向量加法（引自 Watson, et al., 2003, p.20）

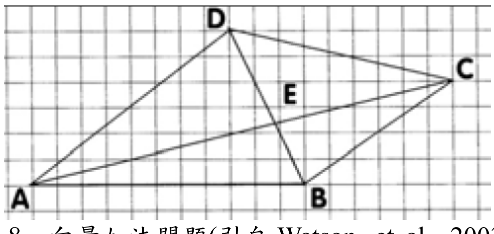

圖 8 向量加法問題(引自 Watson, et al., 2003, p.21)

所有的學生皆自圖 8 上參與作答，並被允許使用計算方格的基礎方式求解向量和。研究結果發現，所有學生皆能在不使用方格計算方式答對問題(1)，然而問題二的作答中，15 位高年級反思型學生僅有 8 人答對、11 位標準型學生中僅一人答對，低年級中，7 位具象型（使用具象表徵）學生中有 5 人答對，標準型學生中僅 3 人答對。進一步檢視學生答錯的原因，有部分學生將圖形看成是平行四邊形，因而將答案寫成 $\overline{AC}$ ，在某種意義上，他們使用了正確概念卻加以錯誤詮釋，另外，高年級學生中，15 位高年級反思型學生中有 7 人、11 位標準型學生中有 10 人，回答問題二答案是 $\overline{BD}$ ，這樣的結果建議向量加法中對於三角形定律的強調存在負面效果。問題(3)並不直觀，解決的辦法可透過方格計算、向量相等或交換律（ $\overline{AB}+\overline{CA}=\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{CB}$ ），這個題目只有兩位低年級學生寫出來，並且，這兩位低年級學生絲毫不費吹灰之力。高年級的標準型學生中 15 人中有 10 人答對，但全部是以計算方格的方式得到答案，相同地，低年級的標準型學生 13 位中 5 位的 3 位沿用相同的方法得到答案，很多學生的答案是 $\overline{BC}$ ，主要是因為他們錯誤地使用向量加法中的三角形法。從三題解法皆正確的學生人數統計結果(表 6)分析，高低年級僅各 1 人以計算方格的方式正確求解出三題的答案，高年級中 15 人中僅 7 人全部答對，相較於低年級的結果並沒有進步，反觀低年級具象型的學生 7 位中有 5 位全部答對，錯誤的原因是學生利用平行四邊形求解向量加法，但該圖形並非平行四邊形。另外，針對六位低年級學生（3 位具象型、3 位標準型）晤談結果發現，學生對於向量課程的理解存在迷思，如有兩位學生認為兩向量的終點相對可以互相抵銷，然而學生以具象的觀點進行理解，即沒有相

表 5　解法正確學生人數統計（括弧內為使用方格或座標計算向量）

| 高年級 | 反思(15 人) | 標準(11 人) | 低年級 | 具象(7 人) | 標準(13 人) |
|---|---|---|---|---|---|
| 問題(1) | 15(0) | 11(0) | 問題(1) | 7(0) | 13(0) |
| 問題(2) | 8(1) | 1(1) | 問題(2) | 5(3) | 3(3) |
| 問題(3) | 10(3) | 6(6) | 問題(3) | 6(4) | 5(3) |

表 6　三題解法皆正確的學生人數統計

| 高年級 | 反思 | 標準 | 低年級 | 具象 | 標準 |
|---|---|---|---|---|---|
| 三題都對 | 7 | 1 | 三題都對 | 5 | 1 |
| 其他 | 8 | 10 | 其他 | 2 | 12 |

