「數學的三個世界」的運作模式及其對數學思考教學的啟示(I)

陳冠州 [1] 劉致演 [2*] 尤詩憶 [2] 秦爾聰 [2]

[1] 桃園市立建國國民小學

[2] 國立彰化師範大學 科學教育研究所

壹、前言

教學改革標準中，「理解」是數學教學與學習活動中最重要的旨趣(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Research Council [NRC], 2001)。根據研究指出探究教學足以提升學生數學學習的理解(Fennema, et al., 1996)，數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學」(doing mathematics)，在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並藉由反駁進行修正並與他人進行溝通與論述(Baroody, 1993; Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 2000; Peirce, 1955)。然而，「學生不會意外地成為主動的學習者，除非經由計畫性的設計，始能讓學生進行結構性的探究」(Richards, 1991, p.38)，此計畫性的設計即是教師能為學生數學思考發展佈建完整的假設性學習軌線(hypothetical learning trajectories, HLT)(Simon, 1995)，也就是針對學生的學習活動具體擬定學習目標與達成目標的假設性學習過程。因此，對於中小學教師而言了解學生數學思考發展歷程，將有助於學習軌線的建置。「數學的三個世界」是學者 David Tall 畢其一生在數學教育中致力理解所有年齡層不同學習者的數學認知發展成果，就數學學習的認知發展過程而言，基本上由三個不同的基礎運思所構成，其一是透過物理及心智上的具象(embodiment)，包括使用視覺及其他感官的行動，其次是透過數學符號表徵算術、代數及演算法中的過程及概念，第三是以形式性的語言進行高階數學思考；數學的三個世界即是以此三種運思為基礎的數學認知發展歷程，分別是具象(概念)、符號(過程概念)、形式(公理)。事實上，個人數學思考的發展是建碁在先天生成(set-before)及後設經驗(met-before)兩個基礎上，將知識結構進行心智壓縮(mental compression)成可思考概念(thinkable concept)，在可思考概念間進行連結及建構知識結構，加以擴充、解構與重構、特殊化及一般化(Tall, 2006, 2009, 2013)後，形成數學認知發展的三個世界。本文旨於深入淺出地探討數學的三個世界理論組成面向，以活動實例深入詮釋，並透過相關實徵性研究探討與教學建議，提供中小學教師作為協助學生發展數學思考之參考。

*為本文通訊作者

貳、數學的三個世界理論架構及其運作模式

一、長期數學學習的基礎

(一) 先天生成(set-before)

先天生成意指我們與生俱來需要時間由大腦熟成後進行連結的心智結構，即辨別樣式及異同、建立重複程序的能力與語言(Tall, 2006, 2008, 2013)。辨別樣式及異同，是心智組合的發展的結果，以感官上的視覺、聽覺、嗅覺、味覺、聽覺加上諸如肌肉張力、位置及方向的空間感等，綜合這些官能幫助我們進行數學思考，如辨認幾何、算術中的一般化樣式。第二個先天生成的能力是幫助我們達到自發性表現之具有重複性程序的行動，此種能力的基礎是程序性思考(procedural thinking)，在不考慮細節的情況下自動執行必要的程序，此能力是數學學習的重要基礎，如執行複雜運算的演算法中直式運算的加減乘除，或以演算法解決代數方程、矩陣乘法、尋找微積分中的導數等。第三個人類先天生成的能力是語言，語言是數學思考中的重要組成，並非僅止於以自然語言討論數學想法，更重要的是幫助我們整合辨別樣式及重複程序兩者，使我們能夠分類及詮釋數學想法，如點、線、正弦函數、質數、變數、導數、代數等。數學思考不僅包含一般語言中名詞、動詞、形容詞、連接詞、副詞等，更包含新型態的整合與創作，如過程概念(procept)，此符號同時代表過程及符號。此三項先天生成的能力，造就人類與其他生物物種的不同。舉例來說在操作重複程序直至成為自發性的過程，我們的心智已將此程序加以內化成為一種潛能，如系統性的舉特殊例(Mason, et al., 2010)，數字從1、2、3不斷增加一個接著一個，直到我們開始感覺可以無限延伸為止，此種重複程序的經驗在我們長期數學認知發展中是潛無窮(potential infinity)的重要基礎(Tall, 2006, 2013)。

