探討自橢圓焦點向橢圓射出一點，經無限次反射後的情形

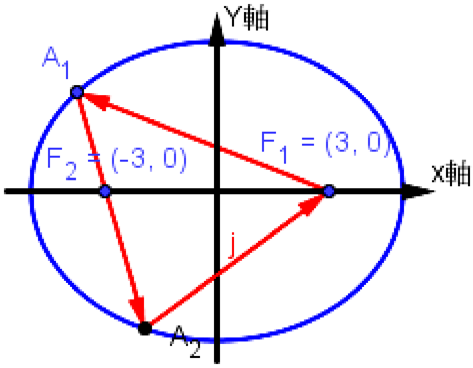
阮瑞泰

高雄市立新莊高級中學

壹、探討習題

高中教材中有一習題：

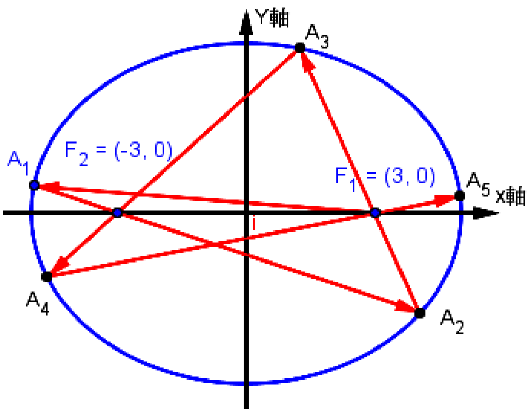
已知橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 中的兩焦點 $F_1(3,0),F_2(-3,0)$ ，由點 F_1 射出一光線至橢圓上一點 A_1 ，經反射後經過另一焦點 F_2 後至橢圓上另一點 A_2，再反射回到焦點 F_1，則所經路徑長度為何？



解： $\overline{A_1F_1}+\overline{A_1F_2}+\overline{A_2F_1}+\overline{A_2F_2}=4\times5=20$ 。（橢圓的光學性質）

如果經過無限次的反射,則這些反射點是否會趨近於某些點？

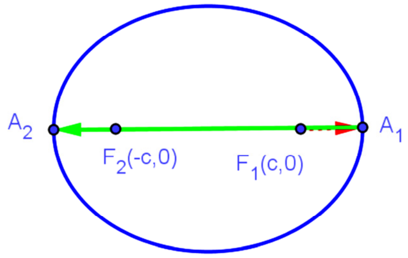
首先利用 GeoGebra 繪圖觀察：



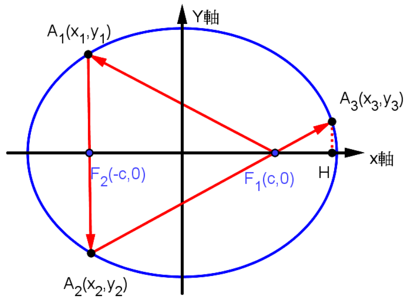
自橢圓的一焦點 F_1 射出一點至橢圓上一點 A_1，反射後通過另一焦點 F_2 後至橢圓上另一點 A_2，繼續反射得 A_3、A_4、$A_5\cdots$ 等反射點，發現有趨近於長軸上頂點的現象，我利用高中所習的橢圓焦弦長公式與遞迴關係，演算驗證此觀察現象。

首先將 A_1 的位置分成以下 3 類（1.長軸的端點，2.正焦弦的端點，3.其他橢圓上非長軸、非正焦弦端點的點）分別討論：（在不失一般性情形下，文中均採自橢圓的一焦點 F_1 射出一點至橢圓上一點 A_1）

