凸多邊形邊上或內部一點到各頂點距離平方和的極值

朱啟台 [1] 李政豐 [2*] 陳昭地 [1]

[1] 國立臺灣師範大學 數學系

[2] 國立竹南高級中學

壹、前言

在坐標平面上給定 ΔABC，P(x,y)為三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$上或其內部一點，我們想要求 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2$ 的最大最小值。我們考慮由三角形開始探討，再延伸到四邊形、五邊形、六邊形到凸 n 邊形。

$O(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\frac{y_1+y_2...+y_n}{n})$ 是凸 n 邊形頂點 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ .... 的坐標平均點，我們想限定凸 n 邊形來探討，此時多邊形各頂點的坐標平均點 $O(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\frac{y_1+y_2...+y_n}{n})$，由分點公式及數學歸納法可知，坐標平均點 O，一定會在多邊形的內部。

距離平方和函數 $f(x,y)$ 是一個多項式的函數，凸 n 邊形的內部及邊界是一個封閉而有界的集合，定義在這個集合的連續函數一定會有最大值與最小值，在這種條件下我們開啟探討的旅程。Geogebra 是我們模擬實驗的工具，幾何探索一直都缺少不了這個優良的工具，它可以輕易的結合代數運算與幾何作圖，讓我們可以發現最小值、最大值產生的位置在哪裡。有了確定的方向之後，我們才能進一步去研究與證明。

最小值的計算比較簡單，用配方法或偏導數就可以解決，在網路上就能找到。最大值的計算比較困難，不僅需要用到代數方法來化簡，還需要用到幾何圖形來轉化，尤其是當一般化考慮到凸 n 邊形的情形，就需要結合代數計算與幾何證明的方法，在網路上我們尚未找到類似的作法。

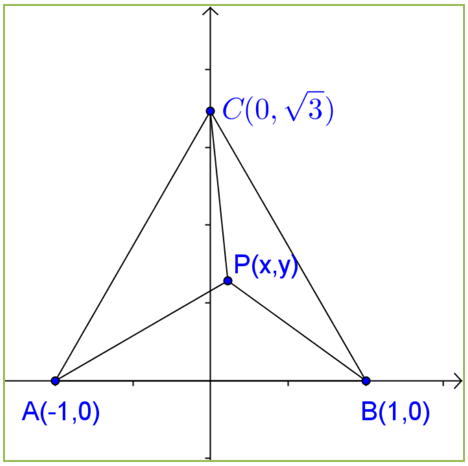
貳、本文

首先我們先考慮正三角形的特例，如圖(一)，令 Ω 是邊長為 2 的正 Δ 邊界及內部所成的集合， $P(x,y)\in\Omega$

*為本文通訊作者

$$f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2=\left[(x+1)^2+y^2\right]+\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[x^2+(y-\sqrt{3})^2\right]$$

$$=3(x^2+y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}y)+5=3\left[(x-0)^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{3})^2\right]+4$$



圖(一)

則 $f(x,y)\geq 4$ 且等號成立 $\Leftrightarrow$ $x=0, y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

即 P 點是正 ΔABC 的重心 $G(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，

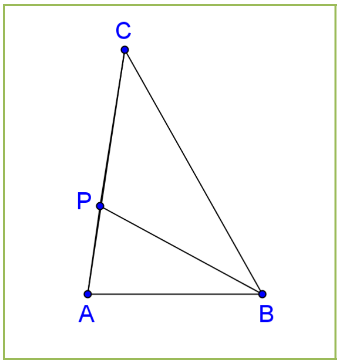
此時 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2=3(\overline{PA})^2=3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=4$

藉由 Geogebra 的實驗觀察， P 在 Ω 上的任一點， $P\neq G$，都有 $f(x,y)>4$ 。考慮 Ω 是封閉而有界的集合， $f(x,y)$ 在 Ω 一定有最大值，顯然最大值 ≥ 4 ，而且這個最大值發生的點，一定不是 Ω 的內點，於是 $f(x,y)$ 的最大值必然發生在三邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{CA}$ 上，由 x,y 的特殊關係易知： $f(x,y)$ 的最大值必然發生在正 ΔABC 的三頂點此時，最大的 $f(x,y)=(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2=8$ 。

