穿越時空遇見克卜勒

黃光照

臺北市立第一女子高級中學

壹、前言

如果能穿越時空遇見克卜勒，告知以其所發現的行星運動定律為基礎並應用現今吾人所了解的牛頓三大運動定律、微積分等相關知識，便能建構出行星運動的背後力學機制即萬有引力，想必克卜勒的心中自然雀躍不已。進一步讓他知道在萬有引力作用下，行星的運動軌跡可以是圓錐曲線中的任何一種，如雙曲線、拋物線、橢圓或圓，這更會令克卜勒讚嘆自然的規律竟是如此之美。

以下先從克卜勒三大行星運動定律為基礎，逐步建構出萬有引力的數學形式，接著再從萬有引力重新推導克卜勒三大行星運動定律。

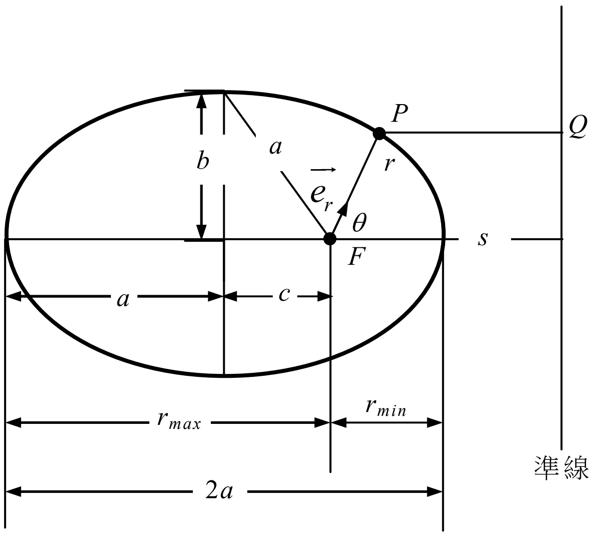
貳、克卜勒行星第一運動定律

行星以橢圓形軌道繞行太陽，太陽位於橢圓的一個焦點 F 上。而橢圓的一些數學性質如圖一。

在數學上我們定義圓錐曲線的

離心率 $e=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}=\dfrac{r}{s-r\cos\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=\dfrac{se}{1+e\cos\theta} \\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{se}+\dfrac{\cos\theta}{s} \end{cases} \text{(圓錐曲線極坐標方程式)(1)}$$



圖一　橢圓各參數

應用在橢圓的情況下：

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{max}=\dfrac{se}{1+e\cos 180^\circ}=\dfrac{se}{1-e}=a+c \\ r_{min}=\dfrac{se}{1+e\cos 0^\circ}=\dfrac{se}{1+e}=a-c \end{cases} \qquad (2)$$

由(2)式

$$\Rightarrow \frac{r_{max}}{r_{min}}=\frac{1+e}{1-e}=\frac{a+c}{a-c} \Rightarrow e=\frac{c}{a} \qquad (3)$$

$$\text{又}\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-e^2} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow r_{\max}+r_{\min}=\frac{2se}{1-e^2}=2a$$

$$\Rightarrow se=a(1-e^2)=\frac{b^2}{a} \qquad (5)$$

(1)式可化為

$$\begin{cases} r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}=\dfrac{b^2}{a(1+e\cos\theta)} \\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1+e\cos\theta}{a(1-e^2)}=\dfrac{a(1+e\cos\theta)}{b^2} \end{cases} \quad (6)$$

參、克卜勒行星第二運動定律

在相同的時間之內，行星與太陽的連線會掃過相同的面積。即

面積速率 $A=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=$常數

$$⇨\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta=\int_0^T A dt \Rightarrow ab\pi=AT$$

$$⇨\ A=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{ab\pi}{T}\ ⇨\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{2A}{r^2} \quad (7)$$

其中 $ab\pi$為橢圓面積，T 為行星公轉週期。

肆、克卜勒行星第三運動定律

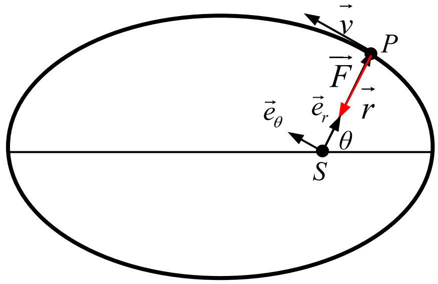
行星環繞太陽公轉週期 T 的平方與橢圓軌道半長軸 a 的立方成正比，即各行星的 $\frac{a^3}{T^2}$ 值都相等。

$$即\ \frac{a^3}{T^2}=k(常數) \quad (8)$$

此常數 k 對太陽系所有的行星都相同，足見常數 k 是與太陽的某物理性質有關。

伍、建構出牛頓萬有引力定律的數學形式

設 $\overrightarrow{e_r}$ 和 $\overrightarrow{e_\theta}$ 分別為極坐標系中徑向、角向的單位向量(見圖二)，行星相對於太陽的極坐標位置向量為



