四階方陣牌點的點對稱與線性轉換關係

顏錦偉 [1*] 柳賢 [2]

[1] 國立高雄師範大學 科學暨環境教育研究所

[2] 國立高雄師範大學 數學系

壹、前言

數學上有關四階方陣的研究有很多，有的稱為「魔方陣」、「歐拉方陣」、「幻方陣」，不外乎探討方陣中裡的每行、每列和兩對角線的數字和相等或是不能出現相同的數字等。現今流行的「數獨」遊戲，其實是方陣遊戲的擴充版，由三階方陣推演至九階方陣，讓現代的人在生活中，隨時享受遊戲中的成就與喜悅。然而，數獨號稱是一種數字遊戲，卻用不到一丁點兒數學，也不需要任何數學運算（譬如加法或乘法）。不過，數獨倒是提供數學家和電腦學家許多挑戰性的課題─將數字代換成另外九種不同的符號，例如字母、顏色、圖像等（Jean-Paul Delahaye，2006）。

一次研習活動中，有一位教育部中央團數學輔導員問了一個有關四階方陣的問題：「你能不能將撲克牌理的 A、J、Q、K 與搭配的四種不同花色，共 16 張牌放入 4×4 的方陣中，並使得方陣中的每一行、每一列與兩條對角線的地方，不能出現相同的英文字母與花色？」在解題過程中，我用「嘗試錯誤」法，一一去排，要花不少時間解答，心想：「有沒有一套解題策略，能很快的解出答案？」

曹亮吉（2003）認為，任何一個特別的現象，背後都有其發生的依據及規律。於是，本文僅就四階方陣的觀察與應用，運用科學技能－觀察、推理、思考，進行一連串的探究，不涉及四階方陣的性質問題。

貳、問題表徵理論

Heddens（1984）將學生的學習階段區分為具體、半具體、半抽象、抽象四個表徵階段，認為學習者必須在具體階段就能夠將新的知識內化，才能有利於後續學習，並依循這四個步驟將所學的新知識形成抽象化的表徵，建立真實世界與抽象世界之間的連結，以增進對數學概念的理解。Kaput（1987）從表徵內容的觀點提出四種不同的表徵系統：

1. 認知和知覺表徵、
2. 解釋性表徵、
3. 數學內的表徵、
4. 外在符號系統表徵，

前三種為內在表徵，認為數學學習同時受到內在和外在表徵所影響。

*為本文通訊作者

Lesh、Post 及 Behr（1987）則從溝通的觀點提出五種不同的表徵形式：1.真實情境、2.教具模型、3.圖像、4.語言、5.書寫符號，並且強調表徵間轉換的重要性，亦即採用適當的表徵形式，進行詮釋問題及解決問題。

Lewis 與 Mayer（1987）指出，學習者在解題上發生困難主要是發生在問題表徵階段，這種現象常見於學生面對問題不知所措時。有效解題的前提是認識表徵，是影響學習者能否順利解題的重要關鍵，所以，表徵是解決問題的重要元素。因此，學習者若能將問題轉譯成表徵形式，並理解不同形式的數學表徵轉換過程，透過思考和推理，可以有效協助學習者順利解題，及理解數學的概念。

參、四階方陣

若利用高中數學的排列公式計算，四個不同的元素排列在一起有 4！的可能情形，4！=4×3×2×1=24，共 24 種排列情形。作為一個數學教育工作者面對一個問題，可以像科學家一樣，進行假設、預測、觀察與論證結果，去發現與找出數學定理或原則，以提升數學的價值。

林燈茂（2011）在「點色皆獨」的文章裡，所提出之「點色皆獨」 牌陣配置活動，不僅有建構「點色皆獨」牌陣之要件、體驗「外形互異但數學結構都相同」之具體意涵、輕鬆經歷「同步從多個面向已出現的牌點（pip）和花色（suit）等線索來進行推理與監控」的數學思考之旅等設計，也有以任一個「點色皆獨」牌陣為原型，經由牌陣之系列變換衍生出另類「點色皆獨」牌陣及轉化為「四階魔方陣」之體驗設計。林燈茂指出四階方陣的有效排列方法，先指定 1、2、3、4 作為一組基底，然後在 4×4 的數字方陣中，分別將這組基底放入橫列、直行、對角線和區塊等 4 種不同的位置（如圖 1），藉由數理邏輯關係，找出其餘空白地方的數字來。