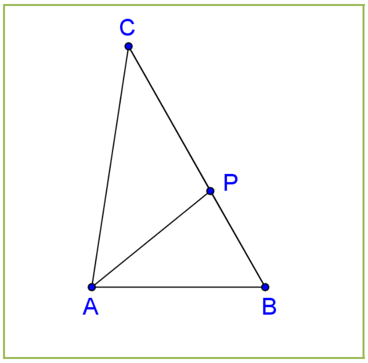
引理(一)：

ΔABC 中，設 $\overline{AB}\leq\overline{AC}\leq\overline{BC}$ ，P 為三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上任一點，則有 $(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2\leq(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$ ，且等號成立之充要條件為 P 在較大兩邊的交點，亦即是在頂點 C。

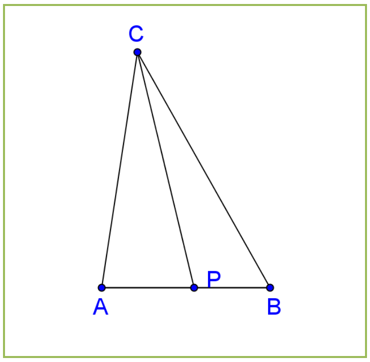
解說：如圖(二)(三)(四)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

如圖(二) ΔABC 中， $\overline{AB} \le \overline{BC}$ ，故 $\overline{PB} \le \overline{BC}$ ，

$$(\overline{PA})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{PB})^2 \le (\overline{PA}+\overline{PC})^2+(\overline{BC})^2 \le (\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$$

如圖(三) ΔABC 中， $\overline{AB} \le \overline{AC}$ ，故 $\overline{PA} \le \overline{AC}$ ，

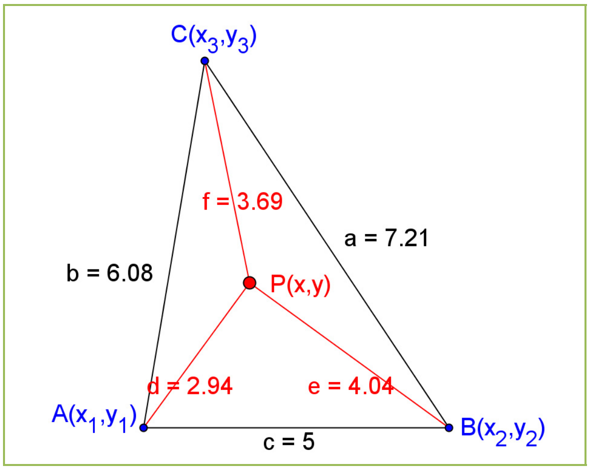
$$(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2 \le (\overline{AC})^2+(\overline{PB}+\overline{PC})^2 \le (\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$$

如圖(四) ΔABC 中， $\overline{AC} \le \overline{BC}$ ，故 $\overline{PC} \le \overline{BC}$ ，

$$(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2 \le (\overline{PA}+\overline{PB})^2+(\overline{BC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2 \le (\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$$

於是得到 $(\overline{PA})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{PB})^2 \le (\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$ ，等號成立時，P 在頂點 C。

我們想要用解析幾何的方法，將三頂點坐標化，如圖(五)，ΔABC 的三頂點 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ ，P(x,y)是其內部或邊上一點，



圖(五)

令二元二次函數 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2=\sum_{i=1}^{3}(x-x_i)^2+\sum_{i=1}^{3}(y-y_i)^2$ 代表點 P(x,y)到三頂點的距離平方和，則