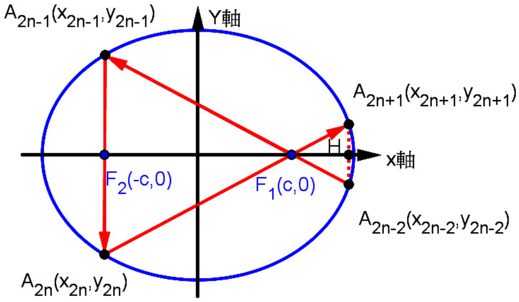
類 1 (如右圖)若自橢圓的一焦點 F_1 射出一點至橢圓長軸上一端點 A_1，反射後通過另一焦點 F_2，至橢圓長軸上另一點 A_2 續反射得 A_3、A_4、$A_5\cdots$ 等反射點，因為 A_1，A_2，F_1，F_2 等 4 點共線，所以 A_3、A_4、$A_5\cdots$ 等反射點均為長軸上端點。



類 2 (如右圖)若 F_1 射出一光線至橢圓上一點 A_1（正焦弦的端點），反射後經過另一焦點 F_2，至橢圓上另一點 A_2，再反射後過另一焦點 F_1，至橢圓上另一點 A_3，此時 A_3 一定非長軸、非正焦弦的端點。由 A_3 開始演算（利用類 3 來討論）

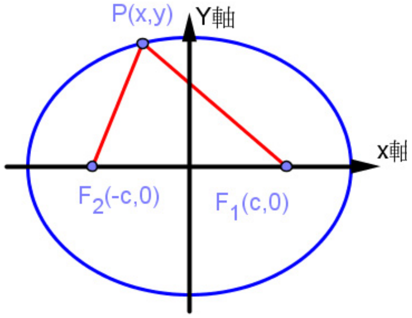


(如下圖)若多次反射後至 $A_{2n-2},A_{2n-1},A_{2n},A_{2n+1}\cdots$(其中 A_{2n-1},A_{2n} 為正焦弦的兩端點)，此時 A_{2n+1} 一定非長軸、非正焦弦的端點。由 A_{2n+1} 開始演算（利用 3.來討論）



類 3 已知 F_1 射出一光線至橢圓上一點 A_1（非長軸、非正焦弦的端點），經反射後經過另一焦點 F_2，至橢圓上另一點 A_2，繼續反射得 A_3、A_4、$A_5\cdots$ 等反射點，演算其趨近於長軸上頂點。

(1) 首先證明橢圓的焦弦長公式：



已知橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，兩焦點為 $F_1(c,0)$ ，$F_2(-c,0)$ ，$P(x,y)$ 為橢圓上一點，則

$\overline{PF_1}=a-\dfrac{c}{a}x$ ，$\overline{PF_2}=a+\dfrac{c}{a}x$

證明：

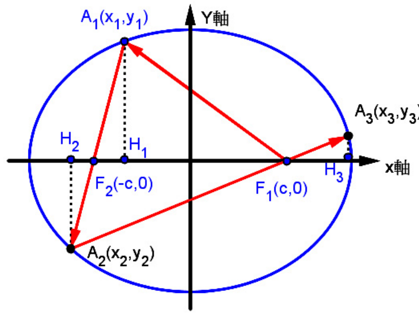
$$\overline{PF_1}=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\,(\because \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\therefore y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2})$$

$$=\sqrt{x^2-2cx+c^2+\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-b^2)x^2-2a^2cx+a^2(b^2+c^2)}\,(\because a^2=b^2+c^2)$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2-2a^2cx+a^4}=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2-cx)^2}=\frac{1}{a}\left|a^2-cx\right|=a-\frac{c}{a}x$$

同理可得 $\overline{PF_2}=a+\dfrac{c}{a}x$

(2) 已知 F_1 射出一光線至橢圓上一點 A_1（非正交弦的端點），反射經過另一焦點 F_2 ，至橢圓上另一點 A_2，反射經過另一焦點 F_1，至橢圓上另一點 A_3，演算 A_1 與 A_3 之 x 坐標的關係式。並推廣至 $A_{2n-1}(x_{2n-1},y_{2n-1}),A_{2n}(x_{2n},y_{2n}),A_{2n+1}(x_{2n+1},y_{2n+1})$, 其中 A_{2n-1} 與 A_{2n+1} 之 x 坐標的關係式。



解：已知橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，兩焦點為 $F_1(c,0)$，$F_2(-c,0)$，橢圓上三點 $A_1(x_1,y_1)$ ，

