

摺出無理數(一)--(II)

李政憲

新北市立林口國民中學

【(續)科學教育月刊第 378 期第 45 頁之後】

參、「摺出無理數」課程說明

四、「摺出根號 n 螺線」課程

在學生學完前兩階段課程，了解根號 n 的組成與繪製後，教師說明第三階段課程將參考第二階段課程的摺法與所得的結果進行實作與討論。

在課程開始之前，每位學生應先準備 4 公分寬，長約 1 公尺的紙條（若寬為 5 公分，則長約 1.25 公尺）一張（可以市面上販售之收銀機空白紙捲逕行裁切，或是固定全開書面紙的長度，直接裁切每張寬約 4 公分的紙條亦可），發下後再配合教學簡報與實物投影機切換進行課程講解。底下依序說明課程內容與討論之數學問題，教師可參考圖 29 操作互動式簡報，逕行決定要與學生討論的問題，以及公布正確答案的時機：

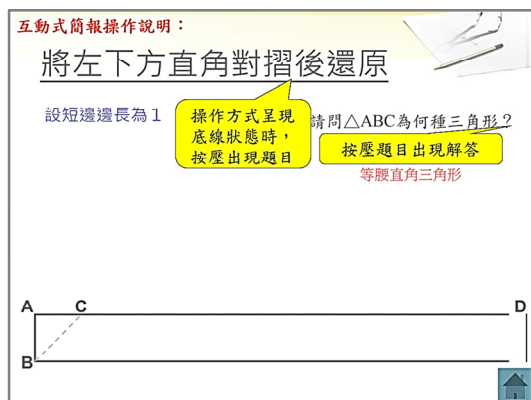


圖 29

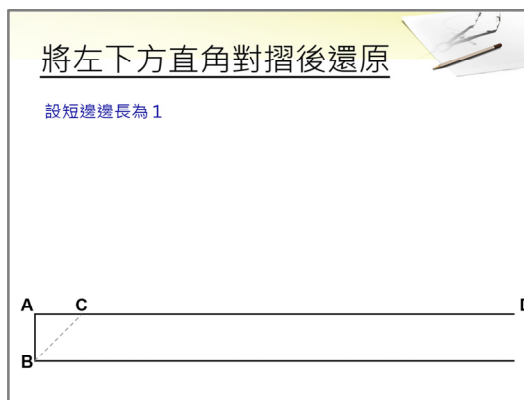


圖 30

1. 如圖 30，將左下方直角（ $\angle B$ ）對摺（即角平分線）後還原；
2. 如圖 31，固定 C 點將 BC 邊對齊 AD 邊往上摺，產生 B' 點；
3. 如圖 32，過 B' 點畫出（或摺出）垂直底邊的垂線 $\overline{B'G}$ ；

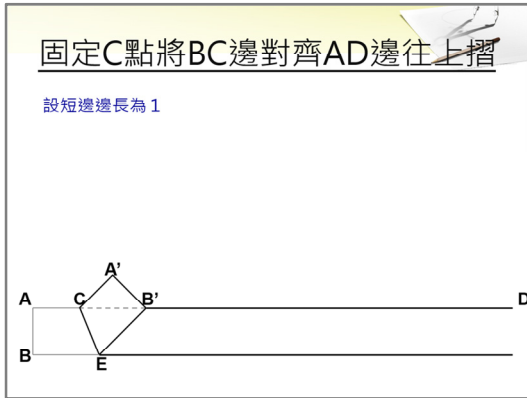


圖 31

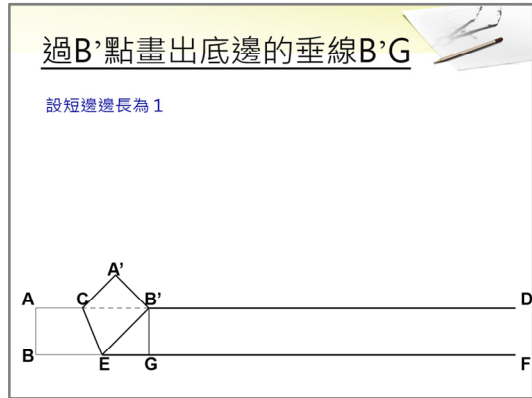


圖 32

上述三個步驟主要是參考「發票摺出根號 n 」課程而得，此時可與學生分別討論所產生的三角形為哪些三角形，以及圖 32 中 $\triangle B'EG$ 邊長比為多少的問題，因而讓學生發現與理解 $\triangle A'CB'$ 與 $\triangle B'EG$ 全等的結果。