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(x^2-2x_ix+x_i^2)+\sum_{i=1}^{3}(y^2-2y_iy+y_i^2)=3x^2-2\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)x+\sum_{i=1}^{3}x_i^2+3y^2-2\left(\sum_{i=1}^{3}y_i\right)y+\sum_{i=1}^{3}y_i^2$$

$$=3\left[x^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i}{3}\right)x+\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i}{3}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i}{3}\right)^2+3\left[y^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}y_i}{3}\right)y+\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}y_i}{3}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{3}y_i^2-3\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}y_i}{3}\right)^2$$

令 $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}x_i}{3}$ ， $\overline{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}y_i}{3}$ ，則

$$f(x,y)=3\left[x^2-2\left(\overline{x}\right)x+\left(\overline{x}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\left(\overline{x}\right)^2+3\left[y^2-2\left(\overline{y}\right)y+\left(\overline{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{3}y_i^2-3\left(\overline{y}\right)^2$$

$$=3\left(x-\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\left(\overline{x}\right)^2+3\left(y-\overline{y}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}y_i^2-3\left(\overline{y}\right)^2$$

$$=3\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\left(\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{3}y_i^2-3\left(\overline{y}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2-3\left(\overline{x}\right)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)$$

$$=\frac{1}{3}(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3)$$

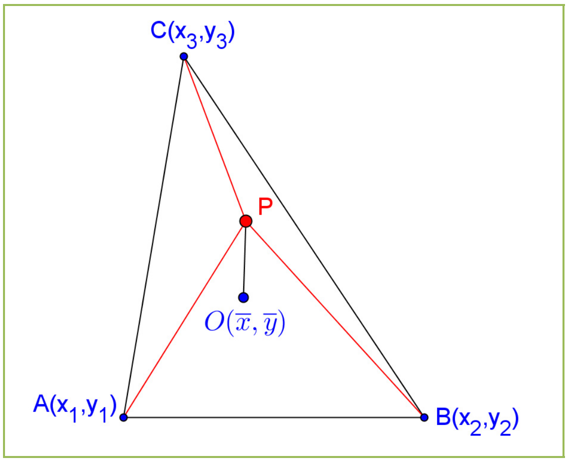
$$=\frac{1}{3}\left[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2\right]=\frac{1}{3}\left[\sum_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)^2\right]$$

同理 $\sum_{i=1}^{3}y_i^2-3\left(\overline{y}\right)^2=\frac{1}{3}\left[(y_1-y_2)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_3)^2\right]=\frac{1}{3}\left[\sum_{1\le i<j\le 3}(y_i-y_j)^2\right]$

故 $f(x,y)=3\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{3}\left[\sum_{1\le i<j\le 3}(x_i-x_j)^2\right]+\frac{1}{3}\left[\sum_{1\le i<j\le 3}(y_i-y_j)^2\right]$

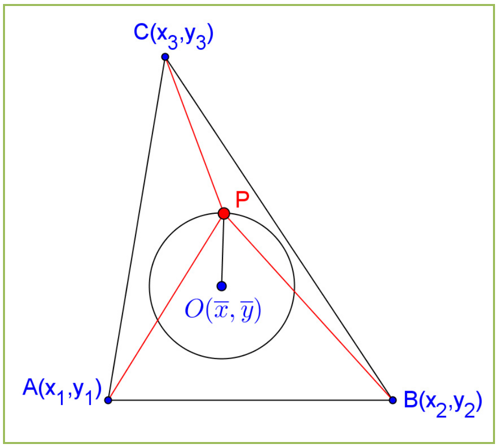
即 $f(x,y)=3\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{3}\left[\sum_{1\le i<j\le 3}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right]$

如圖(六)，由幾何意義來看， $f(x,y)=3(\overline{PO})^2+\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$

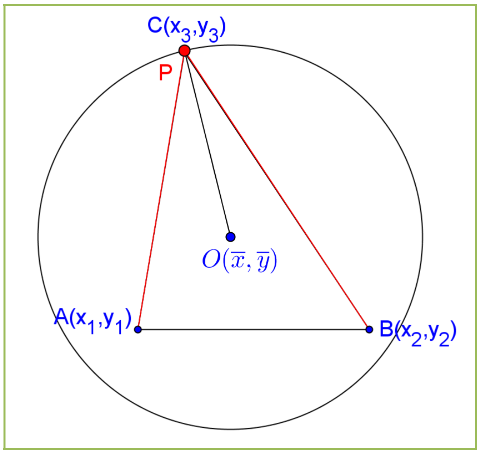


圖(六)

