

大家來猜「指數拳」！

李祐宗

澎湖縣立文光國民中學

邁向十二年國教的途中，許多熱心的老師為了改變教學現場，紛紛推出了許多顛覆傳統教育的教學方法，如分組合作教學、學思達等，無論哪一種新的教學方式，共同點都是著重於學生的學習與表達。指數律是國中七年級上學期的課程，筆者有鑒於此單元的教學活動並不是很多，於是自行研發了一種名為「指數拳」的遊戲，搭配時下常用的教學活動，來作為指數律的其中一堂課程，茲分享如下：

- * 教學目標：指數的意義。
- * 教學對象：國中七年級學生。
- * 教學時間：一節課（45 分鐘）
- * 教學起點行為：學生會基本的指數的記法，例如 $3^2=9$ 、 $4^3=64$ 等。
- * 教學單元：摺紙大作戰、指數拳

壹、摺紙大作戰

每位同學發一張紙，接著跟同學說明世界紀錄是有人可以將紙張連續對折到 12 次，然後請同學挑戰看看可以摺到幾次。以筆者的經驗來看，同學大概頂多只能將紙張對摺至七次，厲害一點的可以到達八次。

接著問同學：你們會不會好奇世界紀錄的十二次是怎麼摺出來的呢？此時學生滿臉疑惑懷疑。此時教師可以向學生說道，此紀錄的確是十二次，但是用的是衛生紙。（學生哈哈大笑）

接著請學生附帶討論什麼樣的因素可以影響摺紙的次數。（此部分雖然與數學無關，但花點時間討論更深入的問題可以使學生獲益更多）接著大家一起探討摺紙的次數與紙張層數的關係。

摺的次數	1	2	3	4	...	9	10
紙的層數	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$...	$2^9=512$	$2^{10}=1024$

由紙張的層數變化可以知道與底數 2 有很大的關係，因此可以推論若紙摺了九次，紙將會有 512 層的厚度；若摺了十次，紙就會有 1024 層，相當於一隻手掌的寬度。國外有專家模擬過此實驗，紙摺廿三次將有約一公里的厚度。

此外 3C 產品早已是國人居家生活的基本配備，電腦或手機中的電池容量、記憶體容量等數字常出現在我們腦海中，但不詳加研究很少人知道這些容量的計算全都是二進位的。舉個例子來說，市售隨身碟容量從 1G 開始、接著是 2G、4G、8G、16G、32G、64G 等，若往下推則是 128G、256G、512G、1024G (= 1T) 等。而電腦或手機的記憶體容量也是用同樣的方式來設計的。 $1G = 2^{10} = 1024M$ (約為 1000M)；所以 $512M = 0.5G$ 、 $4G = 4 \times 2^{10} = 4096M$ 等。學數學的目的就是能夠與生活中的數學相連結，用理論來解釋實際的情況。

貳、指數拳

指數拳是最近筆者研發的新遊戲，由普通的猜拳演變而來。普通的猜拳是剪刀、石頭、布，筆者將其改成出 1 根手指頭、2 根手指頭到 5 根手指頭共五種出拳的遊戲。

遊戲規則：甲乙雙方各只用一隻手，依手指頭數目分別代表 1~5，出拳的一方出的數字代表底數，對方出的拳代表是己方的指數。甲乙雙方出拳後，各自算出自己的數目，再比較大小（數字大者為贏家，小者為輸家），並記錄於表格。

例如：甲出 2，乙出 3，對甲而言得到的數字是 $2^3 = 8$ 、乙得到的數字為 $3^2 = 9$ ，因此乙贏了！

甲出 4，乙出 3，對甲而言得到的數字是 $4^3 = 64$ 、乙得到的數字為 $3^4 = 81$ ，因此乙贏了！

最近筆者實施兩個班級，兩人一組，各猜五次拳，每次將贏或輸及平手的情形記錄下來。過程中筆者觀察各組猜拳的情形，並在猜拳後問學生：過程中你覺得出多少比較容易贏？甲班的學生一致回答：五！乙班的同學皆回答：二！，為何學生會這樣猜？可能學生在當下出 5 或出 2 的時候剛好贏，加上班級的默契，所以剛好出現這種狀況。

筆者再問：出多少比較容易輸？甲乙兩班不約而同一致認為是一！很明顯，因為一的任何次方都是一，所以兩班的同學都很聰明，縱使如此，過程中還是有同學出一！（沒有關係，凡事都是經驗，沒有失敗哪來的成功？）

最後是秘密揭曉的時候，筆者設計一個表格，兩人猜拳一共有 $5 \times 5 = 25$ 種狀況，接下來請學生將所有情況一一列出，便可知道出幾比較容易贏了。（此部分若時間充裕，可以讓每位同學算完 25 種情況，若時間不夠，則可分組各解其中一列的情況，再來統合。）

結果出爐，教師向學生問出幾比較容易贏？學生接著回答：三！沒錯，無論甲乙雙方，只要出三，贏的機會是五分之四，剩下的一次是平手，總之，出三絕對不會輸！接著可以請同學觀察、討論其他的情形。

乙 \ 甲	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32
3	3	9	27	81	243
4	4	16	64	256	1024
5	5	25	125	625	3125

由上表可知，甲乙兩方猜拳共 25 種情況，其中 9 種是贏、9 種是輸，其餘的 7 種是平手情況，因此甲（乙）贏的機會是 $9/25$ ，輸的機會是 $9/25$ ，平手的機會是 $7/25$ 。現在我們以表格來說明在雙方出 1-5 的情況下輸贏的機率：