圖二　萬有引力是連心力

$$\vec{r}=r\overrightarrow{e_r} \quad (9)$$

$$⇨\ \overrightarrow{a(t)}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r}+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

$$=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

因 $r^2\frac{d\theta}{dt}=2A=$常數 ⇨ $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$

$$⇨\ \overrightarrow{a(t)}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r} \quad (10)$$

由上述知力係沿兩質點的連線上，為連心力。

由(6)、(7)式且令 $u=\frac{1}{r}$

$$⇨\ \frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d(\frac{1}{r})}\times\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{d(\frac{1}{u})}{du}\times\frac{d\left[\frac{a(1+e\cos\theta)}{b^2}\right]}{d\theta}\times\left(\frac{2A}{r^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{u^2}\times\left(-\frac{ae\sin\theta}{b^2}\right)\times\left(\frac{2A}{r^2}\right)$$

$$=\frac{2Aae\sin\theta}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2\mathrm{A}aesin\theta}{b^2}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{2\mathrm{A}aesin\theta}{b^2}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\frac{2\mathrm{A}ae}{b^2}(cos\theta)\left(\frac{2\mathrm{A}}{r^2}\right)=\frac{4\mathrm{A}^2}{r^2}\frac{aecos\theta}{b^2} \qquad (11)$$

將(6)、(7)、(8)和(11)式代入(10)式

$$\Rightarrow \overrightarrow{a(\mathrm{t})}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r}$$

$$=\left[\frac{4\mathrm{A}^2}{r^2}\frac{aecos\theta}{b^2}-\frac{4\mathrm{A}^2}{r^3}\right]\overrightarrow{e_r}$$

$$=\frac{4\mathrm{A}^2}{r^2}\left[\frac{aecos\theta}{b^2}-\frac{1}{r}\right]\overrightarrow{e_r}$$

$$=\frac{4\mathrm{A}^2}{r^2}\left(-\frac{a}{b^2}\right)\overrightarrow{e_r}=-\frac{4a}{b^2r^2}(ab\pi/T)^2\overrightarrow{e_r}$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\overrightarrow{e_r}=-\frac{4\pi^2k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

假設牛頓運動定律和物理定律的對稱性能適用於行星繞太陽的軌道運動，則由牛頓第二運動定律：

$$\Rightarrow \vec{F}_{太陽吸行星}=m\overrightarrow{a(\mathrm{t})}=-m\frac{4\pi^2k}{r^2}\overrightarrow{e_r} \qquad (12)$$

再從對稱性的考慮，$\vec{F}_{行星吸太陽}$應具有與(12)式類似的數學形式，即

$$\vec{F}_{行星吸太陽}=M\overrightarrow{a(\mathrm{t})}'=M\frac{4\pi^2k'}{r^2}\vec{e}_r$$

其中 M 表太陽的質量。

又牛頓第三運動定律：

$$\vec{F}_{太陽吸行星}=-\vec{F}_{行星吸太陽}\Rightarrow m4\pi^2k = M4\pi^2k'$$

我們可以假設 $k=\frac{G}{4\pi^2}M$ ，$k'=\frac{G}{4\pi^2}m$

故牛頓的萬有引力可寫為

$$\vec{F}_{太陽吸行星}=-\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r} \qquad (13)$$

陸、由牛頓萬有引力定律重新推導克卜勒行星三大運動定律

由於太陽的質量 M 遠遠大於行星的質量 m [註 1]，因此行星在萬有引力的作用下，相對於太陽的極坐標運動方程式[註 2]如下：

$$\begin{cases}\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}\\ \vec{F}=m\vec{a}\\ \quad =m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r}+\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\overrightarrow{e_\theta}\\ \quad =m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{4\mathrm{A}^2}{r^3}\right]\overrightarrow{e_\mathrm{r}}+\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\theta}{dt}\right]\overrightarrow{e_\theta}\end{cases} \qquad (14)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2}-\frac{4\mathrm{A}^2}{r^3}=-\frac{GM}{r^2} \qquad (15)$$