如圖(七)，若以坐標平均點 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑作圓，圓周上的任意點的 $f(x,y)$ 皆與 P 點的 $f(x,y)$ 相同，$\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$ 是定數，當 $(\overline{PO})^2$ 愈大，$f(x,y)$ 就愈大，因此 $f(x,y)$ 的最小值發生在 P=O 點，此時坐標平均點 O，就是三角形的重心 G，而最大值發生在離坐標平均點 O 最遠的頂點 C，此時 P=C，如圖(八)。因為最短邊所對的中線最長，$\overline{OC}$ 是最長中線的三分之二，故 $\overline{OC} \geq \overline{OB} \geq \overline{OA}$ 。



圖(七)



圖(八)

於是我們可以得到下面的兩個定理：

定理一、

給定 ΔABC，P 為三邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 上或其內部一點，則 P 點到三頂點的距離平方和 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2$ 的最小值發生在 ΔABC 的重心 G，且最小值為

$(\overline{GA})^2+(\overline{GB})^2+(\overline{GC})^2$，也等於 $\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$

補充說明(一)：設 m_a 是 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 邊上的中線，

由中線定理 $m_a=(1/2)\sqrt{2(\overline{AB})^2+2(\overline{AC})^2-(\overline{BC})^2}$，$\overline{GA}=\frac{2}{3}m_a$，$\overline{GA}^2=\frac{4}{9}(m_a)^2$

所以 $\overline{GA}^2=\frac{4}{9}(m_a)^2=(1/9)[2(\overline{AB})^2+2(\overline{AC})^2-(\overline{BC})^2]\ldots\ldots\ldots(1)$

同理 $\overline{GB}^2=\frac{4}{9}(m_b)^2=(1/9)[2(\overline{AB})^2+2(\overline{BC})^2-(\overline{AC})^2]\ldots\ldots\ldots(2)$

$\overline{GC}^2=\frac{4}{9}(m_c)^2=(1/9)[2(\overline{AC})^2+2(\overline{BC})^2-(\overline{AB})^2]\ldots\ldots\ldots(3)$

(1)+(2)+(3)，$(\overline{GA})^2+(\overline{GB})^2+(\overline{GC})^2=\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$

定理二、

如圖(八)，給定 ΔABC，設 $\overline{AB}\le\overline{AC}\le\overline{BC}$，P(x,y)為三邊上或內部任一點，則 P 點到三頂點的距離平方和 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2$ 的最大值是 $(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$(較大兩邊的平方和)，亦可表為 $3(\overline{GC})^2+\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$，G 是重心，且等號成立之充要條件為 P 在較大兩邊的交點，亦即是 P 在頂點 C。

補充說明(二)：由定理一的補充說明(一)

$\overline{GC}^2=(1/9)[2(\overline{AC})^2+2(\overline{BC})^2-(\overline{AB})^2]\ldots\ldots\ldots(3)$

$3(\overline{GC})^2+\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]=\frac{1}{3}[2(\overline{AC})^2+2(\overline{BC})^2-(\overline{AB})^2]+\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$

$=(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$ 即為 ΔABC 最大兩邊之和。

我們想要將這個結果推廣到凸 n 邊形：

如圖(九)，凸四邊形 $ABCD$ 的四頂點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，$P(x,y)$是其內部或邊上一點，

令二元二次函數 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{PD})^2=\sum_{i=1}^{4}(x-x_i)^2+\sum_{i=1}^{4}(y-y_i)^2$ 代表 P 點到四頂點的距離平方和，則