4. 如圖 33，摺出 $\overline{B'G}$ 將多邊形 $A'CEGB'$ 往後翻摺；
5. 如圖 34，將圖 33 連接 \overline{CG} 後，再固定 C 點將 \overline{CG} 摺至上方對齊 \overline{CD} 邊；

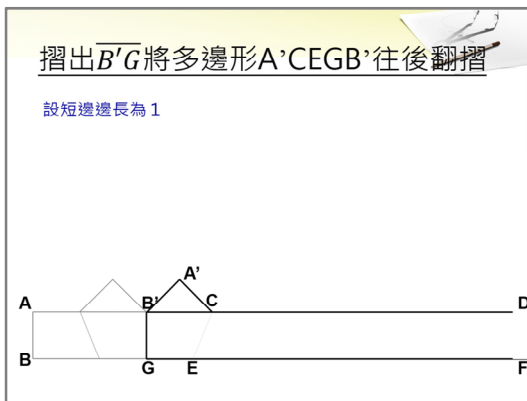


圖 33

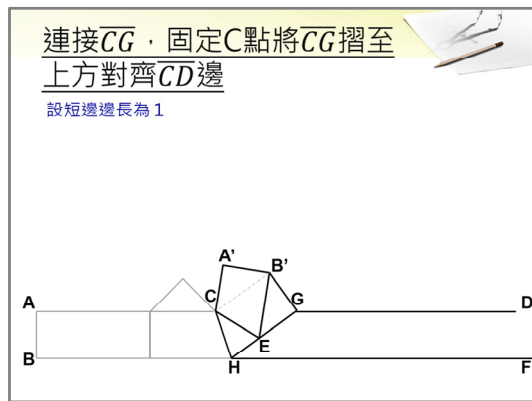


圖 34

上述兩個步驟與之前「發票摺出根號 n 」最大的差異性在於可利用將五邊形 $A'CEGB'$ 沿著 $\overline{B'G}$ 往後翻摺的動作，讓新產生的直角三角形 $B'CG$ 摺至 \overline{AD} 邊上；而這兩個步驟可與學生討論計算五邊形 $A'CEGB'$ 的邊長有幾種，並讓學生理解 $\triangle CGH$ 仍是等腰三角形。值得一提的是在實際教學分享時，起先學生或現場教師認為五邊形 $A'CEGB'$ 的邊長有 3 至 4 種，等到配合手中模型實際操作對照後，便可理解到只有兩種長度的結果。另外， \overline{CE} 的長度因涉及頂角為 45 度的等腰三角形底邊長度計算，建議教師可於九年級進行教學時，提供給程度較好的學生討論後發表，而八年級學生因缺乏先備知識則視情況補充。

6. 如圖 35，過 G 點畫出（或摺出）垂直底邊的垂線 \overline{GI} ；
7. 如圖 36，摺出 \overline{GI} 將多邊形 $A'CEGB'$ 往後翻摺；