同的問題，反而能流暢地以具象化形式自由平移及加總向量。根據這樣的結果，我們可以理解，具象取向確有助於學生的在初階課程裡達到彈性策略的使用與理解的目的。

**(三) 彈性思考與後設經驗(met-befores)**

McGowen 和 Tall (2013)為了解「負號」可能表徵運算的「減」，以及「物件」（數線上的負數）對於學生造成學習上的困難，針對兩個大學個案班級進行研究，其中一個班級共有 141 位學生，由兩位老師指導採改革取向的代數教學；另一個班級共有 121 位學生，由一位老師指導代數教學，採傳統取向的講述教學。研究設計$-5^2$、$(-5)^2$等表述式，讓兩班學生進行作答，表 7 為學生正確作答人數統計結果，結果顯示兩題作答皆正確的比率，前測部分改革取向教學班級為 25%、傳統教學取向班級則為 11%，在教師以繪圖用計算器及機械函數概念介入後，在後測表現改革取向教學班級提升至 69%，傳統教學取向班級則提升至 41%。在分析學生作答結果後發現有趣的現象，如前測時學生針對−52 的回答有−25、(−5)( −5)=25、−10、10、−3 及 $1/5^2$，針對$(-5)^2$的作答結果有(−5)( −5)=25、25、−25、5‧5=25、−10、$5^{-2}$、−3 及 1/10。推論此種題目對於學生所造成的困難可能來自−52 的問題形式激發學生不同的心智基模，如學生可能與 $5^{-2}$ 連結，因此得到 $1/5^2$ 的推論，或是學生未能正確使用指數率的概念，或是對於指數率的運算產生誤解，因此有 5‧(−2)=−10 的結果。此實徵性資料結果凸顯大學代數中，學生對於負號在不同情境中可能的轉變產生理解上的困難。此問題並非僅止於改善大學的數學教學，而是應從學生更早的學習階段中進行改善，並且所有階段的數學教師皆應理解數學想法如何以精緻化的方式發展，更應了解如何以洞見及自信為基礎組織學生的學習，甚者，對於學生長期數學思考發展而言，當學生面臨問題性的後設經驗時(problematic met-before)，應能協助學生在新的情境中揭露並重新思考可能存在的迷思概念。

表 7　$-n^2$、$(-n)^2$ 作答正確學生人數統計

| 研究 | 樣本數 | $-n^2$ | | $(-n)^2$ | | 兩題彙整 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 前測 | 後測 | 前測 | 後測 | 前測 | 後測 |
| 改革取向 | 121 | 35 | 85 | 94 | 115 | 30 | 84 |
| | | 29% | 70% | 78% | 95% | 25% | 69% |
| 傳統取向 | 140 | 35 | 73 | 36 | 98 | 15 | 58 |
| | | 25% | 52% | 26% | 70% | 11% | 41% |

## 二、教學建議

為幫助中小學教師理解如何透過教學引導學生在數學的三個世界中發展數學思考，在本文中引用青蛙跳問題(Mason et al., 2010, p.52)為例，進行說明。

### (一)佈題

該問題為有兩色棋子，黑色代表黑蛙、白色代表白蛙，每個棋子只能移入前面的一個空格或跳過另一個棋子到前一個空格，黑蛙只能由左向右移動；白蛙只能從右至左（不能後退），移動步數必需最少。任務：探索 2 白蛙對 2 黑蛙、3 白蛙對 3 黑蛙、4 白蛙對 4 黑蛙的步數規律，推論 $x$ 白蛙對 $x$ 黑蛙共需幾步？

### (二)具象化

教師於引導學生起始活動先行示範 1 黑蛙對 1 白蛙、2 黑蛙對 2 白蛙走法，然後讓學生操作 3 黑蛙對 3 白蛙、4 黑蛙對 4 白蛙或 5 黑蛙對 5 白蛙，讓學生能夠在透過記錄觀察規律前，在重複程序以及辨認中了解具象化的青蛙移動的規則，有助於程序的壓縮及可思考概念的形成。