$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$，此三點在長軸上的投影點分別為 H_1,H_2,H_3，

則 $\overline{A_1F_2}=a+\frac{c}{a}x_1$，$\overline{A_2F_2}=a+\frac{c}{a}x_2$，

$$\frac{\overline{H_1F_2}}{\overline{H_2F_2}}=\frac{\overline{A_1F_2}}{\overline{A_2F_2}}\Rightarrow\frac{\overline{H_1F_2}}{\overline{H_2F_2}}=\frac{|x_1-(-c)|}{|(-c)-x_2|}=\frac{x_1-(-c)}{(-c)-x_2}\Rightarrow\frac{x_1-(-c)}{(-c)-x_2}=\frac{a+\frac{c}{a}x_1}{a+\frac{c}{a}x_2}$$

$$\Rightarrow\frac{x_1+c}{-c-x_2}=\frac{a^2+cx_1}{a^2+cx_2}\Rightarrow a^2x_1+a^2c+cx_1x_2+c^2x_2=-a^2c-a^2x_2-c^2x_1-cx_1x_2$$

$$\Rightarrow(a^2+c^2+2cx_1)x_2=-a^2x_1-c^2x_1-2a^2c\Rightarrow x_2=\frac{-a^2x_1-c^2x_1-2a^2c}{a^2+c^2+2cx_1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

又 $\overline{A_2F_1}=a-\frac{c}{a}x_2$，$\overline{A_3F_1}=a-\frac{c}{a}x_3$ $\frac{\overline{H_2F_1}}{\overline{H_3F_1}}=\frac{\overline{A_2F_1}}{\overline{A_3F_1}}$

$$\Rightarrow\frac{\overline{H_2F_1}}{\overline{H_3F_1}}=\frac{|c-x_2|}{|x_3-c|}=\frac{c-x_2}{x_3-c}\Rightarrow\frac{c-x_2}{x_3-c}=\frac{a-\frac{c}{a}x_2}{a-\frac{c}{a}x_3}\Rightarrow\frac{c-x_2}{x_3-c}=\frac{a^2-cx_2}{a^2-cx_3}$$

$$\Rightarrow a^2c-a^2x_2-c^2x_3+cx_2x_3=a^2x_3-a^2c-cx_2x_3+c^2x_2$$

$$\Rightarrow(a^2+c^2-2cx_3)x_2=-a^2x_3-c^2x_3+2a^2c\Rightarrow x_2=\frac{-a^2x_3-c^2x_3+2a^2c}{a^2+c^2-2cx_3}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

由(1)=(2)得

$$x_2=\frac{-a^2x_1-c^2x_1-2a^2c}{a^2+c^2+2cx_1}=\frac{-a^2x_3-c^2x_3+2a^2c}{a^2+c^2-2cx_3}$$

$$\frac{(a^2+c^2)x_1+2a^2c}{a^2+c^2+2cx_1}=\frac{(a^2+c^2)x_3-2a^2c}{a^2+c^2-2cx_3}$$

$$\Rightarrow(a^2+c^2)^2x_1-2c(a^2+c^2)x_1x_3+2a^2c(a^2+c^2)-4a^2c^2x_3$$
$$=(a^2+c^2)^2x_3+2c(a^2+c^2)x_1x_3-2a^2c(a^2+c^2)-4a^2c^2x_1$$
$$\Rightarrow[(a^2+c^2)^2+4a^2c^2+4c(a^2+c^2)x_1]x_3=[(a^2+c^2)^2+4a^2c^2]x_1+4a^2c(a^2+c^2)$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2]x_1+4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2+4c(a^2+c^2)x_1}$$

同理可得 $A_{2n-1}(x_{2n-1},y_{2n-1})$，$A_{2n}(x_{2n},y_{2n})$，$A_{2n+1}(x_{2n+1},y_{2n+1})$，三點中 A_{2n-1}與 A_{2n+1} 之 x 坐標的關係式。

$$\Rightarrow x_{2n+1}=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2]x_{2n-1}+4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2+4c(a^2+c^2)x_{2n-1}}$$