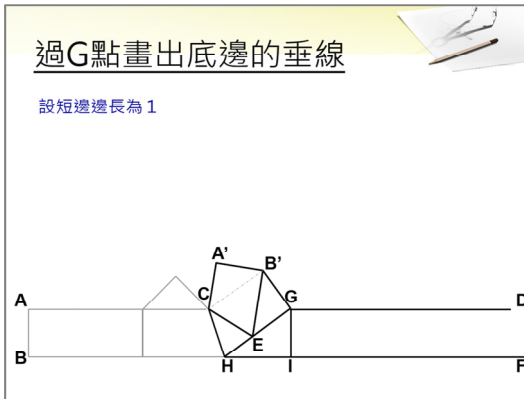


圖 35

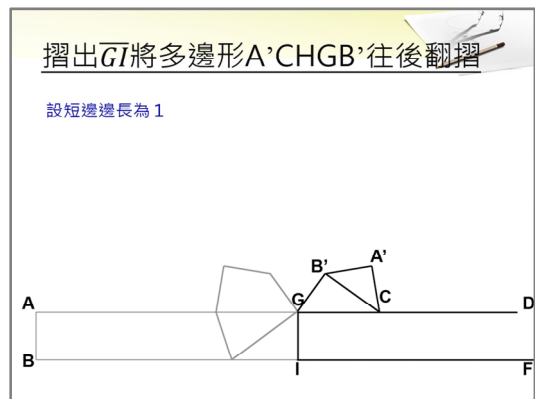


圖 36

上述兩個步驟主要在重覆步驟 4 和 5「後摺後連線，並將連線段摺至上方邊上」的過程，一般而言反應較快的學生，會在這兩個步驟教學完畢後即可繼續地完成作品(註 10)；在此處可與學生討論的問題是若設短邊 \overline{AB} 的邊長為 1，試計算出 \overline{HI} 的長度與 $\triangle BCG$ 的邊長比。另外教師可引導學生發現正反面的貝殼螺線形狀不相同的現象，而且反面的形狀將會產生斜邊逐漸增加的 \sqrt{n} 螺線作品。

為方便教師講解與學生作摺紙前後圖形的比較，筆者在設計簡報時特別將原始紙條位置與前一步驟的外觀保留為灰色線段（底下各圖亦同），教師亦可於課堂授課時，直接投射簡報內容於黑板上或是搭配電子白板使用，相信可使學生更易理解。

8. 如圖 37，將圖 36 連接 \overline{CI} 後，固定 C 點將 \overline{CI} 摺至上方對齊 \overline{CD} 邊；
9. 如圖 38，過 I 點畫出（或摺出）垂直底邊的垂線 \overline{KI} ；

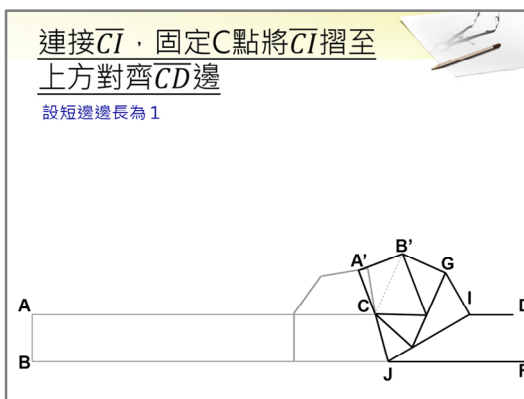


圖 37

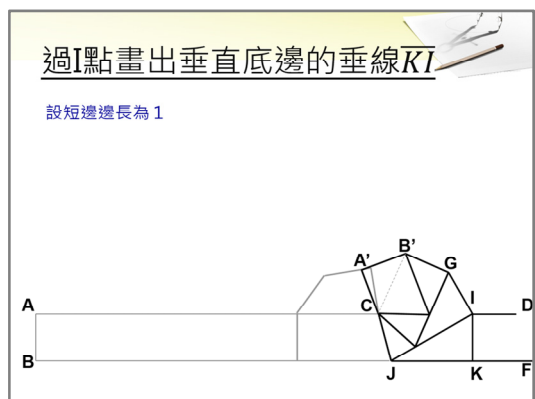


圖 38

上述兩步驟延續之前上摺與後翻步驟，並透過 $\triangle CIJ$ 與 $\triangle IJK$ 分別討論 \overline{IJ} 與 \overline{JK} 的長度，使學生體會長度愈摺愈長的感覺。