### (三)符號化

在完成 1 白對 1 黑、2 白對 2 黑、3 白對 3 黑、4 白對 4 黑、5 白對 5 黑的操操作後，此時要求學生將不同青蛙隻數最少移動紀錄記錄下來，則會得到 1 白對 1 黑 3 步、2 白對 2 黑 8 步、3 白對 3 黑 15 步、4 白對 4 黑 24 步、5 白對 5 黑 35 步，此 3、8、15、24、35 等數字符號，對學生而言同時代表可操作的過程以及過程壓縮後的可思考概念，此時為具象化過渡到符號化的歷程。教師此時可提示學生，藉由 3、8、15、24、35 的數字樣式規律，推論 $x$ 隻白蛙對 $x$ 隻黑蛙的步數。一般情況下，學生可透過數字樣式的規律推論出 $x,(x+2)$的結論，

**青蛙跳**

如圖兩顏色的木樁置放於一直線上的11個洞裡，若欲將白色及黑色的木樁互相交換位置，但僅允許移動木樁時，向前移動至前面的空洞，或跳過前面的一個木樁進入該木樁前的空洞裡，請問最少的移動次數為何？

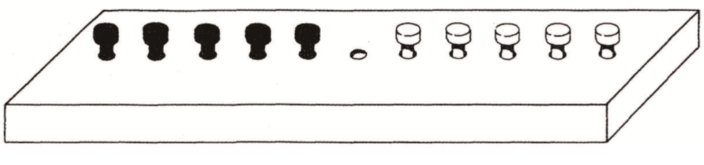

圖 9　青蛙跳問題（引自 Mason 等人，2010, p.52）

為幫助學生進一步完成論證，此時教師可要求學生針對操作過程加以記錄（如表 8），學生則可透過步驟紀錄的觀察加以抽象化，利用後設經驗中的先備知識如數字總和公式，計算一般化的結果 1+2+3+4+5+6+…+$x$−1+$x$+$x$+$x$+$x$−1+…+6+5+4+3+2+1，為 $\frac{(1+x)\cdot x}{2}\times 2+x=x^2+2x$。此一教學實例充分運用學生的先天生成(set−before)及後設經驗(met−before)的能力，將知識結構進行心智壓縮成可思考概念，在可思考概念（數字 3、8、15、24、35）間進行連結及建構知識結構（一般化結果 $x\cdot(x+2)$），在後續的發展中，教師可將題目特殊化成為 $x$ 隻白蛙對 $y$ 隻黑蛙的最少步數求解，則可看到學生利用前述的基礎展現更豐富的數學思考能力。

表 8　青蛙跳問題符號化與抽象化

| 白[$W$]黑[$B$] | 步驟紀錄（$W$ 表白蛙往前移動一步，$\underline{\mathrm{W}}$ 代表白蛙跳過前一個青蛙） | 抽象化 |
|---|---|---|
| 1 對 1 | $W\underline{B}W$ | 1+1+1 |
| 2 對 2 | $W\underline{B}B\underline{WW}B\underline{B}W$ | 1+2+2+2+1 |
| 3 對 3 | $W\underline{B}B\underline{WW}W\underline{BBB}W\underline{WW}B\underline{B}W$ | 1+2+3+3+3+2+1 |
| 4 對 4 | $W\underline{B}B\underline{WW}W\underline{BBB}B\underline{WWWWBBBB}W\underline{WW}B\underline{B}W$ | 1+2+3+4+4+4+3+2+1 |
| $x$ 對 $x$ | $W\underline{B}B\underline{WW}W\underline{BBB}\ldots\ldots W\underline{WW}B\underline{B}W$ | $\frac{(1+x)\cdot x}{2}\times 2+x=x^2+2x$ |