(二) 後設經驗(met-before)

後設經驗(met-before) (McGowen & Tall, 2010, 2013; Nogueira de Lima & Tall, 2008; Tall, 2004, 2006, 2008, 2013)意指學習者對於新事物的學習如何受經驗的影響，後設經驗是一種以過往的學習經驗為基礎所形成的心智結構，同時表徵以先備知識作為學習新知基礎的支持觀點(supportive aspect)及造成困惑及阻礙進步的問題觀點(problematic aspect)。後設經驗的支持觀點是建構課程的基礎，如學習計數之於整數概念、加法之於減法、連加之於乘法；問題觀點則是困惑與異例所造成學習者無法理解的現象，如負負得正、虛數的平方為負值，另如算術中 3+2 得 5，代數中 $3+2x$ 並沒有答案直到 x 的值確定為止，但如果 x 的值是確定的為何不在代數式

中以確定的值直接取代即可？後設經驗可能在某些情境中產生新的支持觀點，但卻在另一情境中卻是問題觀點，如減法在物理性質上是“拿走”的意思，如 5 顆蘋果可以拿走 3 顆，但卻無法拿走 6 顆，我們無法拿走比擁有還多的物件因為所留下的物件不得少於 0，但在代數上卻可以輕易地完成 5 減負 2 得 7。絕大部分的課程僅聚焦於擴大正面後設經驗的基礎，卻乏於探討可能造成學習者困難的後設經驗，如數學家在其心目中存有分析及微積分中的極限邏輯分析基礎，但這些經驗卻不適用於初學的微積分的學生，並可能造成學習者理解上的困難(Tall, 2008)。因此，後設經驗的支持性觀點及問題性觀點，某種程度存在對概念理解上所謂譬喻(metaphor) (Lakoff & Núñez, 2000)的雙刃性。

二、心智的壓縮與連結

(一) 心智壓縮(mental compression)

知識的壓縮是我們所有思考發展的核心歷程(Gray & Tall, 2007; Tall, 2006, 2013)，簡言之，數學想法的精緻性化約仰賴於心智壓縮的過程(Thurston, 1990)。心智壓縮的想法源自 David Tall 發想於數學家 Thurston 的洞見：

> 數學上的心智壓縮令人出奇：你可能很長一段時間亦步亦趨地掙扎於以不同途徑處理數學想法，一旦你在真實理解中洞見問題的整體性，通常是在經過驚人的心智壓縮過程之後，進而你在處理其他過程的步驟中隨時立即而完整地取用該過程，此種洞察實在是數學的一大樂趣(Thurston 1990, p. 847)。

心智壓縮意謂在複雜現象中，聚焦於關鍵性面向加以命名並將之視為任意運用的可思考的整體，即是可思考概念(thinkable concept)(Gray & Tall, 2007; Tall, 2013)，一個「可思考概念」之意涵包括物件名稱、性質、關係、情感以及任何人類心智可能得以聚焦的面向。心智壓縮通常透過膠囊化(encapsulation)的化約過程來進行(Tall, 2013)，即程序(procedures)轉化成物件(object)的歷程。膠囊化的概念也等同於 Piaget (1972, p.7)：「數學整體而言可視為結構的建置，數學的整體從一個層級移動到另一個層級，這樣的過程在其中轉變成為一個理論物件(object of the theory)，並且，這個過程會一直重複達到結構性的交替或是被一個更強大的結構給取代」，接著 Davis (1984)以和緩性視覺次序(visually moderated sequence)表徵對於每個解題過程加以記錄並提示下個步驟直到問題被解決為止，他同時使用「程序」作為執行資訊處理的「過程」中特定的演算法(Davis, 1983)。此外，Greeno (1983)以概念實質(conceptual entity)描述資訊處理過