10. 如圖 39，摺出 \overline{KI} 將多邊形 $A'CJKIB'$ 往後翻摺；

11. 如圖 40，將圖 39 連接 \overline{CK} 後，固定 C 點將 \overline{CK} 摺至上方對齊 \overline{CD} 邊；

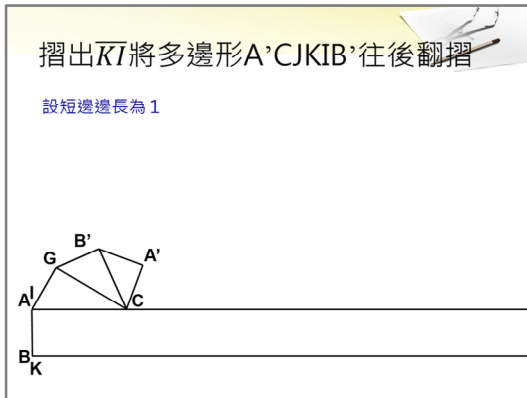


圖 39

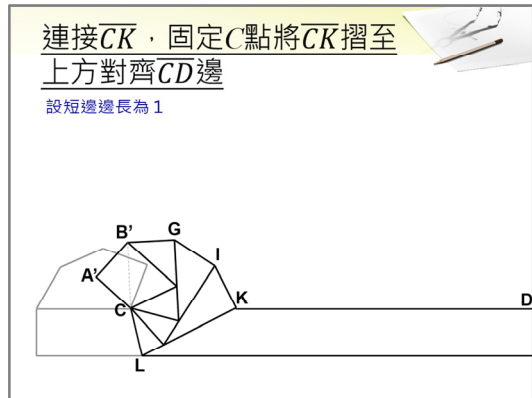


圖 40

這兩個步驟由於畫面寬度不足，筆者作了一個向左拉扯的動畫，接著與學生討論圖 40 中 \overline{KL} 的長度，藉以引導學生理解正面(如圖 40)的 \overline{KL} 即為反面(如圖 39)的 \overline{CK} 長。

12. 如圖 41，過 K 點畫出(或摺出)垂直底邊的垂線 \overline{KM} ；

13. 如圖 42，摺出 \overline{KM} 將多邊形 $A'CLMKIGB'$ 往後翻摺；

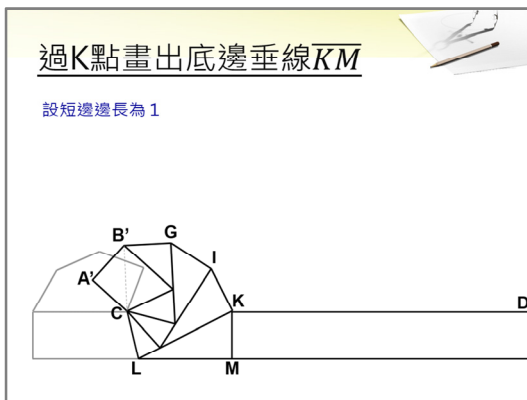


圖 41

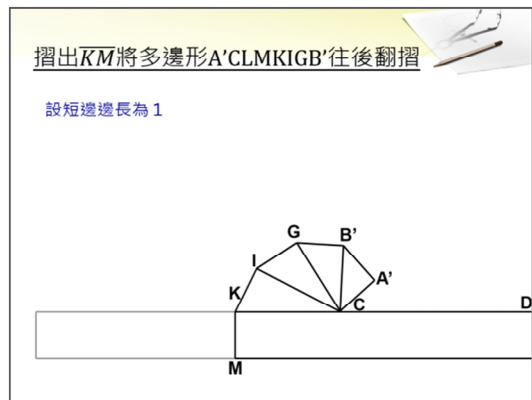


圖 42

上述兩個步驟可與學生討論正面(如圖 41)的 \overline{LM} 長度以及反面(如圖 42) $\triangle A'B'C$ 、 $\triangle B'CG$ 、 $\triangle GCI$ 與 $\triangle ICK$ 的面積比分別是多少的問題。