(3) 利用遞迴關係式來推演無限次反射後所趨近的點。

設 $b_n = x_{2n+1} \Rightarrow b_n = \dfrac{(a^4+c^4+6a^2c^2)b_{n-1}+4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2+4c(a^2+c^2)b_{n-1}}$

取 $\beta = \dfrac{(a^4+c^4+6a^2c^2)\beta+4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2+4c(a^2+c^2)\beta}$

$\Rightarrow \beta(a^4+c^4+6a^2c^2)+4c(a^2+c^2)\beta^2 = (a^4+c^4+6a^2c^2)\beta+4a^2c(a^2+c^2)$

$\Rightarrow \beta^2 = a^2 \Rightarrow \beta = \pm a \Rightarrow b_n - a = \dfrac{[a^4+c^4+6a^2c^2-4ac(a^2+c^2)](b_{n-1}-a)}{(a^4+c^4+6a^2c^2)+4c(a^2+c^2)b_{n-1}}$ ………….. (3)

$\Rightarrow b_n + a = \dfrac{[a^4+c^4+6a^2c^2+4ac(a^2+c^2)](b_{n-1}+a)}{(a^4+c^4+6a^2c^2)+4c(a^2+c^2)b_{n-1}}$ …………………………………. (4)

$\Rightarrow$ 由 $\dfrac{(3)}{(4)}$ ，

$$\Rightarrow \frac{b_n-a}{b_n+a} = \frac{[a^4+c^4+6a^2c^2-4ac(a^2+c^2)]}{[a^4+c^4+6a^2c^2+4ac(a^2+c^2)]}\times\frac{b_{n-1}-a}{b_{n-1}+a}$$

$$= \frac{[(a^2+c^2)^2-4ac(a^2+c^2)+4a^2c^2]}{[(a^2+c^2)^2+4ac(a^2+c^2)+4a^2c^2]}\times\frac{b_{n-1}-a}{b_{n-1}+a} = \frac{(a^2+c^2-2ac)^2}{(a^2+c^2+2ac)^2}\times\frac{b_{n-1}-a}{b_{n-1}+a}$$

$$= \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^4\times\frac{b_{n-1}-a}{b_{n-1}+a} = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a} \Rightarrow$$

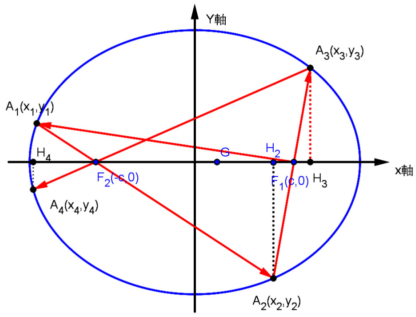
$$b_n - a = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}\times b_n + \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}\times a$$

$$\left[1-\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}\right]\times b_n = \left[1+\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}\right]\times a$$

$$b_n = \frac{1+\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}}{1-\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}}\times a \text{ ，} \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}}{1-\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{4n-4}\times\frac{b_1-a}{b_1+a}}\times a = a$$

（其中 $\because 0 < a-c < a+c, \therefore 0 < \dfrac{a-c}{a+c} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-c}{a+c}\right)^n = 0$ ）

由步驟(2)、(3)的推演，可得最終點 A_{2n+1} 的 x 坐標趨近於 a ，即經無限次的反射後，會趨近於長軸上的右端點。



(4) 已知 F_1 射出一光線至橢圓上一點 A_1（非正交弦的端點），反射經過另一焦點 F_2，至橢圓上另一點 A_2，反射經過另一焦點 F_1，至橢圓上另一點 A_3，反射經過另一焦點 F_2，至橢圓上另一點 A_4，演算 A_2 與 A_4 之 x 坐標的關係式。並推廣至 $A_{2n}(x_{2n},y_{2n}), A_{2n+1}(x_{2n+1},y_{2n+1}), A_{2n+2}(x_{2n+2},y_{2n+2})$, 其中 A_{2n} 與 A_{2n+2} 之 x 坐標的關係式。