程中可被輸入其他程序的程序，因而激發 Dubinsky (1991)與 Sfard (1991)分別以 APOS（行動 Action、過程 Process、物件 Object、基模 Schema）以及具體化(reification)作為過程轉化為物件(object)的表徵。Sfard 假設兩種概念發展的取向，一是聚焦於過程的操作性(operational)，另一則是聚焦於物件的結構性(structural)。Gray 和 Tall (1994)以過程概念(procept)總結過程—物件的發展過程，整合計數(counting)觀點中的「已知事實」(known facts)與「推論事實」(deriving facts)，借鑒 Davis (1983)的主張，使用「程序」(procedure)概念表徵演算法與結果間之關係，如 4+2 同時代表加法過程(process of addition)（藉由不同的程序）與和的概念(concept of sum)，並將過程(pro-cess)與概念(con-cept)鑄合成為一個新的表徵—過程概念(procept)。表 1 為過程—物件的概念發展歷程(Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p.4)。

基礎的「過程概念」是由三個元件所鑄合：產生數學「物件」的「過程」、用以同時表徵過程及物件的「符號」(Gray & Tall, 1994)，由於過程概念符號同時表徵過程及物件，因此具有對偶性(duality)（如表 2）。

總結上述論述，心智壓縮通常發生在幾個面向中：

(1) 以最不費力氣的方式自動執行的行動—基模(action-schemas)，即一個完整的可思考過程；
(2) 過程概念，使用符號同時指涉過程及概念表徵可思考概念；
(3) 分類，經分類及命名的心智物件即是可思考概念；
(4) 思考實驗，可思考概念間的操弄與連結
(5) 非形式化數學推論，是產生過理性定義的基礎為數學理論的可思考概念；
(6) 較高層次的知識基模，如整數、歐幾里得幾何等可被命名為可思考概念知識範疇(Tall, 2006)。

表 1、過程—物件轉化發展歷程

	過程(process)	…	物件(object)
Piaget（50年代）	行動、運算	…	思維的主題化物件
Dienes（60年代）	預測	…	主體
Davis （80年代）	緩和視覺次序	程序整合	事物、整體、名詞
Greeno（80年代）	程序	輸入其他程序	概念整體
Dubinsky（80年代）	行動	過程內化	膠囊化物件
Sfard（80年代）	過程內化	過程濃縮	實體化物件
Gray & Tall（90年代）	程序	過程	過程概念

表 2、過程概念符號表徵之對偶性

符號	符號表徵之對偶性	
a/b	分數	除法
3/4	四分之三	3 除以 4
5＋4	加法	和
4×3	4＋4＋4 4 乘以 3	12
＋4	加 4	正 4
－7	負 7	減 7
$3x+2$	值	$3x+2$ 的值
π	圓周/直徑	3.14159…
$\lim_{x\to a} f(x)$	趨近 a 的極限	極限值 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$

「符號」在心智壓縮的過程中，佔有重要的中介地位，我們可以從圖 1 漸進符號壓縮成果光譜的演進歷程看出在學習數學的過程中，透過符號的壓縮能逐步導致概念的精緻化，進而發發展數學概念。其中精緻化歷程共分五個階段，包括前－程序(Pre-procedure)(o)、程序(Procedure)(i)、多元程序(Multi-procedure)(ii)、過程(Process)(iii)、與過程概念(Pro-cept)(iv)、(Gary, Pitta, Pinto & Tall, 1999; Tall, 2013)。分別以 procept 及 APOS 理論詮釋如下表 3。

表 3、程序至過程概念的發展階段

階段	Procept理論	APOS 理論
(o) 起始行動或是在行動前建立程序	程序	行動
(i) 程序：為執行操作的漸次程序		
(ii) 多元程序：在不同的程序間選擇最有效的執行相同的操作	多元程序	
(iii) 單一輸入—輸出過程：過程被視為是整體，由一個或是多個相同程序來作用	等價程序作為單一過程	過程
(iv) 過程概念：一個單一的可思考概念，由不同的符號所表徵，具有過程及概念的對偶性	Procept	物件(膠囊化)