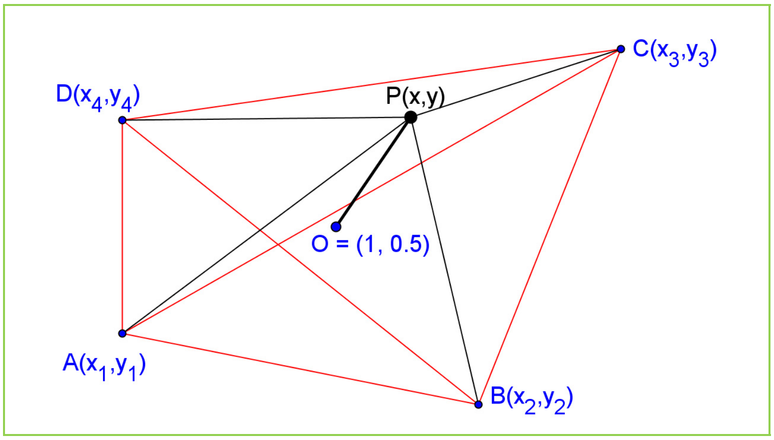


圖 (九)

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{4}(x^2-2x_ix+x_i^2)+\sum_{i=1}^{4}(y^2-2y_iy+y_i^2)$$

$=4x^2-2\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)x+\sum_{i=1}^{4}x_i^2+4y^2-2\left(\sum_{i=1}^{4}y_i\right)y+\sum_{i=1}^{4}y_i^2$ ，經由配方法得到

$$=4\left[x^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)x+\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}\right)^2+4\left[y^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)y+\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-4\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}\right)^2$$

令 $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{4}$ ， $\overline{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}y_i}{4}$ ，則

$$f(x,y)=4\left[x^2-2\left(\overline{x}\right)x+\left(\overline{x}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\overline{x}\right)^2+4\left[y^2-2\left(\overline{y}\right)y+\left(\overline{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-4\left(\overline{y}\right)^2$$

$$=4\left(x-\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\overline{x}\right)^2+4\left(y-\overline{y}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-4\left(\overline{y}\right)^2$$

$$=4\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-4\left(\overline{y}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\left(\overline{x}\right)^2$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4)$$

$$=\frac{1}{4}(3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+3x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^2\right]$$

同理 $\sum_{i=1}^{4} y_i^2 - 4\left(\overline{y}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}\left[(y_1-y_2)^2+(y_1-y_3)^2+(y_1-y_4)^2+(y_2-y_3)^2+(y_2-y_4)^2+(y_3-y_4)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(y_i-y_j)^2\right]$$

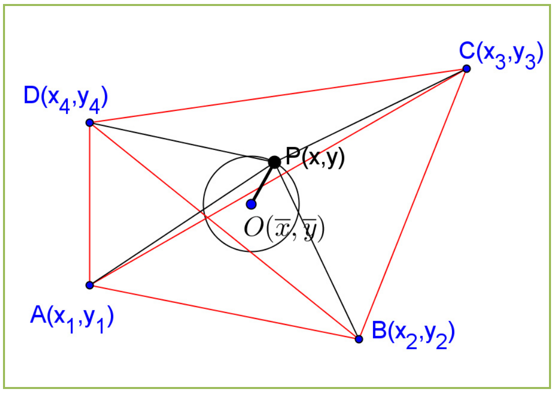
故 $f(x,y)=4\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}(y_i-y_j)^2\right]$

即 $f(x,y)=4\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left[\sum_{1\le i<j\le 4}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right]$

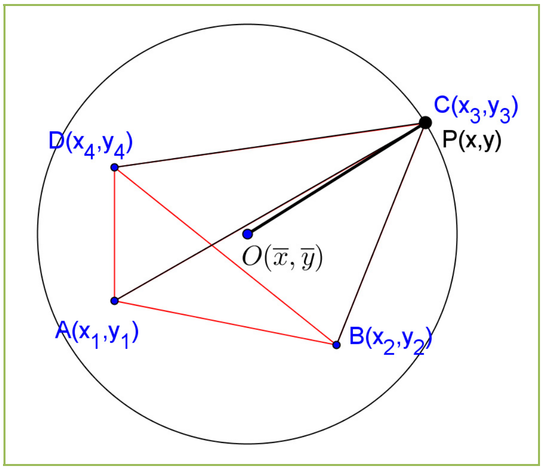
由幾何意義來看，如圖(十)，

$$f(x,y)=4(\overline{PO})^2+\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$$