解：已知橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，兩焦點為 $F_1(c,0), F_2(-c,0)$，橢圓上三點 $A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$，$A_4(x_4,y_4)$ 此三點在長軸上的投影點分別為 H_2，H_3，H_4

則 $\overline{A_2F_1}=a-\dfrac{c}{a}x_2$，$\overline{A_3F_1}=a-\dfrac{c}{a}x_3$

$$\frac{\overline{H_2F_1}}{\overline{H_3F_1}}=\frac{\overline{A_2F_1}}{\overline{A_3F_1}} \Rightarrow \frac{\overline{H_2F_1}}{\overline{H_3F_1}}=\frac{|c-x_2|}{|x_3-c|}=\frac{c-x_2}{x_3-c}$$

$$\Rightarrow \frac{c-x_2}{x_3-c}=\frac{a-\frac{c}{a}x_2}{a-\frac{c}{a}x_3} \Rightarrow \frac{c-x_2}{x_3-c}=\frac{a^2-cx_2}{a^2-cx_3}$$

$$\Rightarrow a^2c-a^2x_2-c^2x_3+cx_2x_3=a^2x_3-a^2c-cx_2x_3+c^2x_2$$

$$\Rightarrow (a^2+c^2-2cx_2)x_3=-a^2x_2-c^2x_2+2a^2c$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{-a^2x_2-c^2x_2+2a^2c}{a^2+c^2-2cx_2} \qquad \cdots\cdots (5)$$

又 $\overline{A_3F_2}=a+\dfrac{c}{a}x_3$，$\overline{A_4F_2}=a+\dfrac{c}{a}x_4$

$$\frac{\overline{H_3F_2}}{\overline{H_4F_2}}=\frac{\overline{A_3F_2}}{\overline{A_4F_2}} \Rightarrow \frac{\overline{H_3F_2}}{\overline{H_4F_2}}=\frac{|x_3-(-c)|}{|(-c)-x_4|}=\frac{x_3-(-c)}{(-c)-x_4}$$

$$\Rightarrow \frac{x_3-(-c)}{(-c)-x_4}=\frac{a+\frac{c}{a}x_3}{a+\frac{c}{a}x_4} \Rightarrow \frac{x_3+c}{-c-x_4}=\frac{a^2+cx_3}{a^2+cx_4}$$

$$\Rightarrow\ a^2x_3+a^2c+cx_3x_4+c^2x_4=-a^2c-a^2x_4-c^2x_3-cx_3x_4$$
$$\Rightarrow\ (a^2+c^2+2cx_4)x_3=-a^2x_4-c^2x_4-2a^2c$$
$$\Rightarrow\ x_3=\frac{-a^2x_4-c^2x_4-2a^2c}{a^2+c^2+2cx_4} \cdots\cdots (6)$$

由(5)=(6)得 $x_3=\dfrac{-a^2x_2-c^2x_2+2a^2c}{a^2+c^2-2cx_2}=\dfrac{-a^2x_4-c^2x_4-2a^2c}{a^2+c^2+2cx_4}$

$$\frac{a^2x_2+c^2x_2-2a^2c}{a^2+c^2-2cx_2}=\frac{a^2x_4+c^2x_4+2a^2c}{a^2+c^2+2cx_4}$$
$$\Rightarrow\ (a^2+c^2)^2x_4-2c(a^2+c^2)x_2x_4+2a^2c(a^2+c^2)-4a^2c^2x_2$$
$$=(a^2+c^2)^2x_2+2c(a^2+c^2)x_2x_4-2a^2c(a^2+c^2)-4a^2c^2x_4$$
$$\Rightarrow\ [(a^2+c^2)^2+4a^2c^2-4c(a^2+c^2)x_2]x_4=[(a^2+c^2)^2+4a^2c^2]x_2-4a^2c(a^2+c^2)$$
$$\Rightarrow\ x_4=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2]x_2-4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2-4c(a^2+c^2)x_2}$$

同理可得 $A_{2n}(x_{2n},y_{2n})$，$A_{2n+1}(x_{2n+1},y_{2n+1})$，$A_{2n+2}(x_{2n+2},y_{2n+2})$三點中 A_{2n}與 A_{2n+2}之 x 坐標的關係式。

$$\Rightarrow\ x_{2n+2}=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2]x_{2n}-4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2-4c(a^2+c^2)x_{2n}}$$