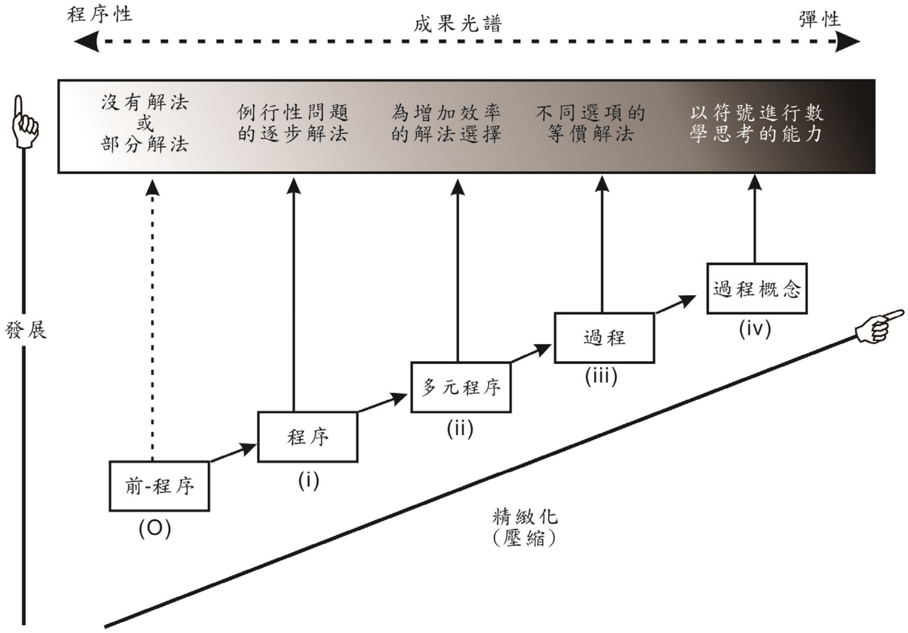


圖 1、漸進符號壓縮成果光譜（引自 Tall, 2008, p.6）

(二) 心智連結(mental connection)

一旦可思考概念建立後，學習者可透過「長期增強作用」(long-term potentiation) 的過程在可思考概念間進行連結(Gray & Tall, 2007)，並建立知識結構(Tall, 2013)，如 van Hiele 的幾何思考發展，從辨認到描述，爾後進入定義、演繹及歐幾里得證明，整數概念的發展中也有類似的脈絡，如分數、小數、有號數、實數及負數等，「知識結構」意指由個人所建構的知識連結本體，同樣具有對偶性質，一為表徵個人的知識，另一則表徵連結零碎知識間的結構，根據認知科學觀點知識結構可分為：程序性知識、陳述性知識、結構性知識。程序性知識是建立重複性程序的能力，亦為概念性知識之組成 (Hiebert&Lefevre, 1986)，陳述性知識是有關事務運作的方式及原理，結構性知識是針對制訂計劃或決策時，為可能失敗的原因或知識的缺失進行解題或擬訂高階策略，如問題解決策略中的進入(entry)、攻擊(attack)及回顧(review) (Mason, et al., 2010)。知識結構的形成幫助學習者統整與熟成可能不成熟的可思考概念，透過統整及鏈結，學習者可在長期增強作用下，在知識結構中對於以成形之可思考概念加以分類、命名及定義，因此，心智連結是統籌心智壓縮過程的核心。

三、數學的三個世界

(一)理論基礎

個人數學思考奠基在辨認(recognition)、重複(repetition)及語言(language)三者人類與生俱來之先天生成(set-before)能力，在後設經驗(met-before)上將這些能力逐漸加以精緻化，並透過心智壓縮過程形成可思考概念後，建構數學認知發展的知識結構，此一數學思考發展歷程攸關三個不同的心智世界（如圖 2），並與經年累月的數學活動發展息息相關(Tall, 2013)。第一個數學世界「概念具象世界」(conceptual-embodied world)或是「具象世界」(embodied world)，此世界成長自我們在與真實世界物件互動中，透過精緻性的語言描述及定義，使我們能將感官經驗加以轉化成心象，如「完美的直線」；第二個數學世界是過程—過程概念性(procedural-proceptual)的「符號世界」，此世界以符號表徵心智對於計算或程序加以膠囊化(encapsulated)或壓縮(compressed)的結果，使我們可以輕易地在「做」數學的過程及數學「思考」間變換；第三個世界是公理(axiomatic)「形式化」(formalism)的世界，此世界是以性質(properties)、形式化定義(formal definition)，作為明確說明公理性數學結構的基礎，並且以此數學結構定義新的概念、形式化的定理證明，以建構一致性的形式理論(Gray & Tall, 2007; McGowen, & Tall,2010; Tall, 2004, 2008, 2011, 2013)。數學思考的長期發展是藉由三個數學心智發展而來，具象世界的發展自長期對於物件的辨認、描述、定義及演繹的精緻化過程，符號世界的發展基礎為人類將「做」數學的過程壓縮成符號，如過程概念同時作為可操作的數學過程及可思考概念，公理化的世界則建基在理論集、定義及演繹之上。以下就具象化、符號化、形式化及綜合發展歷程敘述如下：

