中學生通訊解題第八十八期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
8801

設 $A=\sqrt{1^2+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1^2+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1^2+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$，則不超過 A 的最大整數為何？

【簡答】2011

參考解答：

(1) $\sqrt{1^2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(2) $A=(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(1+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012})=2012-\frac{1}{2012}$

故不超過 A 的最大整數為 2011。

【解題評析】

各位同學的解題方法大同小異，對於代數題目，大家大致都能表達完整，在因式分解的部分，大都直接計算得出，如果可以，希望各位同學再想想是否有較技巧的方法整理或化簡根號內的東西。另外，對於觀察歸納的結果，應該要加以證明，否則所得結果並不能完全保證對任意項都是成立的。

問題編號
8802

某人於現今西元 2011 年發現他的年齡恰等於他出生西元年的各位數字和,則此人是西元那一年出生的？

【簡答】1991 年

參考解答：

設此人出生年份為西元 $\overline{abcd}$ 年，則由條件可知：

$2011-\overline{abcd}=a+b+c+d$ ，而 $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$

$\therefore\quad 2011=1001a+101b+11c+2d,(a\le 2)$

(1) $a=2\Rightarrow 101b+11c+2d=9\Rightarrow b=c=0$ 且 $d=\dfrac{9}{2}$(不合)

(2) $a=1\Rightarrow 101b+11c+2d=1010\Rightarrow b=9\ \therefore\ 11c+2d=101$

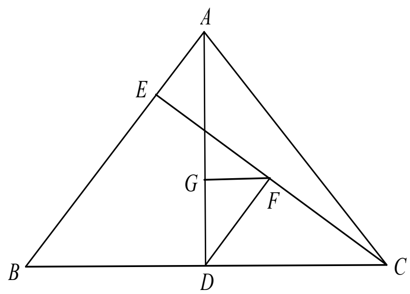
$\Rightarrow c=9,d=1$

檢驗西元 1991 年出生，年齡＝20＝1+9+9+1(合)。

【解題評析】

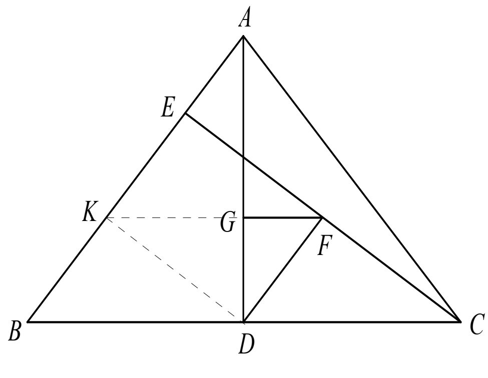
共有 20 位同學作答，13 位同學答對，答對率 65%。本題是數論中求整數解的基礎題型，務必在各種情況下一一討論出滿足的解。其中有幾位同學沒有全對，都是犯了討論不完完備的缺點，應當多訓練及要求自己細心觀察、全面討論。

問題編號
8803



在等腰三角形 ABC，$\overline{AD}$ 是底邊 $\overline{BC}$ 上的高，$\overline{CE}$ 是腰 $\overline{AB}$ 上的高，$\overline{DF}\perp\overline{CE}$ 於 F，$\overline{FG}\perp\overline{AD}$ 於 G，求證：$\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AG}}=\dfrac{\overline{BD}^3}{\overline{AD}^3}$ 。

參考解答：



延長 $\overline{FG}$ 交 $\overline{AB}$ 於 K，連結 $\overline{DK}$ ，

由$\Delta FDC\cong\Delta EKF$ 可證 $EFDK$ 是矩形

由$\Delta ADB\sim\Delta DGF$ 可得 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{GD}}$ ，

由$\Delta ADB\sim\Delta AGK$ 可得 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{KG}}{\overline{AG}}$ ，

由 $\Delta ADB \sim \Delta KGD$ 可得 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{GD}}{\overline{KG}}$ ，

三式相乘即得 $\dfrac{\overline{FG}}{\overline{AG}}=\dfrac{\overline{BD}^3}{\overline{AD}^3}$ 。