14. 如圖 43，將圖 42 連接 \overline{CM} 後，固定 C 點將 \overline{CM} 摺至上方對齊 \overline{CD} 邊；

15. 如圖 44，過 M 點畫出(或摺出)垂直底邊的垂線 \overline{MT} ；

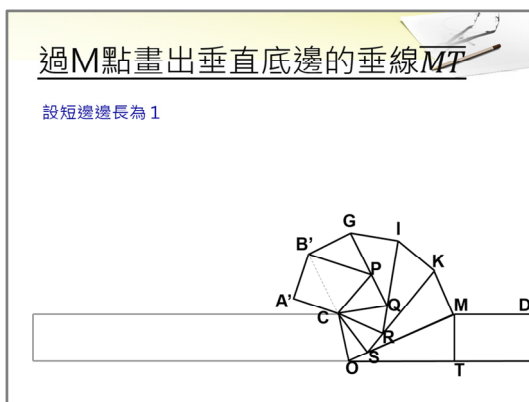


圖 43

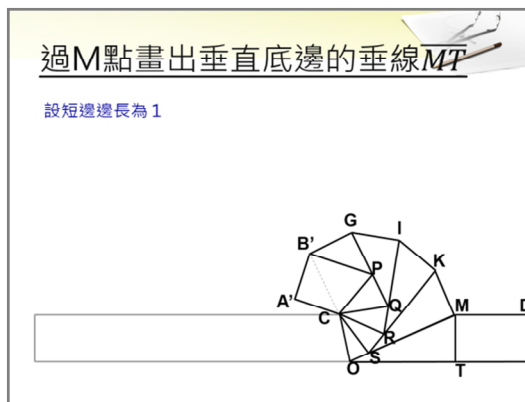


圖 44

上述兩個步驟可與學生討論 $\triangle B'GP$ 、 $\triangle GIQ$ 、 $\triangle IKR$ 與 $\triangle KMS$ 的面積比與 $\triangle MOT$ 的面積各是多少的問題，由於正面的三角形關係較不易觀察而得，建議教師在此可以放慢速度，多點讓學生觀察或是討論的時間。

16. 如圖 45，將圖 44 摺出 \overline{MT} 將多邊形 $A'COTMKIGB'$ 往後翻摺；

17. 如圖 46，連接 \overline{CT} 後，固定C點將 \overline{CT} 摺至上方對齊 \overline{CD} 邊；

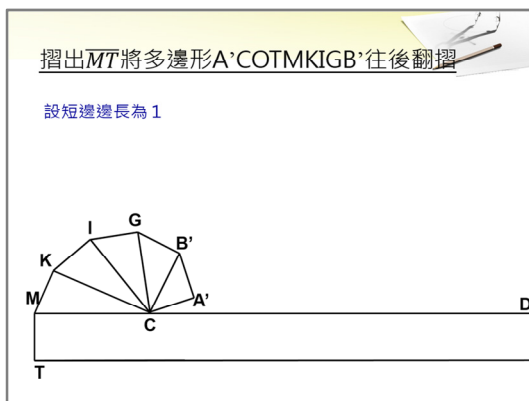


圖 45

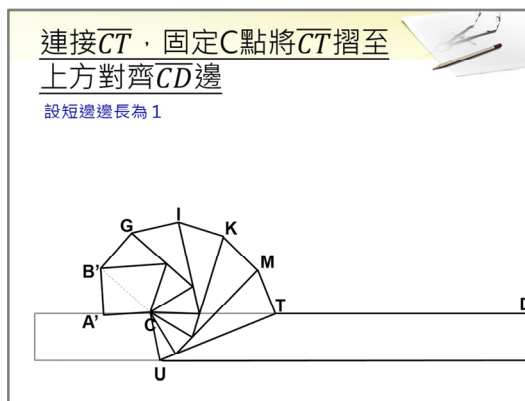


圖 46

上述兩個步驟是接下來要反覆翻摺前最後一次比較正反面圖形的差異性，此時學生應可發現正面（圖 46）的直角三角形與反面（圖 45）一樣，也有斜邊逐漸增加的特性；這裏可討論的是圖 45 的直角三角形關係與圖 46 中的小三角形是否為等腰三角形的問題。

18. 如圖 47，過 T 點畫出（或摺出）垂直底邊的垂線 \overline{TV} ；

19. 如圖 48，按照（摺單位長）反摺 \rightarrow （摺至邊上）順摺方式持續進行

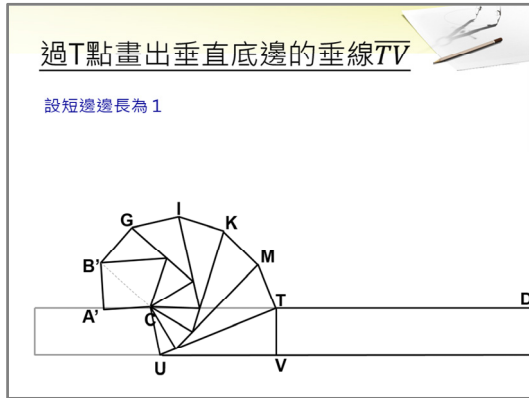


圖 47

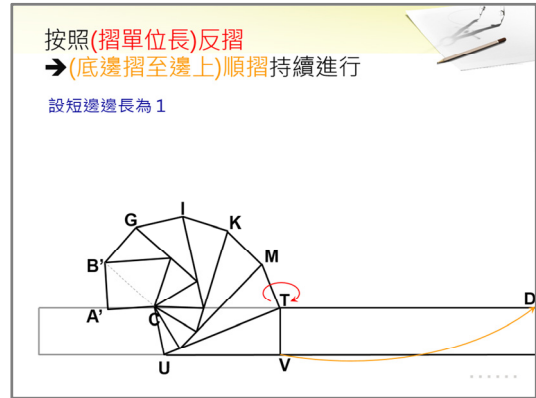


圖 48

在圖 47 可討論目前所使用紙條的總長度（此問題可讓學生打開作品觀察其規律性），此時學生的紙條長度應已差不多用盡，教師可利用底下簡報說明，若紙條長度夠長，可如圖 48 沿正反面反覆翻摺的步驟持續下去，最後完成接下來圖 49 與圖 50 的結果。