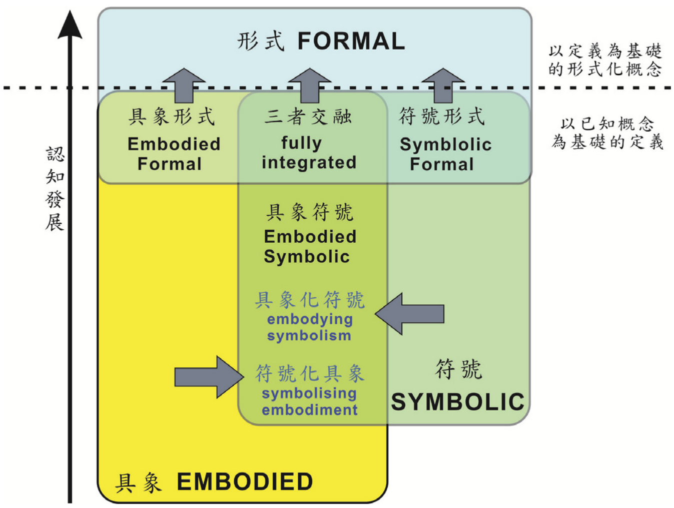


圖 2、數學的三個世界概念圖（引自 Tall, 2008, p.5）

1. 具象化(embodiment)階段

具象物件為主的活動是建基在知覺物件上去分析它們的性質，並用語言描述它們以及尋找關係，簡言之，具象化是以物理特性的裝置(equipment)用以表徵抽象化的數學概念(Tall, 2013)，舉例來說，如右手指出數線上 1 或-1 的位置，或是算盤上的算珠所代表的位值等。在物理性的世界存在諸多具象化的概念，從深究幾何圖形、注視一個形體或圖形外型的視覺表徵。隨著逐漸穩定的經驗、利用語言來描述並進行關於數學物件的性質推演，其知覺就會越發正確，最後則形成知識或概念。具象化是形成可思考概念(thinkable concept)的基礎，在 van Hiele 的幾何思考中發展通用概念(generic conceptions)，以及算術或代數中藉由心智壓縮形成符號性的過程—物件(process-object)(Tall,2007a)。

2. 符號化(symbolism)階段

在具象化階段的基礎下，符號化階段除可將符號進行心智壓縮外，並進而轉化成以符號行動為主的活動，是建立在運作物件的過程中。如計數 2＋3 的過程，在一開始，活動是透過真實物件實際操作的具象階段，在這期間，注意力轉移的焦點從物件的計數過程到已知集合中的數詞符號，這數詞符號的使用是允許像：3＋2 加的過程變成心智活動構想出 3＋2 的和是 5 的過程。過程中的算數（或者是接續的代數）皆利用符號去表徵心智概念以及運思數學過程，稱為過程概念(procepts)(Gray & Tall, 1994; Tall, 2007a)，因為它們兼具表徵和過程或概念，亦即過程概念可視為一種思考並公式化數學，同時是一種對解題進行計算的過程。在小學階段裡，以數的系統為例，最早是發生於具象活動，像計數後的結果形成數的概念、組合的活動形成和的概念、連加變成乘法概念、分的動作產生分數概念。這樣關於數的符號即起源於具象活動且以操作符號為過程，其間的關係建立則以雙向互動的方式存在於具象和符號之間。