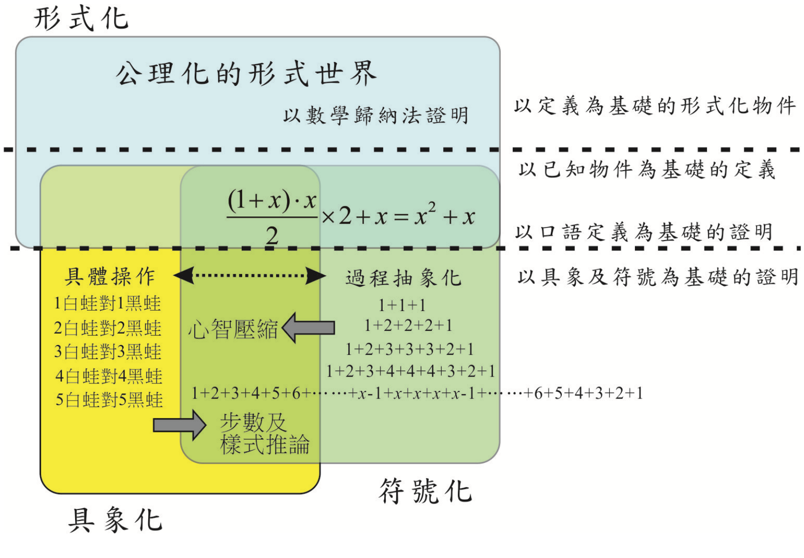


圖 10　數學三個世界中的青蛙跳問題

## 肆、結論

數學的三個世界乃是關於數學論證思考與發展的理論主張，也是了解學生數學思考歷程的重要基礎。就此，在九年一貫數學領域促進學生數學論證思考的目標上，具象化、符號化與形式化等階段的思考歷程對於活動規劃或教學實務有如下啟示。在促進思考的教學上，可先以引發知覺與行動結合的活動開始，不管是幾何活動或是代數的題材，均應讓學生透過實際的操作來感知形體或算術運算，這樣的經驗對學生而言相當重要，但以往在傳統的講述教學中卻常常被忽略，導致學生學習數學淪為記憶與背誦性質或算則，而不是一種數學物件在認知歷程上被有意義的理解，所以在活動規劃或教學實務上,「知覺與具象的體驗」實為具象化階段促成其認知單位不可或缺的重要經驗過程（Tall, 2004, 2007a, 2011, 2013）。此外，具象化階段的思考表現和學生本身的成熟度也會因著個人而有所差別。對國中小學生而言，具象化階段的思考泛指關於生活實際或心理層面具體的運思活動，只要是對學生有意義，此階段思考不一定是具體物件可操作的活動，在透過語言定義與分析後，即便是心智物件的運思，在不涉及符號運思下，學生的思考表現亦是屬於具象化階段的範疇。

在以具象化階段的認知單位為基礎下，第二階段的符號運思更重要的是透過教師引導與提問的方式，引入重要的媒介—「符號」來簡化與壓縮認知單位的程序與過程,以形成有功能的過程概念( Gray & Tall, 1994; Tall et al., 2000;Tall, 2007b, 2008, 2013）。在概念壓縮的過程中，也就是從具象化思考轉向符號化思考的歷程，教材的安排、教師的提問與引導均是重要的媒介要素，透過這些媒介的佈局與促成，引領學生順利地將思考層次提升至符號化的階段。以小學「學習連加概念後而形成乘法概念」的教學為例，在具象化思考的階段，學生透過操作具體花片或是古氏積木來覺知連續性加法的算則，而後，具象化思考提供學生將連續加法的單一程序，在教師引導與教材佈題，透過心智壓縮進而提升至多個程序的階段，最後進入多過程的階段，讓學生逐漸形成彈性且具效率的解題過程之後，引入乘法符號的意義與其所帶來的簡化與精緻化效果，來促進學生乘法過程概念的形成，並產生乘法符號的意義理解，這樣即進入符號化思考的階段。

而有關第三階段形式化思考及其應用，在中小學階段使用較少，主要也是因為這些年齡層的學生心智發展的成熟度和經驗仍顯不足，對於建置定義與公理系統之後，再透過這些定義公理去證明與延展出完整的數學形式世界，他們一時可能無法接受，因此中小學生較難具備形式化階段的思考。以 Tall 的觀點(Tall, 2004, 2007a, 2008, 2011, 2013)，在促進形式化階段的思考上，相關的活動規劃或教學實務應偏向歐氏證明方面，並採取實際操作、視覺動作證明或是圖形證明等方式來呈現，從具