從圖 1 中四階方陣的每一種不同的位置，都可以找出 24 種排列情形（如圖 2），與數學公式所求一樣。

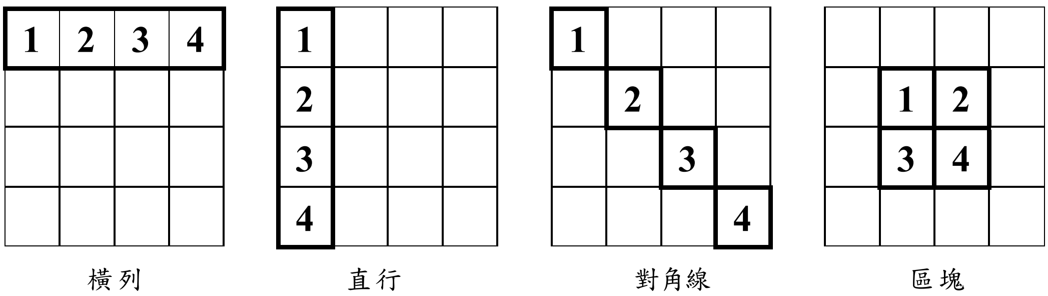

圖 1：四階方陣不同位置的基底

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

表 1

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

表 2

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

表 3

1	3	4	2
2	4	3	1
3	1	2	4
4	2	1	3

表 4

1	4	2	3
3	2	4	1
4	1	3	2
2	3	1	4

表 5

1	4	3	2
2	3	4	1
4	1	2	3
3	2	1	4

表 6

2	1	3	4
4	3	1	2
1	2	4	3
3	4	2	1

表 7

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

表 8

2	3	1	4
4	1	3	2
3	2	4	1
1	4	2	3

表 9

2	3	4	1
1	4	3	2
3	2	1	4
4	1	2	3

表 10

2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4

表 11

2	4	3	1
1	3	4	2
4	2	1	3
3	1	2	4

表 12

3	1	2	4
4	2	1	3
1	3	4	2
2	4	3	1

表 13

3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4
4	2	3	1

表 14

3	2	1	4
4	1	2	3
2	3	4	1
1	4	3	2

表 15

3	2	4	1
1	4	2	3
2	3	1	4
4	1	3	2

表 16

3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4

表 17

3	4	2	1
1	2	4	3
4	3	1	2
2	1	3	4

表 18

4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2
2	3	4	1

表 19

4	1	3	2
2	3	1	4
1	4	2	3
3	2	4	1

表 20

4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1
1	3	4	2

表 21

4	2	3	1
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2

表 22

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

表 23

4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3

表 24

圖 2：四階方陣的 24 種排列情形

本文旨在 4×4 的方陣中，運用一組 1、2、3、4 為基底的其中一個排列情形，處理兩個符號表徵系統，即英文字母與花色，藉由數字與英文字母、數字與花色之間的轉換，將兩個符號表徵系統結合在同一個表徵系統裡。

肆、四階方陣之牌點對稱與線性轉換關係

在四階方陣中，要同時處理兩個符號表徵系統是困難與繁瑣的，於是，先從一個符號表徵系統去找答案，將數字視為一個符號表徵，透過數字的排列，瞭解到符號表徵可以書寫操作，也可以邏輯思考，更可以轉譯詮釋。從圖 2 的 24 種排情形，由一組基底去推演出其餘 12 個數字，而形成一個方陣中符合每行、每列和兩對角線不能出現相同的數字，我們得到以下幾個結果：

一、一組基底的存在

從圖 2 的四階方陣 24 種排列情形觀察出，在 4×4 的數字方陣中，每一橫列、

每一直行、每一對角線和每一區塊，都會出現一組基底 1、2、3、4，而且每一種方陣都是獨一無二的。

二、具有點對稱關係

從圖 2 的四階方陣 24 種排列情形中，根據每一橫列、每一直行和每一對角線 1、2、3、4 的位置，經由觀察、推理與符號表徵的書寫操作，我們得到每一個方陣都出現兩個區域的對稱系統，並呈現出「點對稱」的關係，這種點對稱關係以表 1 的排列情形來解釋，見圖 3。

這個對稱系統－點對稱關係，讓我們在建構一個 4×4 的數字方陣，提供很快速且正確的方法，做法是：

1. 寫出一組基底 1、2、3、4 在第一列(也可能是 3、1、2、4…或其他)。
2. 第一個區域的第二列，依據點對稱關係，迅速得出 4、3、2、1。
3. 第二個區域的第一列和第二列的第一個位置，只有 2 和 3，然右對角線已出現 2，所以，第一列的第一個位置寫 2，第二列寫 3。
4. 同理，第二個區域的第一列和第二列的第三個位置，只有 1 和 4，然左對角線已出現 1，所以，第一列第三個位置寫 4，第二列寫 1。
5. 第二個區域的第二列，依據點對稱關係，迅速得出 3、4、1、2。