3. 形式化(formalism)階段

形式化的數學概念通常是來自於不斷對形式化性質為主的活動進行反思的結果所致。形式化的數學概念僅僅能在基礎數學裡一段較長的醞釀期，基於具象階段和符號階段深究兩者概念之間的性質與關係慢慢被建構而成。也就是說，形式化的數學概念是透過明確的定義和進一步的性質經由形式化證明所演繹的。綜合來說，真實物件是我們日常生活中知覺和行動的一部份，早已存在於世界裡，於是我們可以藉由感官所覺察，並加以描述或論述它們的性質和關係，直到我們在心象上建構表徵感官世界的心智圖像，這即是數學的概念性具象世界。算術和代數的符號概念

世界是相當不同的，算術符號活動主要聚焦在真實物件可以被符號化的行動上，而代數符號活動則是符號從心智物件的本身可以被運作所構想出來的。至於在形式化公理世界裡，概念是來自於我們賦予的口語定義，然後利用形式化演繹的過程辯證它們的性質。總之，具象化、符號化以及形式化皆是以數學思考為基礎，經由認知主體不斷抽象化的歷程，使得關於數學思考的認知歷程更加精緻。

4. 綜合發展

學校數學建構在實體概念及行動的具象上：操作幾何圖形、分類、指涉、計數、分享等，一旦這些做數學的過程變成例行性的工作，學生即可將之符號化成為數字，並用以表徵操作程序或是心智構念上的整體，當注意力從具象轉移至符號操弄時，數學思考亦隨之轉移至過程概念的(proceptual)符號世界，簡言之，具象化賦予學校數學學習不同情境脈絡意義，而符號化提供算術及代數心智上的計算能力，稍後，形式化公理世界時則過渡自這些具象化及符號化的經驗，用以形成形式化定義及使用數學證明來證明數學定理，形式化證明的書寫是數學思考的最後一個步驟，它建構在具象化及符號化經驗的意涵上，而形式化的理論的基礎是公理(axiom)，通常能引導生成結構定理(structure theorems)，意即公理系統是較為精緻的具象化及符號化的結果(Tall, 2004, 2008)，。

(二) 運作模式及實例說明

1. 運作模式

數學思考以具象化世界作為基礎，隨著個體的經驗成長，個體的具象化思維得以變得更加精緻，過程概念世界成長自概念具象化的世界，符號同時表徵了過程以及概念。因此，符號概念性思考可同時運作於程序性思維與概念性思維之間，在不同數學領域間皆存在過程概念性的符號世界，如數、分數、小數、無理數、實數、代數，甚至是極限論(theory of limit)中的潛無窮(potential infinity)。個體對於真實世界的覺知，透過語言及經驗形成具象化數學思維，從行動中將概念膠囊化成為符號物件，進入過程概念的世界，過程概念的世界與具象化世界各自具有不同型式的證明(proof)結構，具象化世界的證明是透過思考實驗，過程概念世界的證明是透過算式的查驗或是利用代數表徵形成代數概念，而過程概念與具象化兩世界的思維奠定形式化數學世界的基礎。此三個世界是個體數學概念的終身成長歷程，從對於物件的覺知朝向具象化的世界，從行動朝向過程概念的世界，從形式化數學關係演繹朝向形式化公理的數學世界（如圖 3）。