若以坐標平均點 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑作圓，圓周上任意點的 $f(x,y)$ 皆與點 P 的 $f(x,y)$ 相同。$\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$是定數，$(\overline{PO})^2$ 愈大，$f(x,y)$ 就愈大，則 $f(x,y)$ 的最小值發生在 P=O 點，此時 O 不一定是四邊形的重心(若為正多邊形 O 一定是重心)，而最大值發生在 P 離 O 最遠的頂點 C，如圖(十一)所示。



圖(十)

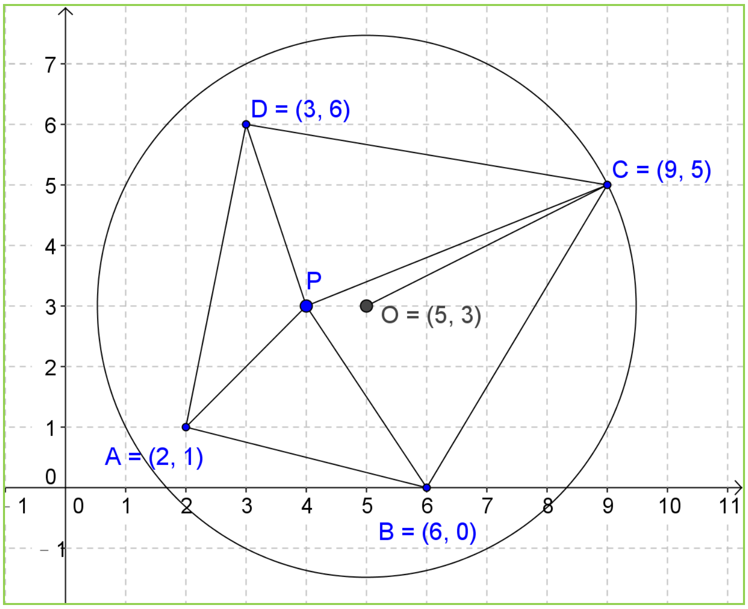


圖(十一)

例題 1：如圖(十二)，P 是凸四邊形 ABCD 內部或邊上一點，試求

$f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2+(\overline{PD})^2$ 的最大值與最小值?

經由上面的計算，離座標平均點 O 最遠的頂點是 C，以 O 為圓心，$\overline{OC}$ 為半徑的圓，涵蓋了點 A、B、D。此時



圖(十二)

$$f(x,y)\text{的最大值}=4(\overline{CO})^2+\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$$

$$=80+\frac{1}{4}(17+34+37+26+65+45)=136$$

$$f(x,y)\text{的最小值}=\frac{1}{4}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2+(\overline{CD})^2+(\overline{DA})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BD})^2\right]$$

$=\frac{1}{4}(17+34+37+26+65+45)=56$ 與 Geogebra 實驗的結果相符合。

當它是凸五邊形時 $f(x,y)=5\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{5}\left[\sum_{1\le i<j\le 5}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right]$

$=5(\overline{PO})^2+\frac{1}{5}$(五個邊長及五條對角線的平方和)

此時坐標平均點 O 也不一定是五邊形的重心。

當它是凸六邊形時

$$f(x,y)=6\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{6}\left[\sum_{1\le i<j\le 6}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right]$$

$$=6(\overline{PO})^2+\frac{1}{6}(\text{六個邊長及九條對角線的平方和})$$

$f(x,y)$的最小值都發生在 P=O 點，最大值都發生在 P 離 O 最遠的頂點。

此時坐標平均點 O 不一定是六邊形的重心。於是我們可以得到：

定理三、

一個凸 n 邊形 $A_1A_2A_3.....A_n$ ，P(x,y)是內部或邊上一點，P 到各頂點的距離平方和

$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(\overline{PA_i}^2)$ ，它的坐標平均點 O，一定在凸 n 邊形的內部。且

$$f(x,y)=n\left[\left(x-\overline{x}\right)^2+\left(y-\overline{y}\right)^2\right]+\frac{1}{n}\left[\sum_{1\le i<j\le n}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]\right]$$

$$=n(\overline{PO})^2+\frac{1}{n}(\text{n 個邊長及}(C_2^n-n)\text{條對角線的平方和})\text{。則}$$