(5) 利用遞迴關係式來推演無限次反射後所趨近的點。

設 $c_n=x_{2n}$，$\Rightarrow\ c_n=\dfrac{(a^4+c^4+6a^2c^2)c_{n-1}-4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2-4c(a^2+c^2)c_{n-1}}(n\ge 2)$

取 $\gamma=\dfrac{(a^4+c^4+6a^2c^2)\gamma-4a^2c(a^2+c^2)}{a^4+c^4+6a^2c^2-4c(a^2+c^2)\gamma}$

$$\Rightarrow\ (a^4+c^4+6a^2c^2)\gamma-4c(a^2+c^2)\gamma^2=(a^4+c^4+6a^2c^2)\gamma-4a^2c(a^2+c^2)\ \Rightarrow\ \gamma^2=a^2$$
$$\Rightarrow\ \gamma=\pm a\ \Rightarrow\ c_n-a=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2+4ac(a^2+c^2)](c_{n-1}-a)}{(a^4+c^4+6a^2c^2)-4c(a^2+c^2)c_{n-1}} \cdots\cdots (7)$$
$$\Rightarrow\ c_n+a=\frac{[a^4+c^4+6a^2c^2-4ac(a^2+c^2)](c_{n-1}+a)}{(a^4+c^4+6a^2c^2)-4c(a^2+c^2)c_{n-1}} \cdots\cdots (8)$$

$\Rightarrow$由 $\dfrac{(7)}{(8)}$，$\Rightarrow\ \dfrac{c_n-a}{c_n+a}=\dfrac{[a^4+c^4+6a^2c^2+4ac(a^2+c^2)]}{[a^4+c^4+6a^2c^2-4ac(a^2+c^2)]}\times\dfrac{c_{n-1}-a}{c_{n-1}+a}$

$$=\frac{[(a^2+c^2)^2+4ac(a^2+c^2)+4a^2c^2]}{[(a^2+c^2)^2-4ac(a^2+c^2)+4a^2c^2]}\times\frac{c_{n-1}-a}{c_{n-1}+a}=\frac{(a^2+c^2+2ac)^2}{(a^2+c^2-2ac)^2}\times\frac{c_{n-1}-a}{c_{n-1}+a}$$

$$=(\frac{a+c}{a-c})^{4}\times\frac{c_{n-1}-a}{c_{n-1}+a}=(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}$$

$$\Rightarrow\ c_n-a=(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}\times c_n+(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}\times a$$

$$[1-(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}]\times c_n=[1+(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}]\times a$$

$$c_n=\frac{1+(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}}{1-(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}}\times a$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}}{1-(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}\times\frac{c_1-a}{c_1+a}}\times a=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}}+\frac{c_1-a}{c_1+a}}{\frac{1}{(\frac{a+c}{a-c})^{4n-4}}-\frac{c_1-a}{c_1+a}}\times a$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{a-c}{a+c})^{4n-4}+\frac{c_1-a}{c_1+a}}{(\frac{a-c}{a+c})^{4n-4}-\frac{c_1-a}{c_1+a}}\times a=(-1)\times a=-a$$

（其中 $\because 0<a-c<a+c,\therefore 0<\frac{a-c}{a+c}<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{a-c}{a+c})^{n}=0$ ）

由步驟(4)、(5)的推演，可得點 A_{2n} 最終的 x 坐標趨近於 $-a$ ，即經無限次的反射後，會趨近於長軸上的左端點。

由類 1、2、3 的演算，得到「自橢圓焦點向橢圓射出一點，經無限次反射後趨向長軸兩端點」。

貳、結論

由教材中的習題引發動機，利用數學繪圖軟體的繪圖觀察建立假設，再透過數學的演算論證假設的正確性。得到「自橢圓焦點向橢圓射出一點，經無限次反射後趨向長軸兩端點」。

最後感謝楊朝凱老師的協助。