令 $u=\frac{1}{r}$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{d\theta}\left(-2\mathrm{A}\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=-2\mathrm{A}\frac{d^2u}{d\theta^2}\left(\frac{2\mathrm{A}}{r^2}\right)$$

$$=-\frac{4\mathrm{A}^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (16)$$

將(16)式代入(15)式

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}=-u+\frac{GM}{4\mathrm{A}^2} \qquad (17)$$

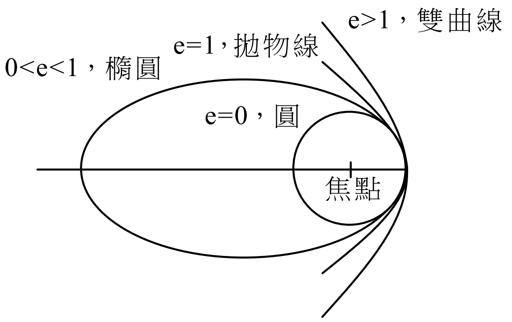
上式的解為 $u=\frac{1}{r}=Bcos\theta+\frac{GM}{4\mathrm{A}^2}$ (18)

將(18)式與(1)式做比對，

$$\Rightarrow s=\frac{1}{B}\ ;\ se=\frac{4\mathrm{A}^2}{GM} \qquad (19)$$

由此得知在平方反比的連心力作用下，行星的運動軌跡為圓錐曲線，而依離心率 e 的不同，而有如下的對應軌跡，即

$$\Rightarrow \begin{cases} e>1, \text{雙曲線} \\ e=1, \text{拋物線} \\ 0<e<1, \text{橢圓} \\ e=0, \text{圓} \end{cases}$$



圖三　圓錐曲線

若行星繞日的軌跡為橢圓，則此為克卜勒行星第一運動定律。

再者，由(14)式，知 $\vec{F}$ 無 $\vec{e_\theta}$ 方向上的分量

$\Rightarrow r^2\dfrac{d\theta}{dt}$=常數，即

面積速率 A = $\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$= 常數

此為克卜勒行星第二運動定律。

由(5)式和(19)式

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a}=\frac{4\mathrm{A}^2}{GM}=\frac{4(ab\pi/T)^2}{GM}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}=\text{常數}$$

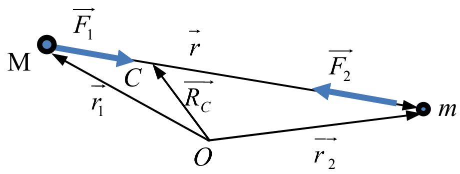
此為克卜勒行星第三運動定律。

柒、結論

克卜勒行星運動三定律的內容是不包含力與質量的概念，要寫出萬有引力的數學形式還得靠牛頓運動定律、微積分、對稱性等觀念幫忙才得以完成。而行星繞日運動，在與距離平方反比的連心力(即萬有引力)作用下，克卜勒行星運動三大定律是必然的結果。

備註

註 1：二體運動方程可以轉換成一體問題



圖四　二體問題

$$\vec{F_2}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r}=m\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} \qquad \text{(A1)}$$

由質心的定義：$M\vec{r_1}+m\vec{r_2}=(M+m)\vec{R_c}$

可得

$$M\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2}+m\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}=(M+m)\frac{d^2\vec{R_C}}{dt^2} \text{(A2)}$$

假設此系統不受外力作用，由質心定理知：$\dfrac{d^2\vec{R_C}}{dt^2}=0$，進而由(A2)式，得

$$\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}=-\frac{M}{m}\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} \qquad \text{(A3)}$$

又 $\vec{r_2}-\vec{r_1}=\vec{r}\Rightarrow\dfrac{d^2\vec{r_1}}{dt^2}=\dfrac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}-\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

代入(A3)式得 $\dfrac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}=\dfrac{M}{M+m}\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

代入(A1)式得

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r} = \frac{Mm}{M+m}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

若 $M>>m \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$

註 2：萬有引力定律中的質量屬於重力質量，而牛頓運動第二定律中的質量為慣性質量。兩種質量的概念不同，但數值相同，因此作者在推導的過程中，不強調兩者間的區別。

參考文獻

易富國(2010)：單元 10．Kepler 問題，臺大開放性課程。取自 http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/index.php/ocw/cou/099S129/10

褚德三主編(1998)：高中物理第一冊，國立編譯館出版，Ch4(2)質量的定義，86-87。

褚德三主編(1998)：高中物理第一冊，國立編譯館出版，Ch6-2 萬有引力定律，130-133。