【解題評析】

利用題目等式中出現的邊，找出這些邊所在的三角形，作出輔助點 K 後，利用這些相似的直角三角形，求得所需要的對應邊比例，經整理過後即可得所求的等式。

問題編號 8804

一個四位數除以19所得的餘數等於它的四個數字的立方和，求所有滿足這樣條件的四位數。

【簡答】2012

參考解答：

設此四位數為 $[abcd]_{10}$ ，則 $a^3+b^3+c^3+d^3\le 18$ ，且 $1\le a\le 2, 0\le b\le 2, 0\le c\le 2, 0\le d\le 2$ ，可能的 a,b,c,d 有：

a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數
2	2	1	1	7	2	2	1	0	6	2	2	0	1	16	2	2	0	0	15
2	1	2	1	12	2	1	2	0	11	2	0	2	1	7	2	0	2	0	6
2	1	1	2	3	2	1	0	2	12	**2**	**0**	**1**	**2**	17	2	0	0	2	7
1	2	2	1	5	1	2	2	0	4	0	2	2	1	X	0	2	2	0	X
1	2	1	2	15	1	2	0	2	5	0	2	1	2	X	0	2	0	2	X
1	1	2	2	1	1	0	2	2	15	0	1	2	2	X	0	0	2	2	X
2	1	1	1	2						2	0	0	0	5					
1	2	1	1	14						0	2	0	0	X					
1	1	2	1	0						0	0	2	0	X					

a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數	a	b	c	d	餘數
1	1	1	2	10						0	0	0	2	X					
2	1	1	0	1	1	1	2	0	18	2	1	0	0	10	1	0	2	0	13
2	1	0	1	11	1	0	2	1	14	2	0	1	0	15	0	1	2	0	X
2	0	1	1	16	0	1	2	1	X	2	0	0	1	6	0	0	2	1	X
1	2	1	0	13	1	1	0	2	0	1	2	0	0	3	1	0	0	2	14
1	2	0	1	4	1	0	1	2	5	0	2	1	0	X	0	1	0	2	X
0	2	1	1	X	0	1	1	2	X	0	2	0	1	X	0	0	1	2	X
1	1	1	1	9	1	1	1	0	8	1	1	0	0	17	1	0	0	0	12
					1	1	0	1	18	1	0	1	0	3	0	1	0	0	X
					1	0	1	1	4	0	1	1	0	X	0	0	1	0	X
0	0	0	0	X	0	1	1	1	X	1	0	0	1	13	0	0	0	1	X
										0	1	0	1	X					
										0	0	1	1	X					

上表餘數中標示「X」者因為非四位數，不合；標示數字者為餘數。經計算，可知只有四位數 2012 符合。

問題編號

8805

已知 2011 個實數 $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ 滿足 $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\ldots+|x_{2010}-x_{2011}|+|x_{2011}-x_1|=1$，則 $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{2011}|$ 的最小值等於?

【簡答】$\frac{1}{2}$

參考解答：

1. 不等式的存在：

對任意的正整數 i、j，$|x_i-x_j| \le |x_i| + |x_j|$ (這概念很重要)，則

$$1 = |x_1-x_2| + |x_2-x_3| + \ldots + |x_{2010}-x_{2011}| + |x_{2011}-x_1|$$
$$\le |x_1| + |x_2| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_{2010}| + |x_{2011}| + |x_{2011}| + |x_1|$$
$$= 2(|x_1| + |x_2| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_{2010}| + |x_{2011}|)$$

所以，$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{2011}| \ge \frac{1}{2}$。

2. 至少有一組解：

取 $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2=x_3=\ldots=x_{2011}=0$ 時，恰有$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{2011}| = \frac{1}{2}$。

【解題評析】

本題只有九位同學做答，最高得 5 分，平均 2.2 分，算是不理想，而最重要的原因是同學不習慣此種類型之題目，題目是問最小值，而同學是找到一組解，正好是相同之數字，關鍵是，我怎麼知道這就是最小值?所以要答對此種類型必須要證明：(1)不等式的存在(2)至少有一組解。