20. 如圖 49，可得正面結果如下：

21. 如圖 50，翻面後可得反面結果如下：

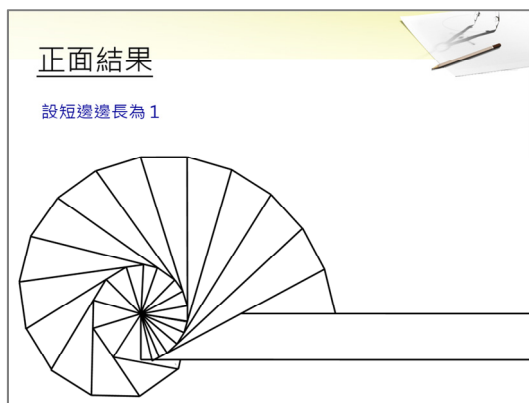


圖 49

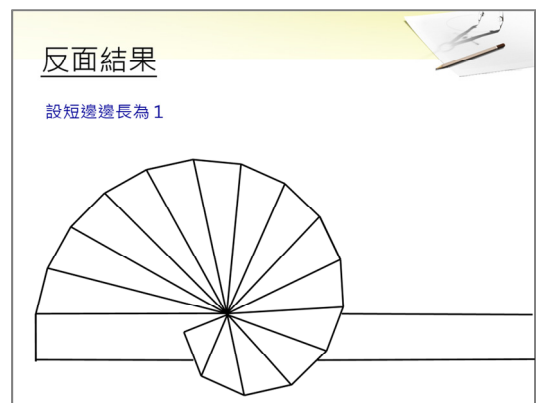


圖 50

根據實際計算，若要完成上圖 49 與圖 50 的成品約需原短邊邊長的 88 倍。教師可帶領學生推導出其算式，並計算圖 49 及圖 50 所有直角三角形面積和並比較其差異性。

而在作品完成後，教師可指示學生將整張紙條攤開以觀察其規律性，並且以同一方向（非一正一反）進行收納可方便攜帶（如此收納的作品兩面均會呈現反面結果，如圖 51）。若學生有興趣要挑戰更困難任務，教師不妨提供更長的紙捲，完成後黏貼於珍珠板上呈現如圖 52 的作品，藉此訓練學生耐心並作為教室佈置用途，可謂一舉兩得。



圖 51



圖 52

以上關於「摺出根號 n 」課程大致介紹至此，其餘有關此課程的實作前後測、師生回饋與此課程的相關延伸，因礙於篇幅受限，將於下回文章再行分享。

註解

註 10 若教學時間不足，教師亦可確認學生了解如何完成後作為回家作業，並將作品帶至課堂上進行討論。

參考文獻

- 林福來(1997)：教學思維的發展：整合數學教學知識的教材教法(1/3)。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告。
- 鄭英豪(2000)：學生教師數學教學概念的學習：以「概念啟蒙例」的教學概念為例。國立台灣師範大學數學研究所。博士論文，14-17 頁。
- 饒見維 (1996)。國小數學遊戲教學法，第 1 版，五南圖書公司，台北市。
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, pp.67-68.
- 李政憲(2011)：『摺紙中學數學』之紅包花花。科學教育月刊 337 期。
- 李政憲(2011)：『摺紙中學數學』之名片試金石。科學教育月刊 345 期。
- 李政憲(2014)：淺談實作評量——從摺紙中學習數學。科學教育月刊 367 期。
- 李政憲(2014)：長方體被平面截出三角錐各面面積間的平方關係。科學教育月刊 369 期。
- 堀江千代子 (2002)。永無止境的數學故事。益智工房，新北市 (已絕版)。
- 布施知子 (2012)。Spiral : Origami | Art | Design。Freising Germany:ViereckVerlag.