中學生通訊解題第八十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8901

設 m, n 為實數，$f(x)=x^2+mx+n$，若不等式 $|f(x)|>2$ 在區間 $[1,5]$ 上無解，

(1) 求 $f(1)-2f(3)+f(5)$的值。

(2) 求所有的數對(m, n)。

簡答：(1) 8　；(2) $(-6,7)$

參考解答：

(1) $f(1)-2f(3)+f(5)=1+m+n-2(9+3m+n)$
$+25+5m+n=8$

(2) 【方法一】

假設存在這樣的實數對(m,n)，則 $|f(x)|\le 2$，對一切 $x\in[1,5]$恆成立，分別取 $x=1,3,5$，得

$|f(1)|=|1+m+n|\le 2$，

$|f(3)|=|9+3m+n|\le 2$，

$|f(5)|=|25+5m+n|\le 2$

又 $f(1)-2f(3)+f(5)=8$，則

$8=|f(1)-2f(3)+f(5)|$

$\le|f(1)|+2|f(3)|+|f(5)|$

$\le 2+2\times 2+2=8$

所以 $\begin{cases} f(1)=f(5)=2 \\ f(3)=-2 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} 1+m+n=25+5m+n=2 \\ 9+3m+n=-2 \end{cases}$，

得 $m=-6$，$n=7$。

當 $m=-6$，$n=7$ 時，$f(x)=x^2-6x+7$

在 $x\in[1,5]$上滿足 $|f(x)|\le 2$

综上所述，所求實數對$(m,n)=(-6,7)$。

(3) 【方法二】 (王同學的解法)

由題意$-2\le f(x)=x^2+mx+n\le 2$，對一切 $x\in[1,5]$恆成立

分別取 $x=1,3,5$，得$-2\le 1+m+n\le 2$，$-2\le 9+3m+n\le 2$，$-2\le 25+5m+n\le 2$

得 $-3\le m+n\le 1$ …①

$-11\le 3m+n\le -7$…②，

$-27\le 5m+n\le -23$…③

由②－①及③－② 得$-6\le m\le -2$，

$-10\le m\le -6$，所以 $m=-6$，

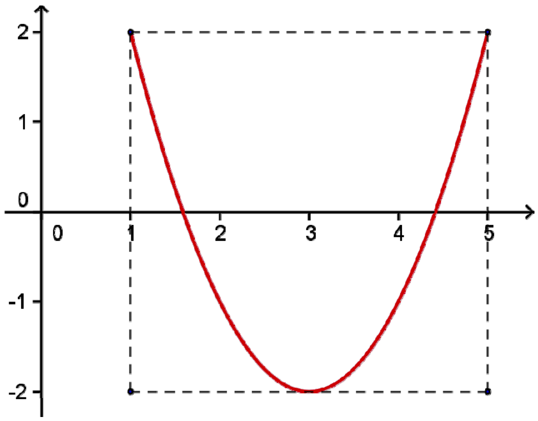
再代入①②，得 $n=7$ 當 $m=-6$，$n=7$ 時，$f(x)=x^2-6x+7$

在 $x\in[1,5]$上滿足 $|f(x)|\le 2$

综上所述，所求實數對$(m,n)=(-6,7)$。

【解題評註】

1. 此題【方法一】利用的代數性質主要為：設 a、$b\in R$，則 $|a+b|\le|a|+|b|$，等號成立 $\Leftrightarrow$ $ab\ge 0$
2. 此題【方法二】利用不等式的運算，滿足三個不等式，以找出 m、n
3. 所求的二次函數圖形如下，並且過點$(1,2)$，$(3,-2)$，$(5,2)$。



問題編號
8902

已知 x, y 均為負整數，且滿足 $y=\dfrac{10x}{100-x}$，求 y 的所有解。

簡答：$-9,-8,-6,-5,-2$

參考解答：

(1) $y=\dfrac{10x}{100-x}$

$\Rightarrow y(100-x)=10x$

$\Rightarrow 100y-xy=10x$

$\Rightarrow x=\dfrac{100y}{y+10}$ ....(a)

$=100-\dfrac{1000}{y+10}$............(b)

(2) 由(a)且 x, y 均為負整數，得 $y+10>0$

$\Rightarrow -10<y<0$

$\Rightarrow 0<y+10<10$

(3) 由(b)與(2)可知: $y+10$ 為1000的正因數

$\Rightarrow y+10=1,2,4,5,8$

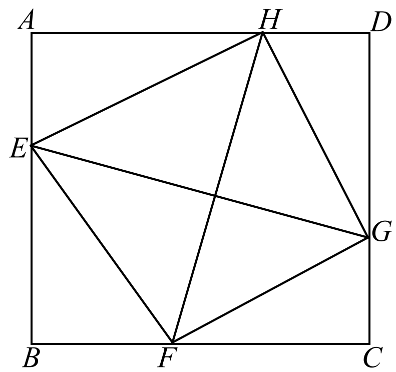
$\Rightarrow y=-9,-8,-6,-5,-2$。

【解題評註】

從此式 $y=\dfrac{10x}{100-x}$ 中，難以觀察或計算出 y 值。因此必須經過適當轉換成如 $x=\dfrac{100y}{y+10}$ 形式，根據正負關係，估計出 y 的範圍，進而討論出 y 的解。