指數拳	1	2	3	4	5
贏的機率	0	$2/5$	$4/5$	$2/5$	$1/5$
輸的機率	$4/5$	$1/5$	0	$1/5$	$3/5$
平手的機率	$1/5$	$2/5$	$1/5$	$2/5$	$1/5$

從上表可知，出 3 贏的機會最大，其次是出 2 和 4，而出 5 贏的機會只有 $1/5$ ，出 1 則是沒有贏的機會。接著我們可以將此遊戲做推廣，把『負的指數』納進來討論看看會如何？此時我們將遊戲規則稍作更改，原來的 1~5 改為 -1~-5，我們來討論出何數的機率為何？(由於國中數學未教負的指數，因此以下遊戲可列為課後補充)

甲 乙	-1	-2	-3	-4	-5
-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$
-3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$
-4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$-\frac{1}{1024}$
-5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$	$-\frac{1}{3125}$

指數拳	-1	-2	-3	-4	-5
贏的機率	2/5	0	4/5	0	3/5
輸的機率	2/5	3/5	0	3/5	1/5
平手的機率	1/5	2/5	1/5	2/5	1/5

由上表可知出-3 是最佳的選擇，其次是出-5，接著是-1，出-2 及-4 則是完全沒有贏的機會。接著我們討論正數對負數的情況（1~5 對上-1~-5）。我們從下表可以看出來，出負數牌贏的機會皆只有 2/5，輸的機會為 3/5；若出 1、3、5 則贏的機會為百分之百；出 2 及 4 則是輸的機會為百分之百。

甲(乙) 乙(甲)	1	2	3	4	5
-1	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{1}{5}}$
-2	$\boxed{1}$	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$\frac{1}{16}$	$\boxed{\frac{1}{25}}$
-3	$\boxed{1}$	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{1}{27}}$	$\frac{1}{64}$	$\boxed{\frac{1}{125}}$
-4	$\boxed{1}$	$\frac{1}{16}$	$\boxed{\frac{1}{81}}$	$\frac{1}{256}$	$\boxed{\frac{1}{625}}$
-5	$\boxed{1}$	$\frac{1}{32}$	$\boxed{\frac{1}{243}}$	$\frac{1}{1024}$	$\boxed{\frac{1}{3125}}$
	-1	$\boxed{1}$	-1	$\boxed{1}$	-1
	-2	$\boxed{4}$	-8	$\boxed{16}$	-32
	-3	$\boxed{9}$	-27	$\boxed{81}$	-243
	-4	$\boxed{16}$	-64	$\boxed{256}$	-1024
	-5	$\boxed{25}$	-125	$\boxed{625}$	-3125

此遊戲也可進一步推廣為甲乙雙方各出 1~5 及 -1~-5 等十張牌。由於 1~5 及 -1~-5 共十個數字，一隻手不夠用，用兩手猜也不太方便，這時可以將猜拳的遊戲轉為紙牌遊戲，以出紙牌的方式進行。出牌可分為出的牌可以重複出(也就是第一回合甲乙雙方各出一張牌比較大小後，仍可將此排放回手中)或者不可重複出(也就是每一回合出牌後不能收回)等兩種規則，再來討論贏或輸的情況。

舉例來說，若甲乙兩人各十張牌，別是 1~5 及 -1~-5，每次只能出一張比輸贏，且出過的牌不能再出，則有無可能甲乙其中一方十次全勝呢？由以上可以知道 3 是不會被任何數打敗，頂多就是 3 碰到 3 打成平手，因此最好的情況是有一方九勝一和，舉例如下表，此局當中甲方是九勝一和。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲牌	1	2		4	5	-1	-2	-3	-4	-5
乙牌	-3	1	3	5	-1	-2	4	-5	2	-4
甲的輸贏	贏	贏	和	贏	贏	贏	贏	贏	贏	贏

當然，類似的情況不勝枚舉，上表也可以空白，由教師指定某一方的輸贏狀況(例如甲方六勝四負等)，再請學生找出適合的比賽過程也可。

指數對國中生而言是一種新的數字表示方法，相關計算也很重要，若有適當的教學活動及學習動機將可事半功倍。筆者在實施兩個班級之後，在評量上相關的指數計算都能計算正確，因此教師用心是學生的福氣，學生也要努力才不辜負教師的苦心。

參、學生學習單

1	2	3	4	5
$4^2=16$	$2^2=4$	$5^2=25$	$3^2=9$	$4^3=1024$
$2^3=8$	$2^2=4$	$5^2=25$	$2^2=4$	$5^2=625$
平	平	平	甲	甲

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	4	8	16	32
3	8	27	64	125
4	16	64	256	625
5	25	125	625	3125

1	2	3	4	5
$2^5=32$	$2^2=4$	$2^2=4$	$3^3=27$	$3^1=3$
$5^2=25$	$2^2=4$	$2^2=4$	$3^3=27$	$1^3=1$
甲	平	平	平	甲

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	4	8	16	32
3	8	27	64	125
4	16	64	256	625
5	25	125	625	3125

1	2	3	4	5
$5^2=25$	$3^5=243$	$5^2=25$	$1^3=1$	$2^1=2$
$4^2=1024$	$5^2=25$	$2^2=4$	$3^2=9$	$1^1=1$
乙	甲	乙	乙	甲

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	4	8	16	32
3	8	27	64	125
4	16	64	256	625
5	25	125	625	3125

1	2	3	4	5
$2^2=4$	$1^2=1$	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^1=4$
$5^2=25$	$3^2=9$	$4^2=16$	$4^2=16$	$1^2=1$
甲	乙	甲	乙	甲

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
2	4	8	16	32
3	8	27	64	125
4	16	64	256	625
5	25	125	625	3125