體動作到視覺動作再到視覺圖形等證明呈現的歷程，如此應能呼應數學論證的認知發展歷程，雖說這部分教材內容須到國中三年級的數學課程才會出現，但就其他年級的中小學教師而言，了解 Tall 的數學三個世界的理論基礎，對於教師在教材活動的設計與教學實務的展現將有莫大的助益，不僅能使得教師教學更為貼近學生數學認知發展，亦可促進他們的數學理解與思考。

綜上所述，Tall 的數學的三個世界揭櫫了學習歷程中有關數學思考的重要歷程與關鍵要素，本文除了透過理論的介紹與例舉，用以闡釋其與中小學數學課程之間的關聯及應用，無非是希望從數學的三個世界的理論來探詢國中小數學課程與教學間如何進行連結的可能。此外，藉由這樣的連結與探討，目的在讓學生數學思考歷程得以被教師或教育工作者所了解並重視，進而將理論與實務融入學校的數學教學之中。如此，有關學生數學思考的培育應該不會只是淺層的技能與學習，取而代之的，將是趨向全面性及系統化數學思考能力的發展。

## 參考文獻


Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Help children think mathematically*. New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Davis, R. B. (1983). Complex mathematical cognition. In H. P. Ginsburg(Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 254–290). New York, NY: Academic Press.

Davis, Robert B. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach tomathematics education*. Norwood, NJ: Ablex.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht, the Netherland: Kluwer.

Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V., & Empson, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403–434.

Gary, E., Pitta, D., Pinto, M. & Tall, D.(1999). Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, *Educational Studiesin Mathematics*, *38* (1-3), 111-133.

Gray, E.& Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, 19 (2), 23–40.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*. *25*(2), 115-141.

Greeno, J. (1983). Conceptual entities. In D. Gentner and A. L. Stevens(Eds.), *Mental Models* (pp. 227–252). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986).Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert (Ed.) *Conceptual and procedural knowledge: The case for mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000).*Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Lima, R. N. & Tall, D. (2006). The concept of equation: what have students met before? In N. Jarmila, M. Hana, K. Magdalena, & S. Nad'a(Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 233-241. Prague, Czech Republic: PME

Mason, J., Burton L., & Stacey K (Second Edition) (2010). *Thinking mathematically*. Harlow, England: Pearson Education Limited.

McGowen, M. A., & Tall, D.(2010).Metaphor or Met-before?The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*, 169–179.

McGowen, M.A.,& Tall, D. (2013).Flexible thinking and met-befores: Impact on learning mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *32,* 527– 537.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*.Reston, VA: Author.

National Research Council (2001).*Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Nogueira de Lima, R., & Tall, D.(2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 3–18.

Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler(Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York, NY: Dover.

Piaget, J. (1972), *The principles of genetic epistemology*(W. Mays, Trans.) London, England: Routledge & Kegan Paul. (Original work published 1970)

Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections onprocesses and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães Históriae(Eds.), *Tecnologia no Ensino da Matemática* (Vol. 1, pp.1-28), Rio de Janeiro, Brasil.

Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29-33.

Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof.*Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives*, *11*, 195-215. de Strasbourg: IREM.

Tall, D. (2007a). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. Plenary at *10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.

Tall, D. (2007b). Teachers as mentors to encourage both power and simplicity in active mathematical learning. *Plenary at The Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing*, Abu Dhabi.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24

Tall, D. (2009). Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism. In Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., & de Villers, M. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, *2*, 220-225. Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, *31*(1), 1-8.

Tall, D. (2013).*How humans learn to think mathematically: Exploring the three world of mathematics.* New York, NY: Cambridge University Press.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A.(2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 1-19.

Thurston, W. P. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society*, *37*(7), 844–850.

Watson, A., Spirou, P., &Tall, D.(2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, *1*(2), 73-97. (完)