$f(x,y)$的最小值都發生在 P=O 點，產生最大值的 P 都發生在離 O 最遠的頂點。

上面的定理在 $n\ge 4$ 時，n 個邊長及(C_2^n-n)條對角線的平方和，並不容易計算，若直接用：離 O 最遠的頂點與其他各頂點的距離平方和，反而簡單。

例如 P.9 的例題 1

$f(x,y)$的最大值= $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{CD}^2=65+34+37=136$ ，計算更快。

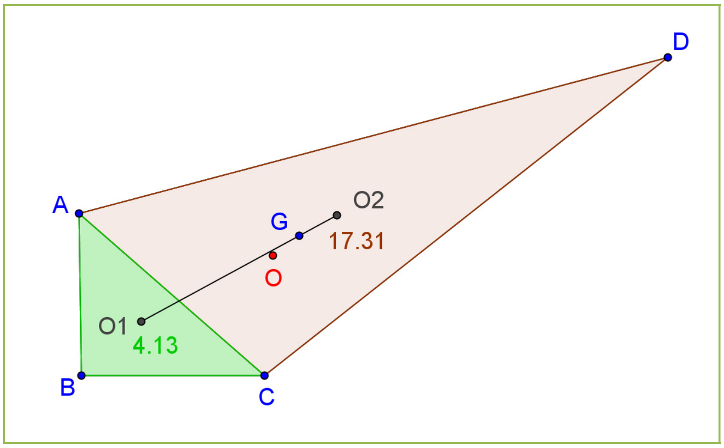
參、結語

由 ΔABC 邊上或內部一點 P，計算 $f(x,y)=(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2$ 的極值，衍生出一個有趣的代數運算與幾何作圖的轉換：

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(x^2-2x_ix+x_i^{\,2})+\sum_{i=1}^{3}(y^2-2y_iy+y_i^{\,2})=3(\overline{PO})^2+\frac{1}{3}\left[(\overline{AB})^2+(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2\right]$$

這是一個很有意義的學習經驗，可以延伸到凸 n 邊形的結論，則是一時的靈感，數學常常都是在不同的思考方向中，卻能找到相同的研究結果。

附帶一提：以上所用到的坐標平均點 O 只有在三角形時它代表重心，在四邊形五邊形它就不一定是重心，可以確定的是正四邊形、正五邊形等正多邊形，坐標平均點 O 仍是重心。古時候聰明的木匠，測量等厚度的不規則形狀的木板的重心，是將它以邊緣一點用繩索懸吊，沿垂直地面畫鉛垂線，再將邊緣上另一點用繩索懸吊，再沿垂直地面再畫鉛垂線，兩條鉛垂線的交點即接近重心。



上圖四邊形 ABCD 的重心 G，是由 ΔABC 的重心 O1 與 ΔACD 的重心 O2，按照兩三角形的面積(代表重量)以槓桿原理計算得到，換言之如果有一根針尖頂住重心 G 它是可以平衡的，G 就是重心，但平均坐標點 O 卻與 G 有一點點的差距。

參考文獻

李政豐、傅淑婷、陳昭地（2014）。三角形三個極小值問題的探討，科學教育月刊第 366 期 P.11，台北市：國立臺灣師範大學科學教育中心。

李政豐、朱啟台、陳昭地（2014）。三角形三個最大值問題的迴響，科學教育月刊第 367 期 P.24，台北市：國立臺灣師範大學科學教育中心。

朱書邱。三角形中有關距離的極值問題，湖南武漢師範學校。http://wenku.baidu.com/view/6f716c1ba8114431b90dd87a.html