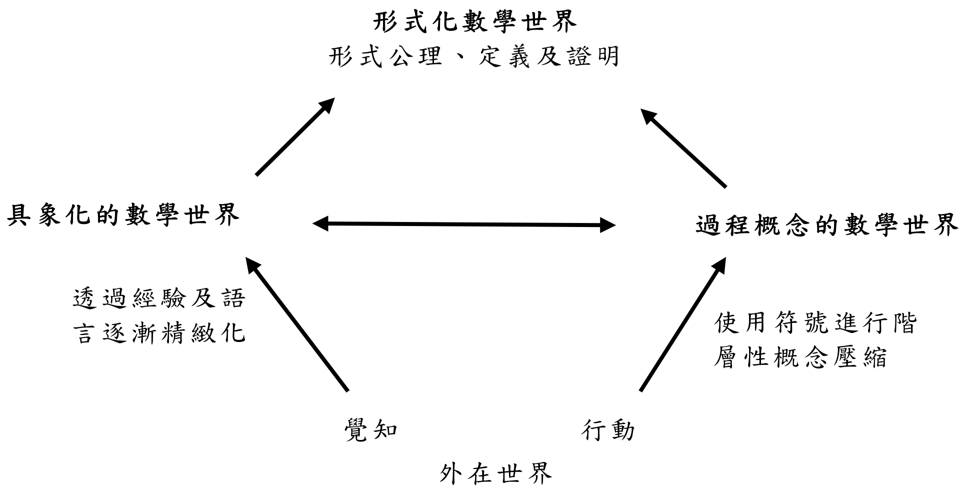


圖 3、數學的三個世界的運作模式

2. 實例說明

為了釐清上述證明的意思，下述將例舉三個涉及中小學數學領域中相關的具體例子加以說明。

例一：從「動作證明」到「歐式證明」用「三角形的內角和為 180 度」幾何證明例子，來區別不同序列的證明發展，圖 7 表示的具體證明，利用具體的三角形並將∠A 和∠C 剪下後，將 A、B、C 三角的頂點放在一起，可以發現三個角度正好可以排成一個平角，也就是三角形的內角和為 180 度，此乃屬於動作的(enactive)的證明，且這種證明屬於特定的三角形證明，無法推廣到一般化的結果。

而在上述這種動作的證明下，經過學生適當的反思以及思考實驗，再將之前具體操作的證明轉換成口語的歐式證明，圖 4 表示的即為歐式證明，圖中直線 DE 過 B 點且平行 $\overline{AC}$，因為內錯角相等，可得∠ABD 等於∠A、∠CBE 等於∠C，並且從圖中可知∠ABD+∠CBE+∠ABC=180 度，所以∠A+∠C+∠ABC=180 度，即可證出三角形的內角和為 180 度。

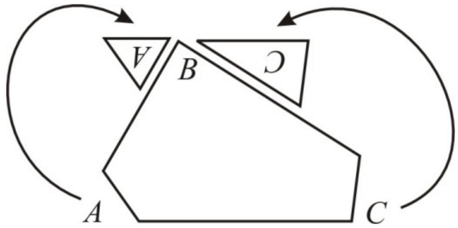


圖 4、實體證明的展示

這樣的證明歷程顯示具象的世界乃是一自然的環境可以讓學習者透過視覺化、語言、口語化等媒介，再經過反思，而使得具象的動作證明壓縮為歐式證明。若以 Tall 的三個世界之說，歐式證明之後必然會進階

到形式證明，根據 Tall 的詮釋，歐式證明與形式證明最大的差異在於前者奠基於形體的具象概念，且這些概念可以用口語地定義與視覺地描繪或想像；而形式證明則使用形式定義，這些定義不需要提出特定的具體表徵，如歐幾里得幾何原本中的公理化論述。

例二：數字 5 從計數至可思考概念的壓縮

如圖 6 為具象物件徵透過程序壓縮形成可思考概念的過程(Tall, 2013)，孩童從 5 個不同形狀的物件藉由應用計數程序知識，在計數過程中得到 5 個心智表徵物件的概念，並在心智壓縮過程形成數字 5 的可思考概念。此時數字符號 5 表徵自真實世界中透過對於實體物件的計數過程形成數字概念，此過程概念同時表徵與數字 5 相關的過程概念，如 4+1、2+3、3+2、7−2 等，此種過程概念性思考(proceptual thinking)有助於孩童達到彈性思考的目的。