問題編號
8903

設 $EFGH$ 為正方形 $ABCD$ 的內接四邊形，$\angle BEG$ 與 $\angle CFH$ 均為銳角，若 $\overline{EG}=15$，$\overline{FH}=20$，四邊形 $EFGH$ 的面積為 125，求正方形 $ABCD$ 的面積？



簡答：220

參考解答：

在正方形 $ABCD$ 中，分別過 E、F、G、H 作對邊之垂線，得矩形 $PQRT$，設正方形

$ABCD$ 的邊長為 a，$\overline{PQ}=b$，$\overline{QR}=c$，由畢氏定理知 $b=\sqrt{15^2-a^2}$ ，$c=\sqrt{20^2-a^2}$

$\because$ ▲AEH = ▲TEH，▲BEF = ▲PEF，

▲CFG = ▲QFG，▲DGH = ▲RGH

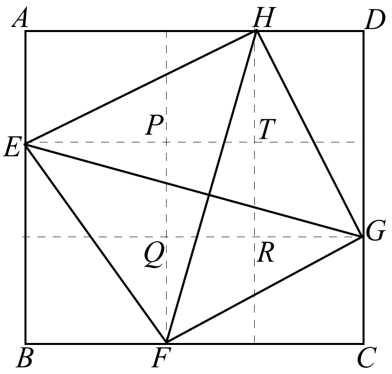
$\therefore$ ■$ABCD$ + ■$PQRT$ = 2■$EFGH$

$\Rightarrow a^2+bc=2\times 125$

$\Rightarrow \sqrt{15^2-a^2}\cdot\sqrt{20^2-a^2}=250-a^2$

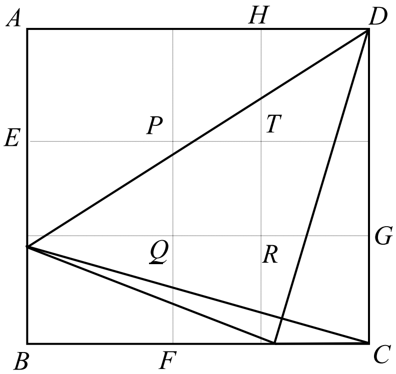
平方$\Rightarrow 125a^2=27500$

$\Rightarrow$ ■$ABCD=a^2=220$。



【解題評註】

國昌國中的吳同學，則是將 $\overline{EG}$ 向下平移使得點 G 與點 C 重合，將 $\overline{HF}$ 向右平移使得點 H 與點 I 重合，再利用平移後四邊形面積不變，求得正方形面積。吳同學能利用面積的基本性質簡化問題，也是很好的作法。



問題編號
8904

現有六位評審及九位選手，每位評審皆對這九名選手評分，分數分別為 1,2,3,4,5,6,7,8,9 分，各出現一次；對每個選手而言，皆會得到六個分數，而這六個分數中最大與最小的值差不超過 3，問這九位選手中最低分的選手最多會幾分？

簡答：16 分

參考解答：

設有 a 個選手得到過 1 分，而這九位選手中最低分的選手得到 b 分。

(i) 若 $a=1$，表示只有一人得到過 1 分，故他就是最低分且 $b=1\times 6=6$。

(ii) 若 $a=2$，表示恰有二人得到過 1 分，所以至少有一人得到過三次 1 分，故 $b\le 1\times 3+4\times 3=15$。

(iii) 若 $a=3$，表示恰有三人得到過 1 分，為了讓最低分的選手高分一些，那三個人剩餘的分數都用 3 或 4 分去填滿，故 $b\le \frac{1}{3}\times 6\times(1+3+4)=16$。

(iv) 若 $a=4$，表示恰有四人得到過1分，而這四個人的所有分數都是 $1\sim 4$ 分，而六位評審總共恰能夠給出 24 個 $1\sim 4$ 分，故 $b\le \frac{1}{4}\times 6\times(1+2+3+4)=15$

(v) 若 $a\ge 5$，表示至少有五人得到過 1 分，而這些人的所有分數都是 $1\sim 4$ 分，但是六位評審總共只能夠給出 24 個 $1\sim 4$ 分，故不可能。

而以下是可以達到 $b=16$ 的例子。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
甲	1	4	3	2	5	6	8	7	9
乙	1	4	3	2	5	6	8	7	9
丙	3	1	4	2	5	7	6	8	9
丁	3	1	4	5	2	7	6	8	9
戊	4	3	1	5	2	8	7	6	9
己	4	3	1	5	2	8	7	6	9

問題編號

8905

已知 $x_1^7+x_2^7+....+x_{98}^7+x_{99}^7-x_{100}^7$ 的個位數字是 4，其中 $x_1,x_2,...,x_{100}$ 是 1,2,…..,100 中的 100 個不同的數，且 x_{100} 是介於 50 到 100 的質數，試求 x_{100} 的值。

簡答：67,97

參考解答：

個位數字為 1,2,…..,9,0 的正整數經過 7 次方後，個位數字變成 1,8,7,4,5,6,3,2,9,0，再因 $x_1,x_2,...,x_{100}$ 是 1,2,…..,100 中的 100 個不同的數，所以 $x_1^7+x_2^7+.....+x_{98}^7+x_{99}^7+x_{100}^7$ 的個位數字是 0，根據題意，我們知道 $2x_{100}^7$ 的個位數字是 6（即 x_{100}^7 的個位數字是 3,8），所以 x_{100} 的個位數字是 7,2，加上 x_{100} 是介於 50 到 100 的質數，故 x_{100}^7=67,97。