圖 3 只是一種兩個區域的對稱系統，它呈現出上下型的兩個區域，若將該方陣向左旋轉 90 度，我們也可以得到另一種左右型的兩個區域對稱系統，以表 24 向左旋轉 90 度的排列情形來看，見圖 4。

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

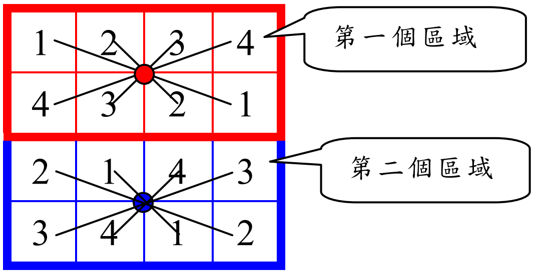

圖 3：兩個區域的對稱系統 1

1	4	2	3
2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2

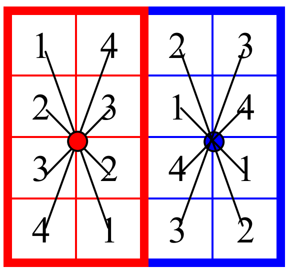

圖 4：兩個區域的對稱系統 2

三、利用線性關係解題

從圖 3 得到的一個符號表徵系統，藉由符號之間的一對一轉換過程，即數字 1→A 或 1→♠，符號與符號之間的轉換是解決問題的一種途徑，清楚表徵系統的位置結構，接著利用數學上所謂的「線性關係」轉換，完成另一個新的符號表徵系統，形成符號表徵系統之間的互相轉換關係，如下說明：

1. 我們運用這 24 種排列情形，先對 A、J、Q、K 作線性轉換，1→A、2→J、3→Q、4→K，藉由表 1 的排列情形，轉換成英文字母，如圖 5：

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

⇒

A	J	Q	K
K	Q	J	A
J	A	K	Q
Q	K	A	J

圖 5：第一次（英文字母）線性轉換

2. 接著，對四種不同花色作線性轉換， 1→♠、2→♥、3→♣、4→♦，藉由表 1 的排列情形，轉換成不同花色，如圖 6：

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

⇒

♠	♥	♣	♦
♦	♣	♥	♠
♥	♠	♦	♣
♣	♦	♠	♥

圖 6：第二次（不同花色）線性轉換

3. 現在，將以上兩次線性轉換的結果圖 5 和圖 6 結合在一起，如圖 7：

A	J	Q	K
K	Q	J	A
J	A	K	Q
Q	K	A	J

+

♠	♥	♣	♦
♦	♣	♥	♠
♥	♠	♦	♣
♣	♦	♠	♥

=

A♠	J♥	Q♣	K♦
K♦	Q♣	J♥	A♠
J♥	A♠	K♦	Q♣
Q♣	K♦	A♠	J♥

圖 7：兩次線性轉換的結果

由以上的線性關係轉換過程中，知道四個英文字母與不同花色是彼此獨立的兩個符號表徵系統，經過結合之後，又形成一個新的符號表徵系統。在 24 種排列的任一種情形中，只要確定符號表徵的線性轉換規則，就能出現一種獨一無二的符號表徵系統。因此，兩個符號表徵系統結合在一起，形成一個新的符號表徵系統，說明表徵間互相轉換具有相容性與獨特性，這也就解決了一開始的問題。

伍、結語

荷蘭數學教育家 Freduenthal（1991）倡導「真實數學教育」（Realistic Mathematics Education，簡稱 RME），認為：「數學是一種人類的活動」，教育應該「引導」學生經由做數學而有「再發明」數學的機會。從現實生活中找到的數學問題，利用本身具備的數學知識，以科學方法進行探究，無論是歸納性的證明，或是演繹式的推理，都可以在數學解題過程中，享受著數學帶來的樂趣，一方面解決數學問題，另一方面也可以提升對數學的熱情，原本要花很多時間的一道數學問題，經過層層分析，符號表徵系統轉換，觀察得到規律性，逐步找出解題的最佳妙招，數學好玩。

參考資料

林燈茂（2011）：點色皆獨。屏東教大科學教育，34 期，73-92。

曹亮吉（2003）：**阿草的數學聖杯**。台北市：天下遠見出版社。

Jean-Paul Delahaye（2006）：數獨樂，樂無窮（翁秉仁，譯）。科學人雜誌。2015 年 1 月 12 日，取自：http://sa.ylib.com/index.aspx。

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Heddens, J.W. (1984). *Today's Mathematics: Concepts and Methods in Elementary SchoolMathematics.* 5th ed. Chicago: Science Research Associates

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In Janvier, C. (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79(4), 363-371.