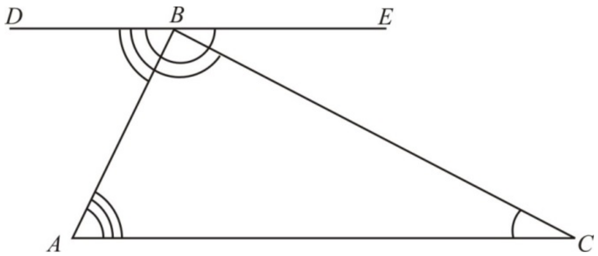


圖 5、歐氏幾何證明

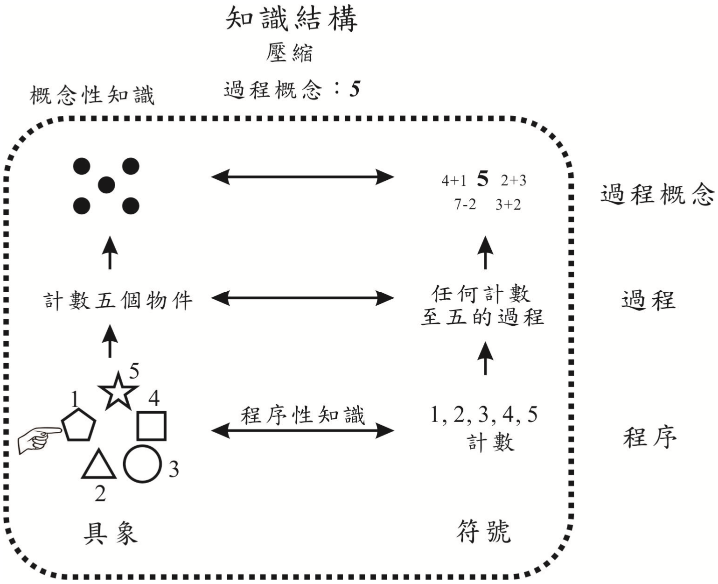


圖 6、知識結構的形成歷程

例三：n 為正整數，試求 $1+2+3\ldots+n=?$

證明一：具象化

以小石子按照下圖階段一排列，第一列 1 個、第二列 2 個…，依此類推至第 n 列 n 個，並將階段一的結果複製並旋轉九十度後與原階段一圖形加以組合成階段二之矩形得小石子總數為 $n(n+1)$，而原圖形結果為 $n(n+1)$ 的二分之一，因此，透過具象化的方式，可求得原問題之結果為 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

證明二：符號化

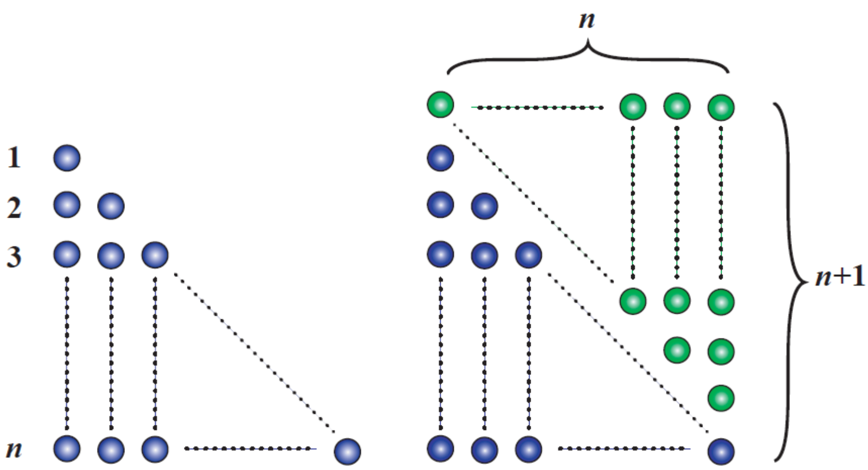
將 $1+2+3\ldots+n$ 重新書寫成 $n+\ldots+3+2+1$，將兩級數和的每一項個別相加，得結果為 n 個 $(n+1)$，其和為 $n\ (n+1)$，則所求為 $n(n+1)$ 的二分之一，即 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & 1+ & 2\ + & \cdots & +n \\
+) & n+ & (n-1)+ & \cdots & +1 \\
\hline
 & (n+1)+ & (n+1)+ & \cdots & +(n+1)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 1+2+\cdots+n=\ \frac{1}{2}n(n+1)$$

證明三：形式化

數學歸納法。



階段一：1+2+3…+n　　　　階段二：組合兩個階段一的結果

圖 7、具象化證明（引自 Tall, 2003, p.8）

(待續)